

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**  
Отборочный этап 2024/25 учебного года для 9 класса

---

**Задача 1**

**В-1** Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x.$$

В ответе укажите число целых  $y$  из области значений, не превосходящих 100.

**Ответ:** 103

**Решение.** Искомое множество значений совпадает с множеством значений  $y$ , для которых имеет решение система

$$\begin{cases} x + y \geq 0, \\ (x + y)^2 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 0, \\ (2y + 3)x = 2 - y^2. \end{cases}$$

Поэтому задача сводится к решению неравенства

$$\frac{2 - y^2}{2y + 3} + y \geq 0,$$

которое равносильно

$$\frac{(y + 1)(y + 2)}{2y + 3} \geq 0,$$

то есть область значений  $y \in [-2, -\frac{3}{2}) \cup [-1, +\infty)$ .

---

**В-2** Найдите множество значений функции

$$y = x - \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

В ответе укажите число целых  $y$  из области значений, не меньших, чем  $-100$ .

**Ответ:** 101

---

**В-3** Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{4x^2 + 10x + 6} - 2x.$$

В ответе укажите число целых  $y$  из области значений, больших 1, но не превосходящих 100.

**Ответ:** 99

---

**В-4** Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{4x^2 - 10x + 4} - 2x.$$

В ответе укажите число целых  $y$  из области значений, не превосходящих 100.

**Ответ:** 104

---

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**  
Отборочный этап 2024/25 учебного года для 9 класса

---

**Задача 2**

**В-1** Сумма восьми натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

**Ответ:** 91

**Решение.** Искомый НОД является делителем каждого из восьми чисел, а значит, и их суммы  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ . При этом он не равен  $11 \cdot 13$  (и, тем более,  $7 \cdot 11 \cdot 13$ ), так как  $8 \cdot 11 \cdot 13 > 1001$ . Значение  $\text{НОД} = 7 \cdot 13$  возможно. Например, семь чисел равны  $7 \cdot 13 = 91$ , а восьмое равно  $4 \cdot 7 \cdot 13 = 364$ .

---

**В-2** Сумма шести натуральных чисел равна 455. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

**Ответ:** 65

---

**В-3** Сумма восьми натуральных чисел равна 561. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

**Ответ:** 51

---

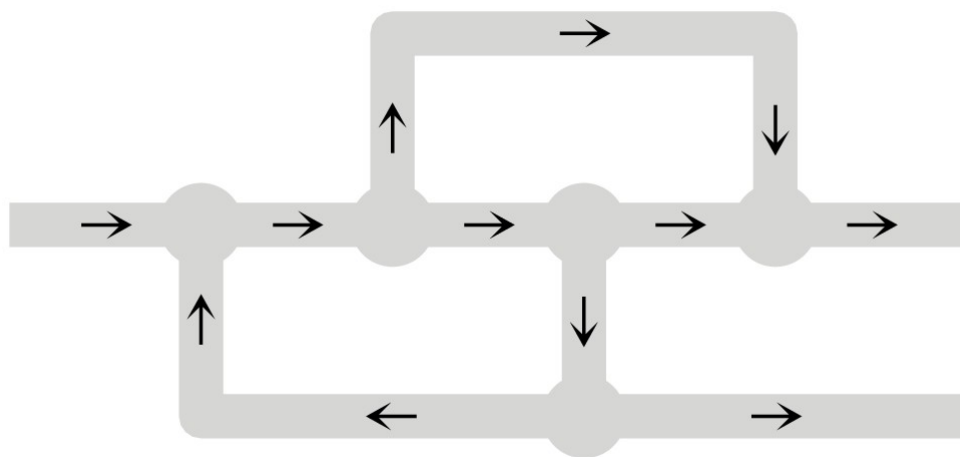
**В-4** Сумма семи натуральных чисел равна 715. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

