ЗАДАНИЯ ФИНАЛЬНОГО ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ «ЛОМОНОСОВ» ПО КОСМОНАВТИКЕ 2025

КЛАССЫ 5 И 6

Задача 1. *Пять астрономов, наблюдая за полетом небесного тела, точно уверены, что это либо комета, либо астероид, либо метеорит. Дальше, однако, мнения астрономов разошлись. Первый астроном сказал —- это либо комета, либо метеорит. Второй астроном сказал —- это не комета и не астероид. Третий астроном утверждал, что и первый и второй ошибаются. Четвертый астроном был согласен ровно с одним из первых двух, а пятый астроном был категорически не согласен с четвертым. В итоге астрономы пришли к общему мнению. В процессе обсуждения оказалось, что ровно два из первоначальных пяти предположений неверные. Какое небесное тело видели астрономы?*

Решение. Переберем три варианта: комета, астероид и метеорит. Если тело являлось кометой, то первый прав, а второй — нет. Тогда третий тоже не прав, а четвертый прав. Тогда пятый не прав. Итого, два верных заключения и три не верных — не подходит. Пусть тело являлось астероидом. Тогда первый сказал неверное утверждение, а второй верное. Тогда третий вновь ошибается, а четвертый говорит истину. Тогда пятый ошибается. Итого, снова два верных заключения и три не верных — не подходит. Разберем последний вариант — это был метеорит. Тогда первый говорит истину, второй тоже. Тогда третий не прав, четвертый тоже не прав. Но тогда пятый прав, т. е. получаем три верных заключения и два не верных — подходит.

Ответ: метеорит.

Критерии проверки: + Ответ верный, полностью обоснован.

± Ответ верный, обоснование неполное (например, рассмотрен один подходящий случай, другие не рассмотрены или рассмотрены с ошибкой).

∓ Ответ верный, обоснование содержит существенные ошибки (нет верно рассмотренного случая).

− Решение отсутствует или не имеет отношения к задаче.

Задача 2. *Температура воздуха на планете N в течении года меняется от 0 до 100 градусов по Фаренгейту. Для растений и организмов, живущих на планете, комфортной считается температура от 70 градусов включительно и выше. После получения данных за определенный период (от двух до семи дней) вычисляются отдельно среднее арифметическое значений температуры в дни с комфортной температурой и в дни, когда температура была некомфортной. Обозначим эти значения через T_1 и T_2. Однажды в процессе обработки данных произошла ошибка, в результате которой ко всем полученным значениям прибавили по 10 градусов. Поскольку ни одно значение не стало больше 100 градусов, ошибку заметили не сразу. Могло ли получиться так, что значения T_1 и T_2, полученные после обработки неверных данных, оба оказались меньше соответствующих истинных значений?*

Решение. Да, такое могло произойти: одно или несколько измерений, которые до ошибки были чуть меньше 70, стали после ошибки чуть больше. В результате первая группа измерений лишилась нескольких больших значений и среднее значение в этой группе могло уменьшиться; ко второй группе добавились малые числа, и среднее арифметическое в этой группе тоже могло уменьшиться. Остается подобрать пример. Пусть измерений было три. Одно маленькое, второе около 70, третье большое. Возьмем 5, 65 и 90. Тогда до ошибки $T_1 = \frac{5+65}{2} = 35$, $T_2 = 90$. После ошибки получаем $T_1 = 15$, $T_2 = \frac{75+100}{2} = 87,5$.

Ответ: да.

Критерии проверки:

$+$ Дан верный ответ, приведен верный пример.

$\pm$ Ответ верный, пример приведен с ошибкой.

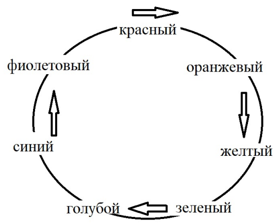
$\mp$ Неверное мнение, что такого не могла быть. Его обоснование приведено, но не учтено, что значения могли переходить из одной группы в другую.

$-$ Неверный ответ, обоснование отсутствует или содержит явно неверные предпосылки (например, отрицательные температуры).

