

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2024/25 учебного года для 5–6 классов

Задача 1

В-1 Антон, Боря, Вася, Гена и Данила — соседи по подъезду. Каждый день, выходя из дома в школу, Антон спускается на 60 ступеней, Боря — на 99, Вася — на 112, Гена — на 151, а Данила — на 164. От земли до первого этажа 8 ступеней, а между этажами число ступеней одинаковое и большее единицы. На каком этаже живет каждый из ребят?

Ответ: Антон — 4, Боря — 7, Вася — 8, Гена — 11, Данила — 12.

Решение. Вычтем 8 из всех величин и найдем НОД. Получим 13. Тем самым, этаж Антона — $(60 - 8)/13 = 4$, Бори — $(99 - 8)/13 = 7$, Васи — $(112 - 8)/13 = 8$, Гены — $(151 - 8)/13 = 11$, а Данилы — $(164 - 8)/13 = 12$

Задача 2

В-1 Назовем натуральное число счастливым, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 ($3 + 2 + 2 + 1 = 8$); 5678 ($5 + 8 = 6 + 7$). Назовем число суперсчастливым, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите наименьшее суперсчастливое число.

Ответ: 549

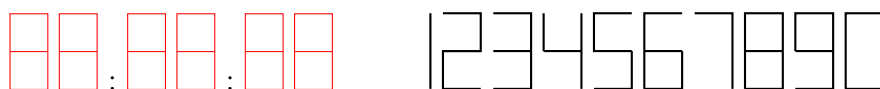
Решение. Суперсчастливое число как минимум трёхзначное. Двухзначное счастливое число, очевидно, имеет вид \overline{aa} , и тогда либо $\overline{aa} + 1$ двухзначное несчастливое, либо несчастливое 100.

Рассмотрим трехзначные числа. Сумма цифр счастливого числа должна быть четной (иначе разбиение на две группы с одинаковой суммой цифр невозможно), поэтому суперсчастливое число должно заканчиваться цифрой 9, так как в ином случае суммы цифр двух последовательных чисел имеют разную четность. Значит, суперсчастливое трехзначное число имеет вид $\overline{ab9}$, а следующее за ним число состоит из цифр $a, b + 1, 0$. Отметим, что при этом случай $b = 9$ невозможен, так как тогда число не будет счастливым.

Поэтому должны делиться на две группы с одинаковой суммой цифр как цифры a, b и 9, так и цифры $a, b + 1$ и 0. Для первой комбинации цифр или $a = b + 9$ (откуда $a = 9, b = 0$), или $b = a + 9$ (что невозможно), или $a + b = 9$. Для второй комбинации $a = b + 1$. Одновременно оба числа счастливые только при $b = 4, a = 5$. Таким образом, имеется одно трехзначное суперсчастливое число 549 (за ним следует счастливое число 550).

Задача 3

В-1 На дисплее цифровых часов (которые показывают время в 24-х часовом формате с секундами) есть 6 мест под цифры. Каждая цифра высвечивается с помощью какой-либо комбинации включённых и выключенных палочек, всего по 7 палочек на цифру. Каждый участок экрана всегда показывает какую-либо цифру (скажем, на экране мы можем увидеть 02:49:30, но не 2:49:30).



Какие-то палочки на часах могут быть «битыми» и не включаться. Проверка экрана происходит так: в некоторое время вы садитесь перед часами и непрерывно следите за ними, пока не убедитесь, что все палочки работают.

В какое время нужно сесть перед экраном, чтобы проверка заняла как можно меньше времени, и сколько времени она займёт?

Ответ: В 23 : 59 : 59, проверка займёт секунду.

Решение. Если наложить друг на друга изображение 23 : 59 : 59 и следующего за ними 00 : 00 : 00 — все палочки будут задействованы. Вместе эти два момента требуют работоспособности

Задача 4

В-1 Мама печет один блин за 6 минут, бабушка — за 5 минут. Когда несколько блинов уже готовы, приходит мальчик Петя и начинает есть, съедая один блин за 4 минуты. Сколько блинов в час должен печь еще и папа, чтобы в результате суммарных действий всех четверых получалось, что один блин добавляется на тарелку в среднем за 5 минут (отсчет начинается с момента появления Пети)?

Ответ: 5

Решение. За 1 минуту мама производит $1/6$ блина, бабушка $1/5$ блина, папа $1/x$ блина, а Петя съедает $1/4$ блина. Должно получаться:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12},$$

следовательно $x = 12$. Значит, папа печет блин за 12 минут, то есть за час он должен выпекать 5 блинов.

Другой вариант решения: За час мама печет 10 блинов, бабушка 12 блинов, Петя съедает 15 блинов. В итоге добавится 7 блинов. Чтобы добавилось 12 блинов (это как раз 1 блин за 5 минут), папа должен испечь 5 блинов.

Задача 5

В-1 У Паши есть игральный кубик со стандартной расстановкой точек (при ней сумма очков на противоположных гранях равна 7), только вместо точек на кубике сидят жуки. Кубик подбросили, жуки засуетились и каждый переползает на одну из четырёх соседних граней.

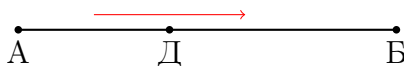
Какое наибольшее число жуков может оказаться на одной грани?

Ответ: 14

Решение. Так как все жуки покидают свою родную грань, число очков складывается из тех жуков, которые напоззли на неё с соседних. В наиболее выгодном варианте все жуки с соседних граней ползут на нашу, а в сумме (какую бы грань мы бы ни выбирали) на соседних гранях есть 14 жуков.

Задача 6

В-1 Андрей и Боря живут в одном доме Д между автобусными остановками А и Б. От Д до А каждому из мальчиков нужно идти 10 минут, а от Д до Б — 23 минуты. Автобусы едут вправо (в направлении от А к Б) и приходят на остановки А и Б каждые 8 минут, причем от А до Б они едут 5 минут. Мальчики вышли из дома одновременно, и Андрей отправился на остановку А, а Боря — на остановку Б, чтобы доехать до школы. Известно, что один из мальчиков приехал за 6 минут до начала первого урока, а другой опоздал. Кто и на сколько минут опоздал?



Ответ: Боря опоздал на 2 минуты.

Решение. Придя на остановку, Антон мог ждать автобуса t минут, где $t \leq 8$. Поэтому автобус, в котором поедет Антон, будет на остановке Б через $t_1 = t + 5$ минут, где $5 \leq t_1 \leq 13$. И при этом Боря будет в $23 - 10 - t_1 = 13 - t_1$ минутах ходьбы от остановки Б. Поскольку из условия следует, что мальчики приехали в разное время, то Боря не мог успеть на этот автобус, т.е. $t_1 < 13$. С другой стороны, $t_1 + 8 \geq 13$, поэтому на следующий автобус Боря точно успеет. А значит, он приедет на 8 минут позже Андрея, т.е. опоздает на $8 - 6 = 2$ минуты.