**Ответ:** 65

---

### Задача 3

В-1

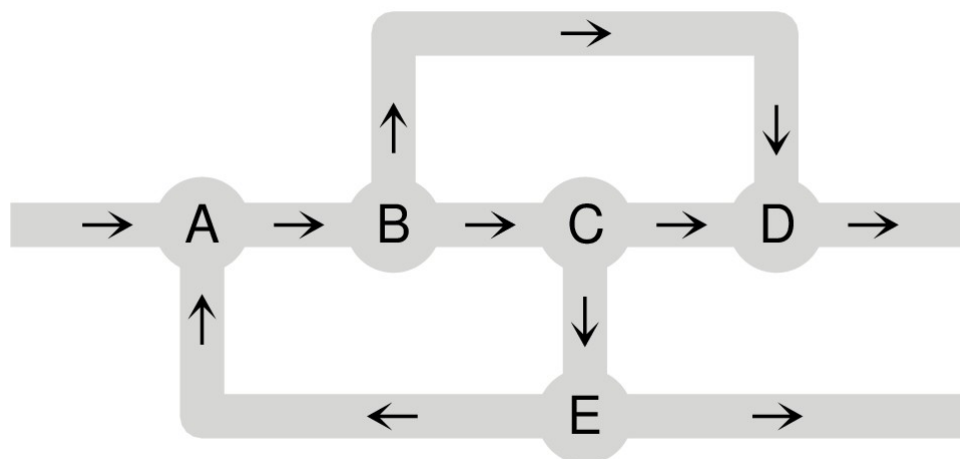


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.86

**Решение.**

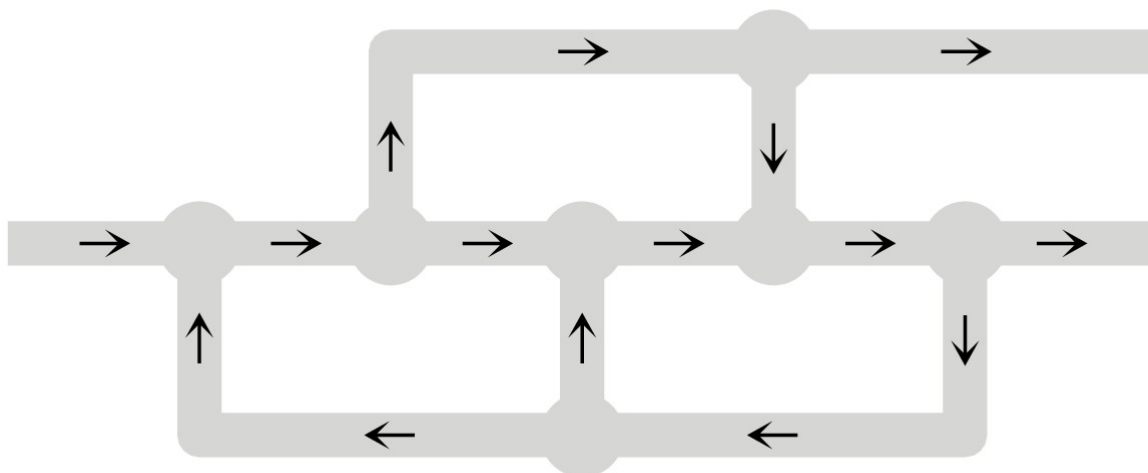


Пойдём по трубам последовательно. В клапане  $A$  к потоку извне (пусть он равен 1) прибавляется сколько-то воды от обратной петли. Сколько по ней поступает — нам пока неизвестно, поэтому обозначим добавленное количество неизвестной  $x$ . Тогда: в точке  $B$  поток разделится на  $\frac{1+x}{2}$  и  $\frac{1+x}{2}$ . В точке  $C$  приходящее разделится на  $\frac{1+x}{4}$  и  $\frac{1+x}{4}$ . В точке  $D$  сойдутся вместе  $\frac{1+x}{2}$  и  $\frac{1+x}{4}$ . В точке  $E$  поток разделяется на  $\frac{1+x}{8}$  и  $\frac{1+x}{8}$ , и здесь оказывается, что  $x = \frac{1+x}{8}$ . Откуда мы однозначно находим  $x = \frac{1}{7}$ . А исходящий поток поделится в отношении  $\frac{1+x}{2} + \frac{1+x}{4}$  к  $\frac{1+x}{8}$ , то есть

6 к 1, если упростить дроби.