Задача 3. *Два спутника вращаются вокруг планеты по круговым орбитам в противоположных направлениях. Один из них совершает полный оборот вокруг планеты за 6 часов, другой –– за 8 часов. Назовем их «встречей» момент, когда они оба оказываются на одном луче, исходящим из центра планеты. В некоторый момент спутники «встретились». Через сколько часов они впервые снова «встретятся» на том же луче? Сколько «встреч» произойдет между этими моментами (считая первую и последнюю)?*

Решение. Чтобы «встретиться» на том же луче, оба спутника должны совершить целое число оборотов. Значит, время до встречи (в часах) должно делиться на 6 и на 8. Наименьшее такое число 24. Теперь вычислим скорости спутников (число оборотов в час): $v_1 = \frac{1}{6}$, $v_2 = \frac{1}{8}$. Установим точку отсчета на первый спутник. Поскольку спутники вращаются в разные стороны, т.е. движутся навстречу друг другу, то скорость второго относительно первого равна $v_2 + v_1 = \frac{7}{24}$. Тогда пусть, пройденный за 24 часа равен 7 (кругов), т.е. за это время второй спутник «встретился» с первым 7 раз (считая и первую «встречу»). Учитывая последнюю, «встречу», получаем 8.
Ответ: 24 часа, 8 «встреч».
Критерии проверки: + Дан верный обоснованный ответ на оба вопроса задачи.
± Верно найдено время, количество встреч указано верно, но обоснование содержит существенные пробелы *или* логика решения верная, но получен неверный ответ (например, 48, а не 24, или не учтены первая и последняя встречи).
∓ Дан верный ответ на первый вопрос, ответ на второй вопрос принципиально неверный или отсутствует.
− Ответ неверный, обоснование отсутствует.

Задача 4. *Индикатор (животное с планеты Блук) каждый день меняет свой цвет по правилу, изображенному на рисунке. Какого цвета индикатор будет* 12 *апреля* 2181 *года, если сегодня (*1 *марта* 2025 *года) он фиолетовый?*



Решение. Изменения цвета проходят по циклу периода 7 (суток). Значит, надо найти число дней между 01.03.2025 и 12.04.2181, а затем у полученного числа найти остаток от деления на 7. Имеем $2181-2025 = 156$ (лет), т.е. $156 \cdot 365 = 56940$ (суток). Однако надо еще учесть високосность некоторых лет. Високосным является год, число которого делится на 4, но при этом не делится на 100. Таким образом, високосными будут 2028 год, 2032 год и т. д. (но кроме 2100 года). Итого получаем $156 : 4 - 1 = 38$ високосных лет. Значит, до 01.03.2181 пройдет $56940 + 38 = 56978$ суток. Добавляем 31 (мартовские дни) и 11 (апрельские дни) — получаем 57020 дней. Находим остаток от деления на 7 — он равен 5. Поскольку в начале индикатор был фиолетовым, то в конце он станет (согласно рисунку) голубым.

Ответ: голубой.

Критерии проверки: + Ответ верный, полностью обоснован.

+. Не учтено, что 2100 год не является високосным, вследствие чего ответ неверный.

$\pm$ Логика решения верная (учитываются високосные года, кроме, возможно, 2100, но ошибки в вычислениях количества смен цвета).

$\mp$ Не учитываются високосные года.

$-$ Ответ неверный, обоснование отсутствует.

Задача 5. *Алфавит жителей планеты N состоит из семи букв: «а», «ы», «э», «с», «у», «ц» и «щ». Чтобы передать сообщение по межпланетной связи, его необходимо закодировать. Был предложен следующий вариант кодирования букв а = 0, с = 10, у = 110, э = 101, ц = 1110, щ = 1001, ы = 1111. Теперь для кодирования слова остается только закодировать каждую букву и записать коды рядом. Например, слово «усы» будет иметь код* 110101111. *Покажите, что получившееся кодирование неоднозначно —- приведите пример кода, который соответствует двум разным словам (слова не обязаны иметь смысл). Предложите способ исправить алгоритм кодирования.*

Решение. Кодировка буквы «с» (кодовое слово 10) является началом кодов букв «э» и «щ», а также окончанием кодов букв «у» и «ц». Закодируем, например слово «эс» — получим код 10110, который совпадает с кодом слова «су», так что кодирование, действительно, неоднозначно. Способов исправить алгоритм множество. Например, можно удлинить коды букв, чтобы они стали одинаковой длины. Например, так: а = 0000, с = 1000, у = 1100, э = 1010. Остальные коды не меняем: ц = 1110, щ = 1001, ы = 1111. Теперь любое слово имеет код, длина которого кратна четырем. Раскодирование становится простым: разбиваем код на четверки, а затем по каждой четверке восстанавливаем букву. Например, код 1001000010001000 = 1001 0000 1000 1000 = щасс.

Критерии проверки:

\+ Приведен правильный пример с обоснованием, предложен верный метод исправления кода.

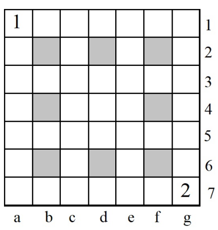
+. Приведен правильный пример с обоснованием, метод исправления кода содержит неточности.

± Пример приведен без обоснования или содержит ошибки; метод исправления верный *или* пример приведен верно, метод исправления не предложен.