---

## В-2



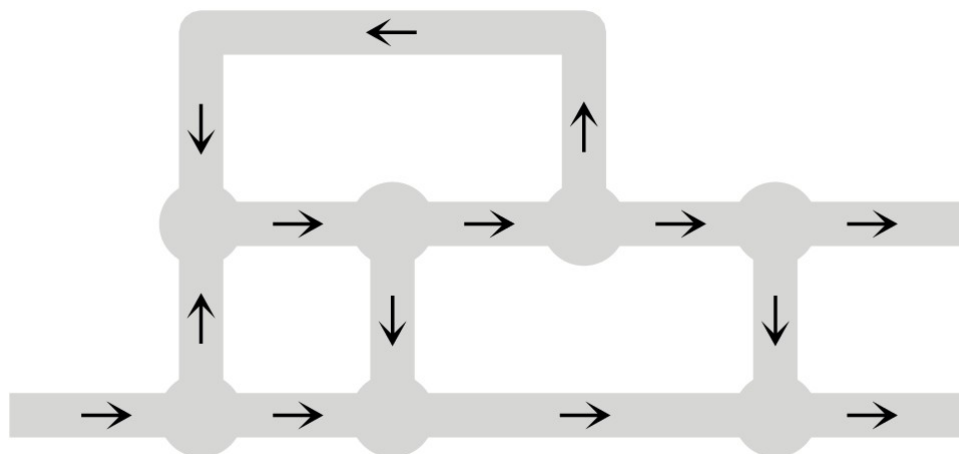
Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.33

---

## В-3



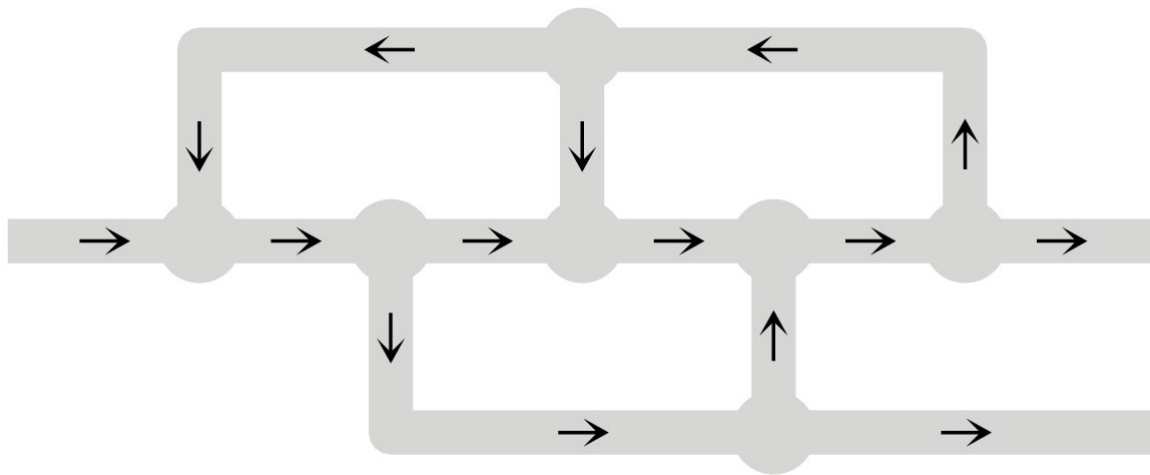
Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.08

---

## В-4



Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.67

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 9 класса

---

**Задача 4**

**В-1** Найдите десятый член последовательности  $\{a_n\}$ , если для всех  $n \geq 1$  выполняется соотношение  $a_{n+1} = 3a_n - 2$ , и при этом  $a_1 = 7$ .

**Ответ:** 118099

**Решение.** Введём  $b_n = a_n + c$ , где  $c$  — константа. Тогда

$$b_{n+1} = a_{n+1} + c = 3a_n - 2 + c = 3b_n - 2 - 2c.$$

Если взять  $c = -1$ , то получим  $b_{n+1} = 3b_n$ , то есть  $b_n$  — геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = 3$ .