∓ Пример не приведен или неверный, метод исправления не прописан полностью или содержит ошибки.

− Решение отсутствует или не имеет отношения к задаче.

Задача 6. *Поле для игры представляет собой квадрат 7×7, каждая из клеток которого либо свободна, либо является препятствием (см. рисунок, где препятствия обозначены темным цветом, а свободные клетки – белым). Два игрока перемещают по квадрату мячик ударами по горизонталям (первый игрок) и по вертикали (второй игрок). По условию, после удара мячик движется до первого препятствия или до внешней границы поля (если препятствий на пути мяча нет), после чего останавливается. Игроки ходят по очереди, начиная с первого. В свой ход игрок может нанести удар по мячу в любую из двух сторон (первый игрок – влево или вправо, а второй – вверх или вниз). Если удар в одну из сторон не возможен (мешает препятствие или внешняя стенка), то игрок обязан ударить в другую сторону. Если удар не возможен ни в одну, ни в другую сторону, то игрок пропускает ход. Первый игрок выигрывает, если мяч остановится на поле $a1$, а второй – если на поле $g7$. У кого из игроков есть выигрышная стратегия победить вне зависимости от действий противника, если в начале игры мяч стоит на поле $d4$? Что будет, если в начале мяч стоит на $d3$?*



Решение. Если мяч стоит на $d4$, то у первого игрока всегда есть способ выиграть. Для этого он бьет влево — мяч попадает на $c4$. Если теперь второй игрок бьет вверх, то мяч попадает на $c1$, после чего первый бьет влево и выигрывает. Если же второй игрок бьет вниз, то мяч попадает на $c7$. Тогда первый игрок бьет влево — мяч попадает на $a7$. Второй игрок не может бить вниз (мешает внешняя стенка) — он вынужден ударить вверх, после чего проигрывает.

Если мяч стоит на $d3$, то теперь, наоборот, у второго игрока есть выигрышная стратегия. Если первый игрок ударит вправо (мяч попадет на $g3$), то второй игрок бьет вниз и выигрывает. Если же первый игрок ударит влево (мяч попадет на $a3$), то второй игрок бьет вниз, мяч попадает на $a7$. Теперь первый игрок не может ударить влево (мешает внешняя стенка) — он вынужден ударить вправо, после чего проигрывает.

Ответ: если стартовое поле $d4$, то у первого; если стартовое поле $d3$, то у второго.

Критерии проверки: $+$ Верно описаны стратегии для каждого из двух случаев.

$\pm$ Верно описана стратегия для одного из случаев, для другого — с пробелами.

$+/2$ Верно описана стратегия для одного из случаев, про другой ничего не сказано.

$\mp$ Есть только частные случаи поведения игроков.

$-$ Решение отсутствует или не имеет отношения к задаче.

Перевод баллов:

$+$ 15 баллов

$+.$ 13 баллов

$\pm$ 10 баллов

$+/2$ 7 баллов

$\mp$ 4 балла

$-$ 0 баллов.

Итоговая оценка равна сумме баллов, умноженной на $10/9$.

КЛАССЫ 7 И 8

Задача 1. *Робот движется по следующей программе. Вначале он сдвигается на a_1 метров на восток, затем (из этой точки) на a_2 метров на север (числа a_1 и a_2 заданы в программе робота, положительны, но нам не известны). Затем робот вычисляет разность $a_3 = a_2 - a_1$ и если это число положительно, то сдвигается на a_3 метров на восток, если отрицательно — то на $-a_3$ метров на запад, а если равно нулю — остается на месте. Затем робот вычисляет разность $a_4 = a_3 - a_2$ и если это число положительно, то сдвигается на a_4 метров на север, если отрицательно — то на $-a_4$ метров на юг, а если равно нулю — остается на месте. Далее алгоритм повторяется, т. е. число $a_5 = a_4 - a_3$ отвечает за движение на восток/запад, число $a_6 = a_5 - a_4$ отвечает за движение на север/юг, и так далее. Где будет находиться робот после 2025 шагов по отношению к начальной точке?*

Решение. Введем систему координат с центром в начальной точке и осями Ox, направленной на восток, и Oy, направленной на север. В этой системе координат после первого своего хода робот окажется в точке $(a_1, 0)$, а после второго хода — в точке (a_1, a_2). На третьем ходе робот рассматривает три случая. Если число $a_3 = a_2 - a_1 > 0$, то он движется на a_3 метров на восток и попадает в точку $(a_1, a_2) + (a_3, 0) = (a_1 + a_3, a_2) = (a_2, a_2)$. Если число $a_3 = a_2 - a_1 < 0$, то робот движется на $-a_3$ метров на запад и попадает в точку $(a_1, a_2) - (-a_3, 0) = (a_1 + a_3, a_2) = (a_2, a_2)$. Наконец, если $a_3 = a_2 - a_1 = 0$, то робот стоит на месте в точке $(a_1, a_2) = (a_2, a_2)$. Итак, после третьего хода робот в любом случае окажется в точке (a_2, a_2). Дальше рассуждения повторяются: после четвертого хода робот в любом случае окажется в точке $(a_2, a_2) + (0, a_4) = (a_2, a_3) = (a_2, a_2 - a_1)$. Вообще, последовательность чисел ведет себя так:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3 = a_2 - a_1, \quad a_4 = a_3 - a_2 = -a_1,$$
$$a_5 = a_4 - a_3 = -a_2, \quad a_6 = a_5 - a_4 = a_1 - a_2, \quad a_7 = a_6 - a_5 = a_1, \quad a_8 = a_7 - a_6 = a_2, \ldots$$

Видим, что далее последовательность циклически повторяется. Таким образом, после пятого хода робот будет в точке $(a_2, a_2 - a_1) + (a_5, 0) = (0, a_2 - a_1)$, а после шестого хода — в точке $(0, a_2 - a_1) + (0, a_6) = (0, 0)$. На следующем ходе робот должен сдвинуться на $a_7 = a_1$ метров на восток, а потом — на $a_8 = a_2$ метров на север, т.е. начнет повторять уже пройденный маршрут. Итак, робот движется циклически с периодом $T = 6$. Тогда после 2025 шагов он будет в той же точке, что и после 3 шагов, поскольку остаток от деления 2025 на 6 равен 3. Попадаем в точку (a_2, a_2).

Ответ: на a_2 метров восточнее и a_2 метров севернее начальной точки.

Критерии проверки: 20 баллов — задача решена верно.

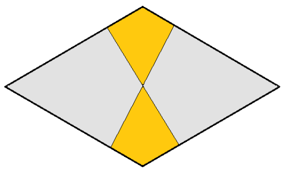
15 баллов — некритичные арифметические ошибки.

10 баллов — разобрался с перемещениями робота, но не нашел конечную точку.

5 баллов — не разобрался с перемещениями робота *или* логические ошибки.

0 баллов — задача не решена.

Задача 2. *Флаг жителей планеты Бибердорф имеет форму ромба, сторона которого равна меньшей из диагоналей. Из центра ромба проведены четыре высоты к сторонам и область между ними окрашена в золотой цвет, а остальная часть флага – в серебряный. Найдите отношение площади, окрашенной в золотой цвет, к площади, окрашенной в серебряный.*



Решение. Обозначим вершины ромба $ABCD$, где AC — большая, а BD — меньшая диагональ. Обозначим центр ромба O, а высоту из точки O к AB через OH. По условию, $AB = BD$, т.е. $AB = 2BO$. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом, так что треугольник ABO — прямоугольный с гипотенузой AB. Поскольку катет BO равен половине гипотенузы, то $\angle BAO = 30^o$. Тогда $\angle ABO = 60^o$. Треугольник BOH также прямоугольный, причем $\angle HBO = 60^o$, а значит, $\angle HOB = 30^o$. Тогда катет BH равен половине гипотенузы BO, т.е. $BH = \frac{AB}{4}$. Тогда $S_{ABO} = \frac{AB \cdot HO}{2} = \frac{4BH \cdot HO}{2} = 4S_{HBO}$. Для других трех частей флага $\triangle BCO$, $\triangle CDO$ и $\triangle DAO$ все аналогично, откуда получаем, что площадь золотой части флага равна четверти всего флага. Тогда площадь серебряной части составляет $3/4$ площади флага, т.е. отношение равно $1:3$.

Ответ: $1:3$.

Критерии проверки: 15 баллов — задача решена верно.

10 баллов — некритичные арифметические ошибки.

5 баллов — логические ошибки в рассуждениях *или* задача не доведена до конца.

0 баллов — задача не решена.