Так как  $b_1 = 7 - 1 = 6$ , то получаем  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 6 \cdot 3^{n-1}$ .

Тогда  $a_n = b_n - c = 6 \cdot 3^{n-1} + 1 = 2 \cdot 3^n + 1$ .

Значит,  $a_{10} = 2 \cdot 3^{10} + 1 = 118099$ .

---

**В-2** Найдите тринадцатый член последовательности  $\{a_n\}$ , если для всех  $n \geq 1$  выполняется соотношение  $a_{n+1} = 2a_n + 3$ , и при этом  $a_1 = 14$ .

**Ответ:** 69629

---

**В-3** Найдите десятый член последовательности  $\{a_n\}$ , если для всех  $n \geq 1$  выполняется соотношение  $a_{n+1} = 3a_n - 2$ , и при этом  $a_1 = 6$ .

**Ответ:** 98416

---

**В-4** Найдите тринадцатый член последовательности  $\{a_n\}$ , если для всех  $n \geq 1$  выполняется соотношение  $a_{n+1} = 2a_n + 3$ , и при этом  $a_1 = 15$ .

**Ответ:** 73725

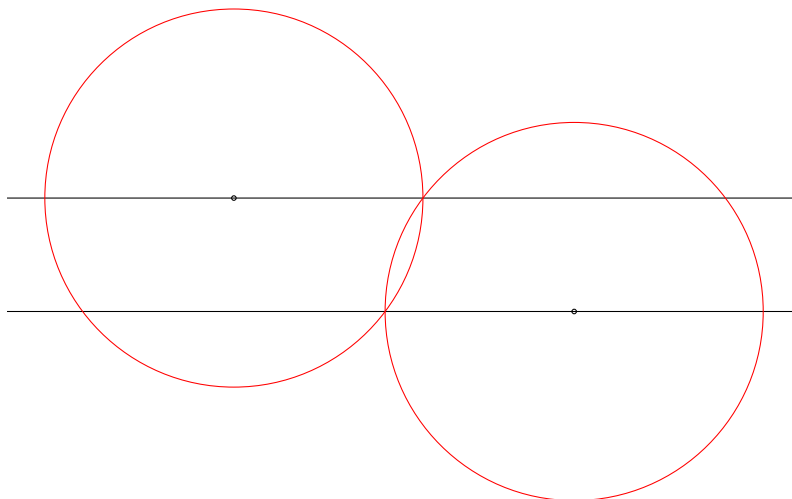
---

**Задача 5**

**В-1** Улица имеет форму полосы длины 200 м и ширины 5 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 13 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

**Ответ:** 9

**Решение.**



На своей стороне фонарь с радиусом 13 м освещает по 13 м обочины в обе стороны. Значит, на противоположной стороне он может осветить  $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$  метров обочины в обе стороны. Так или иначе, обе обочины нужно осветить полностью — один фонарь может осветить 24 + 26 метров обочин, обе обочины дают в общей сложности 400 м, так что понадобится минимум  $\frac{400}{50} = 8$  фонарей. Если у нас есть всего 8 фонарей, то общую длину обочин они освещают «впритык» — если вдруг освещение на обочинах наложится друг на друга, то общей длины уже не хватит на всю улицу. Это принуждает нас к оптимальной расстановке фонарей в «шахматном порядке» — то есть если на этой стороне есть фонарь, то через 25 метров на противоположной стороне будет стоять следующий фонарь. Отдельно взятую обочину поочерёдно освещают то фонари с этой стороны, то с противоположной — без пробелов и наложений. Будь следующий фонарь на другом расстоянии, или у другой обочины — получилось бы наложение света, или же пробел, которой бы пришлось заполнять дополнительным фонарём. Поэтому расстановка шахматная.

Само дорожное полотно с такой расстановкой тоже будет освещено полностью — с небольшими наложениями.