Задача 3. *Определите, каким будет угловой размер Солнца, если наблюдать его в окрестности звезды Альфа Центавра. Известно, что свет проходит расстояние от Земли до этой звезды за* $4,37$ *года, скорость света возьмите* $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с, радиус Солнца* $R = 7 \cdot 10^5$ *км.*

Решение. Угловой размер равен удвоенному тангенсу угла α между лучом, исходящим от наблюдателя к центру Солнца, и лучом от наблюдателя к краю Солнца. Этот тангенс равен отношению радиуса Солнца к расстоянию от наблюдателя до Солнца. Найдем расстояние в световых секундах $4,37 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 1,38 \cdot 10^8$ с и в метрах $d = 1,38 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^8 = 4,14 \cdot 10^{16}$. Тогда

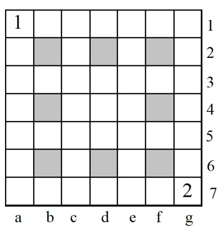
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7 \cdot 10^8 \text{ м}}{4,14 \cdot 10^{16} \text{ м}} = 1,69 \cdot 10^{-8}.$$

Поскольку тангенс мал, то угол (в радианах) можно считать равным тангенсу, т.е. $\alpha = 1,69 \cdot 10^{-8}$ рад. Удвоим угол и переведем ответ в градусы

$$2\alpha = 2 \cdot 1,69 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{180^o}{\pi} = 1,94 \cdot 10^{-6} \text{ град} = 1,94 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 60'' = 0,007''.$$

Ответ: $0,007$ угловых секунд.
Критерии проверки: 15 баллов — задача решена верно.
13 баллов — забыл умножить угол на два *или* неточно найдено количество секунд.
10 баллов — арифметические ошибки.
5 баллов — логические ошибки.
0 баллов — задача не решена.

Задача 4. *Поле для игры представляет собой квадрат* 7×7*, каждая из клеток которого либо свободна, либо является препятствием (см. рисунок, где препятствия обозначены темным цветом, а свободные клетки – белым). Два игрока перемещают по квадрату мячик ударами по горизонталям (первый игрок) и по вертикали (второй игрок). По условию, после удара мячик движется до первого препятствия или до внешней границы поля (если препятствий на пути мяча нет), после чего останавливается. Игроки ходят по очереди, начиная с первого. В свой ход игрок может нанести удар по мячу в любую из двух сторон (первый игрок – влево или вправо, а второй – вверх или вниз). Если удар в одну из сторон не возможен (мешает препятствие или внешняя стенка), то игрок обязан ударить в другую сторону. Если удар не возможен ни в одну, ни в другую сторону, то игрок пропускает ход. Первый игрок выигрывает, если мяч остановится на поле* $a1$*, а второй – если на поле* $g7$*. У кого из игроков есть выигрышная стратегия победить вне зависимости от действий противника, если в начале игры мяч стоит на поле* $d4$*? Что будет, если в начале мяч стоит на* $d3$*?*



Решение. Если мяч стоит на $d4$, то у первого игрока всегда есть способ выиграть. Для этого он бьет влево — мяч попадает на $c4$. Если теперь второй игрок бьет вверх, то мяч попадает на $c1$, после чего первый бьет влево и выигрывает. Если же второй игрок бьет вниз, то мяч попадает на $c7$. Тогда первый игрок бьет влево — мяч попадает на $a7$. Второй игрок не может бить вниз (мешает внешняя стенка) — он вынужден ударить вверх, после чего проигрывает.

Если мяч стоит на $d3$, то теперь, наоборот, у второго игрока есть выигрышная стратегия. Если первый игрок ударит вправо (мяч попадет на $g3$), то второй игрок бьет вниз и выигрывает. Если же первый игрок ударит влево (мяч попадет на $a3$), то второй игрок бьет вниз, мяч попадает на $a7$. Теперь первый игрок не может ударить влево (мешает внешняя стенка) — он вынужден ударить вправо, после чего проигрывает.

Ответ: если стартовое поле $d4$, то у первого; если стартовое поле $d3$, то у второго.

Критерии проверки: 15 баллов — задача решена верно.

10 баллов — верное решение только для одного из игроков.

5 баллов — решение неправильное *или* есть только верный ответ, без решения.

0 баллов — задача не решена.

Задача 5. *Составное число — это такое натуральное число, которое имеет хотя бы один делитель, отличный от* 1 *и самого числа. Давайте посмотрим на произведение всех составных чисел от* A *до* B *(не включая сами числа* A *и* B*). Сколько нулей может быть в конце такого произведения? Напишите программу, которая поможет вам ответить на этот вопрос.*

Ввод: натуральные числа A *и* B

Вывод: натуральное число — количество нулей в конце числа, равного произведению всех составных чисел от A *до* B*.*

Примеры
Ввод
2 10
Вывод
0
Пояснение: между числами 2 *и* 10 *заключены составные числа* 4*,* 6*,* 8 *и* 9*, произведение которых равно* 1728 *— ни одного нуля в конце этого числа нет.*
Ввод
1 13
Вывод
1
Пояснение: между числами 1 *и* 13 *заключены составные числа* 4*,* 6*,* 8*,* 9*,* 10 *и* 12*, произведение которых равно* 207360 *— заканчивается одним нулем.*

Решение. Находить произведение составных чисел, а затем считать число нулей на конце этого числа — не очень хорошая идея. Дело в том, что это произведение может оказаться очень большим числом. Если писать программу на языке C, то может произойти переполнение типа (заведомо надо использовать тип *longint* вместо *int*). Если писать программу на Python, то переполнения не произойдет — этот язык поддерживает целочисленную арифметику, но время выполнения программы будет значительным (авторы проверили работу такой программы на обычном ноутбуке — для $A = 1$, $B = 100\,000$ время выполнения составило 29 секунд).

При этом, можно предложить гораздо более простой алгоритм. Нули на конце числа получаются только при перемножении двоек и пятерок, входящих как делители в перемножаемые составные числа. Тогда достаточно посчитать число двоек, входящих в произведение, число пятерок, а затем взять минимум из этих двух чисел. Найти число четных чисел на интервале (A, B) очень легко — оно равно $\left[\frac{B}{2}\right] - \left[\frac{A}{2}\right]$ (при этом надо дополнительно вычесть 1, если интервал включает число 2 — оно не составное). Затем найдем число чисел, кратных 4 — оно равно $\left[\frac{B}{4}\right] - \left[\frac{A}{4}\right]$, затем кратных 8, и так далее, пока число не окажется равным нулю. Аналогично с пятерками. Ниже приведена программа на языке Python

```
a = int(input())
b = int(input())
deg=5
s=0
```

```
while (b//deg-a//deg>0):
   s+=b//deg-a//deg
   deg*=5
if (a<5)&(b>5): s-=1
deg=2
s1=0
while (b//deg-a//deg>0):
   s1+=b//deg-a//deg
   deg*=2
if (a<2)&(b>2): s1-=1
print(min(s,s1))
```

Критерии проверки:
Алгоритм требует работы с большими числами: вычитание 1 балла,
Медленная программа (заводится список или массив всех составных чисел): вычитание 2 баллов,
Есть синтаксические ошибки (больше двух), но легко исправимы: вычитание 3 баллов,
ИЛИ есть синтаксические ошибки, требуется доработка программы: вычитание 5 баллов,
ИЛИ Есть пробелы в алгоритме, требуется доработка программы: вычитание 10 баллов,
ИЛИ Программа не решает задачу: вычитание 17 баллов.
Нет задачи ИЛИ совсем нет продвижений: 0 баллов.

Задача 6. *Космический корабль находится в глубоком космосе, вдали от небесных тел. Действует ли на таком корабле закон Архимеда? Приведите максимально подробное объяснение.*

Решение.
Вспомним, как выводится закон Архимеда. Любой столб жидкости оказывает на дно сосуда давление, равное весу столба, деленному на площадь основания столба. Это давление перераспределяется во все стороны частицами жидкости в силу их постоянного броуновского движения. Если мы погрузим в жидкость предмет в форме параллелепипеда (для простоты), то давление на нижнюю грань будет больше, чем на верхнюю (первый столб воду выше второго). Так возникает выталкивающая сила.

Если космический корабль находится вдали от других небесных тел, то гравитационные силы пренебрежимо малы, сам корабль имеет малую массу, так что его гравитационной силой тоже можно пренебречь. В условии задачи, однако, ничего не сказано о движении корабля. Если он покоится или движется равномерно, то система является инерциальной и дополнительные силы не возникают. Если же корабль движется с ускорением (разгоняется, тормозит или поворачивает), то на борту корабля возникнут дополнительные силы, которые придадут столбу воды ненулевой вес и вызовут наличие выталкивающей силы. Так, если корабль движется по прямой с постоянным ускорением a, то вес будет равен $P = ma$, где m — масса столба воды. В этом случае закон Архимеда будет иметь классическую форму (с заменой g на a) в любой точке корабля. Если корабль вращается с постоянной угловой скоростью ω, то на расстоянии R от центра вращения возникнет центробежное ускорение $a = R\omega^2$, что вновь приведет к появлению выталкивающей силы. В этом случае закон Архимеда будет иметь классическую форму, но выталкивающая сила будет разной в разных точках корабля. **Критерии проверки:**
15 баллов — задача решена верно.
11 баллов — не рассматривается случай движения корабля *или* не объясняется, почему на космическом корабле закон действует так же.
7 баллов — не рассматривается случай движения корабля *и* не объясняется, почему на космическом корабле закон действует так же.
5 баллов — неправильный ответ при правильном понимании закона Архимеда; логические ошибки.
0 баллов — неверно понят физический смысл закона Архимеда или задача не решена.