С такой расстановкой получится осветить по 200 метров обочины с каждой стороны всего восьмью фонарями — но эти 200 метров освещённых обочин будут сдвинуты на метр относительно друг друга. Около торца прямоугольной улицы получится небольшой неосвещённый «треугольник». Для того, чтобы осветить всю улицу, понадобится 9-й фонарь.

---

**В-2** Улица имеет форму полосы длины 320 м и ширины 8 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 17 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

**Ответ:** 11

---

**В-3** Улица имеет форму полосы длины 294 м и ширины 7 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 25 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

**Ответ:** 7

---

**В-4** Улица имеет форму полосы длины 972 м и ширины 9 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 41 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

**Ответ:** 13

---



**Задача 6**

**В-1** Сколько корней имеет уравнение

$$[-(x-2)^2] = 2x - 4,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 4

**Решение.** Точки  $x = 0, 0.5, 1.5, 2$  — это абсциссы всех точек пересечения графиков левой  $f(x)$  и правой  $g(x)$  частей, так как

$$f(0) = -4 = g(0), \quad f(0.5) = -3 = g(0.5), \quad f(1.5) = -1 = g(0.5), \quad f(2) = 0 = g(2),$$

$$f(1) = -1 > -2 = g(1), \quad f(x) < g(x), \quad x \notin [0, 2].$$

---

**В-2** Сколько корней имеет уравнение

$$[1 - (x-2)^2] = 2x - 3,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 4

---

**В-3** Сколько корней имеет уравнение

$$[2 - (x-2)^2] = 2x - 2,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 4

---

**В-4** Сколько корней имеет уравнение

$$[3 - (x-2)^2] = 2x - 1,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 4

---

**В-5** Сколько корней имеет уравнение

$$[4 - (x-2)^2] = 2x,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 4

---

**В-6** Сколько корней имеет уравнение

$$[5 - (x-2)^2] = 2x + 1,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 4

---

**В-7** Сколько корней имеет уравнение

$$[(x+2)^2] = 2x + 3,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 3

---

**В-8** Сколько корней имеет уравнение

$$[(x+2)^2 - 1] = 2x + 2,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 3

---

**В-9** Сколько корней имеет уравнение

$$[(x+2)^2 - 2] = 2x + 1,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 3

---

**В-10** Сколько корней имеет уравнение

$$[(x+2)^2 - 3] = 2x,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 3

---

**В-11** Сколько корней имеет уравнение

$$[(x+2)^2 - 4] = 2x - 1,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 3

---

**В-12** Сколько корней имеет уравнение

$$[(x+2)^2 + 1] = 2x + 4,$$

где через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ )?

**Ответ:** 3

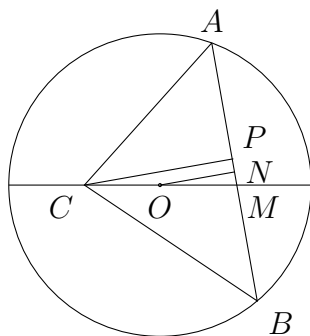
---

### Задача 7

**В-1** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $4\sqrt{3}$ . Проведена хорда  $AB$ , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ . Диаметр окружности, проходящий через вершину  $C$ , делится на четыре равных отрезка вершиной  $C$  треугольника, центром  $O$  окружности и точкой пересечения диаметра с хордой  $AB$ . Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $AB$ .

**Ответ:** 3

**Решение.**



Пусть  $M$  — точка пересечения диаметра с гипотенузой  $AB$ . Отметим, что расположение точек  $O, C, M$  на диаметре определяется однозначно — так как  $O$  обязана быть посередине.

Опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $ON$  к хорде  $AB$ . Тогда  $N$  — середина отрезка  $AB$  (так как  $ON$  — высота равнобедренного треугольника  $AOB$ ). Проведем  $CP \parallel ON$  (где  $P$  лежит на  $AB$ ) и соединим  $N$  и  $C$  отрезком прямой. Рассмотрим треугольник  $MCP$ . Отрезок  $ON$  — средняя линия треугольника, тогда  $CP = 2 \cdot ON$ . Отрезок  $CN$  — медиана в прямоугольном треугольнике  $ABC$ , следовательно  $CN = \frac{1}{2}AB = NB$ .