Общая оценка равна сумме баллов

КЛАССЫ 9 И 10

Задача 1. *$P(x)$ — многочлен третьей степени вида x^3+ax^2+bx+c. Известно, что он имеет три вещественных корня, причем сумма всех его корней равна их произведению. Кроме того, известно, что $P(1)=1$. Найдите $P(2)-P(0)$.*

Решение. Пусть x_1, x_2 и x_3 — три вещественных корня многочлена $P(x)$. Тогда

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=x^3+ax^2+bx+c,$$

т. е. $a=-(x_2+x_2+x_3)$, $c=-x_1x_2x_3$, т. е. $c=a$. Далее, $P(1)=1+a+b+c=1$, откуда $b=-2a$. Тогда

$$P(2)-P(0)=8+4a+2b+c-c=8+4a+2b=8.$$

Ответ: 8.

Критерии проверки: $-$ Задача не решена.

$\mp$ Получено соотношение $a+b+c=0$ и получено, что необходимо найти значение выражения $8+4a+2b$. Дальше продвижений нет или ответ получен в неверных предположений на значения корней или коэффициентов.

$+/2$ Получено соотношение $a+b+c=0$ и получено, что необходимо найти значение выражения $8+4a+2b$. Кроме того, найдена связь одного из коэффициентов с суммой или произведением корней. Дальше продвижений нет.

$+$ Обоснованно получен верный ответ.

Задача 2. *Космонавты провели эксперимент на МКС: в плоскую чашку Петри поместили четыре посева одинаковых микроорганизмов в четыре разные точки. Колонии микроорганизмов стали расти, формируя четыре круга C_1, C_2, C_3 и C_4 одинакового радиуса. По условиям эксперимента питательная среда в чашке заполняла не всю чашку Петри, а лишь круговое кольцо с внутренним радиусом r и внешним радиусом $R = 5$ см (центры окружностей совпадают). Каким надо взять число r и как надо расположить точки посева, чтобы круги C_1, C_2, C_3 и C_4 одновременно достигли внутренней границы питательной среды, ее внешней границы и при этом еще и попарно коснулись: C_1 с C_2 и C_4; C_2 с C_1 и C_3; C_3 с C_2 и C_4; C_4 с C_3 и C_1?*

Решение. Пусть A, B, C и D — точки посева, O — центр чашки. В момент касания кругов и границ чашки имеем: AB — отрезок, соединяющий центры качающихся окружностей C_1 и C_2. По условию, радиусы этих окружностей равны, обозначим их x. Тогда $AB = 2x$. Аналогично, $BC = CD = DA = 2x$, т.е. $ABCD$ — ромб. Поскольку окружности C_j касаются в этот момент внутренней окружности, то $AO = BO = CO = DO = r + x$. Значит, $ABCD$ — вписанный ромб, т.е. квадрат, а O — центр квадрата. Тогда $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 45^o$. Из теоремы Пифагора в $\triangle ABO$ получаем $4x^2 = 2(r + x)^2$, откуда $x\sqrt{2} = r + x$, $r = x(\sqrt{2} - 1)$. Поскольку окружности C_j касаются еще и внешней окружности, то $AO = BO = CO = DO = R - x$. Тогда $R - x = r + x$, т.е. $R = x(\sqrt{2} + 1)$, $x = \frac{5}{\sqrt{2}+1}$ см, $r = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} = 5(3 - 2\sqrt{2})$ см, $AO = BO = CO = DO = r + x = 5(2 - \sqrt{2})$.
Ответ: Надо взять $r = 5(3 - 2\sqrt{2}) \approx 1$ см, а точки посева поместить в вершины квадрата с центром в центре чашки на расстоянии $5(2 - \sqrt{2}) \approx 3$ см от этого центра (посередине между внутренней и внешней окружностью).
Критерии проверки: – Задача не решена или дан только неверный ответ без обоснования.
∓ Задача решается в некотором изначально неверном предположении (о расположении или значениях радиусов) *или* только описано расположение кругов, радиус не найден.
± Есть верное представление о расположении окружностей; логическая ошибка при нахождении искомых величин.
+. Есть верное представление о расположении окружностей; арифметическая ошибка при нахождении искомых величин *или* радиус найден верно, нет ответа на вопрос о том, как должны располагаться центры окружностей.
\+ Радиус найден верно, есть описание того, как должны располагаться центры окружностей.

Задача 3. *Российский космонавт решил сыграть в гольф на поверхности Луны. Космонавт находится на Северном полюсе и запускает мяч в сторону южного полюса с начальной скоростью равной 4 км/с. Оцените, через сколько минут мяч упадет на Луну. Рельефом Луны пренебрегите.*

Решение. Найдем вторую космическую скорость для поверхности Луны: $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Луны, R — радиус Луны. Вспомним, что на поверхности Луны вес любого предмета примерно в 6 раз меньше, чем на Земле, т.е. $g_Л = \frac{g_З}{6}$. По закону тяготения $F = \frac{GMm}{R^2}$, откуда $\frac{GM}{R} = \frac{R_Л g_З}{6}$. Вспомним, что радиус Луны примерно в 4 раза меньше радиуса Земли, т.е. около 1600 км. Получаем для второй космической скорости $V_Л \approx 2$ км/с. Так как скорость мяча больше второй космической скорости, то мяч никогда не вернется на Луну.