Пусть  $ON = x$ ,  $MN = NP = y$ ,  $CN = NB = z$ .

Тогда, так как  $OM = \frac{1}{2}R$ , из треугольников  $ONB$ ,  $CNP$  и  $OMN$  на основании теоремы Пифагора получаем:

$$\begin{cases} x^2 = R^2 - z^2, \\ (2x)^2 = z^2 - y^2, \\ x^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - y^2. \end{cases}$$

Складывая почленно первые два уравнения и затем вычитая из результата третье, находим

$$\begin{aligned} (2x)^2 &= R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2, \\ 4x^2 &= \frac{3}{4}R^2, \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{4}R. \end{aligned}$$

**В-2** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $8\sqrt{3}$ . Проведена хорда  $AB$ , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ . Диаметр окружности, проходящий через вершину  $C$ , делится на четыре равных отрезка вершиной  $C$  треугольника, центром  $O$  окружности и точкой пересечения диаметра с хордой  $AB$ . Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $AB$ .

**Ответ: 6**

---

**В-3** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $16\sqrt{3}$ . Проведена хорда  $AB$ , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ . Диаметр окружности, проходящий через вершину  $C$ , делится на четыре равных отрезка вершиной  $C$  треугольника, центром  $O$  окружности и точкой пересечения диаметра с хордой  $AB$ . Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $AB$ .

**Ответ: 12**

---

**В-4** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $32\sqrt{3}$ . Проведена хорда  $AB$ , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ . Диаметр окружности, проходящий через вершину  $C$ , делится на четыре равных отрезка вершиной  $C$  треугольника, центром  $O$  окружности и точкой пересечения диаметра с хордой  $AB$ . Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $AB$ .

**Ответ: 24**

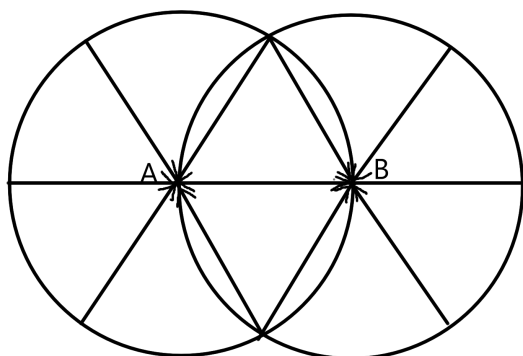
---

### Задача 8

**В-1** 50 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

**Ответ:** 10

**Решение.** (Для варианта 1, 50 человек.) Заметим, что в каждого ребенка может попасть не более 6 снежков. Так как иначе у каждого метателя найдётся другой ребенок, который окажется к нему ближе. Ровно 6 снежков ребенок может получить только в том случае, если в него стреляли дети, находящиеся в вершинах правильного шестиугольника, а подбитый находился в центре этого шестиугольника. Назовем того, кто в центре  $A$ . Он сам попал в одного из этих 6 стрелявших. Назовем второго подбитого  $B$ . Нетрудно показать, что если в  $A$  попало 6 снежков, то в  $B$  не более четырех. Поскольку было выпущено 50 снежков, а в каждого мальчика попало не более 6 снежков, то подбито не менее 9-ти детей. Если подбито ровно 9 детей, то не меньше 5-ти из них подбито 6-ю снежками. Но тогда должно быть еще 5 подбитых детей. Что противоречит противоречию, что всего 9 подбитых детей. Следовательно, снежками попали не менее чем в 10 детей. Ситуация, в которой оказывается ровно 10 детей приведена на картинке, где дети разбиваются на 5 групп по 10 человек и в каждой группе оказывается ровно двое детей, в которых попали снежком.



---

**В-2** 60 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

**Ответ:** 12

---

**В-3** 70 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

**Ответ:** 14

---

**В-4** 40 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

**Ответ:** 8

---