Критерии проверки: $-$ Задача не решена или решение не имеет отношения к условию.

$\mp$ Есть попытки решения, нет понимания того, что начальная скорость больше первой космической для Луны и ускорение свободного падения не будет постоянным.

$+/2$ Есть понимание, что скорость больше первой космической, дальше ошибочные рассуждения или ответа нет.

$\pm$ Есть доказательство того, что скорость больше первой космической и отсюда сделан вывод, что мяч не вернется на поверхность, сравнения со второй космической скорости нет.

$+.$ Рассуждения в целом верные, есть арифметические ошибки.

$+$ Задача решена верно.

Задача 4. *В ходе своего орбитального движения Юпитер время от времени затмевает различные звезды с точки зрения наблюдателя на Земле. Оцените приблизительно время покрытия звезды Юпитером, если Юпитер находится в противостоянии, а покрытие (затмение) началось и закончилось в экваториальной области Юпитера.*

Решение. Период обращения Юпитера вокруг Солнца равен $11,86$ лет, т.е. $T_1 = 11,862 \cdot 365,2422 \cdot 86400 = 374\,265\,143$ сек. Период обращения Земли вокруг Солнца равен 1 год, т.е. $T_2 = 365,2422 \cdot 86400 = 31\,556\,926$ сек.При этом, Земля и Юпитер вращаются в одном направлении по окружностям (эксцентриситетом орбит: $0,05$ для Юпитера и $0,02$ для Земли, можно пренебречь), лежащим в одной плоскости (наклонением в $1,3^o$ можно пренебречь). Тогда синодический период Юпитера при наблюдении с Земли равен $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \approx 34\,464\,000$ сек. Отсюда вычисляем угловую скорость вращения Юпитера для наблюдателя с Земли $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Остается найти угловой диаметр Юпитера при наблюдении с Земли в момент противостояния. Диаметр Юпитера равен примерно 71492 км, а расстояние от Юпитера до Земли в момент противостояния равно разности радиусов их орбит, т.е. $7,785 \cdot 10^8 - 1,496 \cdot 10^8 = 6,289 \cdot 10^8$ км. Отсюда угловой размер равен $\alpha \approx \frac{2 \cdot 7,149 \cdot 10^4}{6,289 \cdot 10^8} = 2,28 \cdot 10^{-4}$ рад. Время покрытия звезды Юпитером равно времени, за которое он пройдет свой угловой размер, т.е. $t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{2,28 \cdot 10^{-4} \cdot 3,446 \cdot 10^7}{2\pi} \approx 1247$ сек.
Ответ: 20 минут 47 секунд. Или близкий ответ с учетом округления и возможного использования среднего радиуса и других усредненных величин.
Критерии проверки: $-$ Задача не решена или решение не имеет отношения к условию.
$\mp$ Есть представление о том, как нужно вычислить время покрытия, ответ неверный или отсутствует, обоснования нет или оно содержит грубые ошибки.
$+/2$ Не учтено вращение Земли *или* не получено числовое значение времени покрытия.
$\pm$ Вращение Земли учтено с ошибкой: вычитаются линейные скорости, а не угловые или неверная формула для разности угловых скоростей.
+. Формула верная, есть арифметические ошибки или подставлено неверное значение (например, радиуса Юпитера).
+ Задача решена верно.

Задача 5. *Долгими орбитальными вечерами космонавт Василий перебирает карточки с буквами и составляет из них слова. Составив очередное слово, космонавт Василий пытается понять, сколько других слов (не обязательно осмысленных) можно составить из букв этого слова. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, находящую ответ на этот вопрос.*
Входные данные.
Вводится слово, строка из маленьких латинских букв не длиннее 15 символов.
Выходные данные.
Выведите одно целое число – искомое количество слов.
Пример
Входные данные
solo
Выходные данные
34
Пояснение. Можно составить слова s, o, l, so, sl, ol, oo, lo, os, ls, sol, slo, ols, osl, los, lso, soo, oso, oos, olo, ool, loo, solo, sloo, sool, osol, oslo, ools, oosl, olos, olso, lsoo, loso, loos.

Решение: Если использовать полный перебор, то решение простое. Однако сложность алгоритма такова, что за приемлемое время он работает только для слов с ≤ 12 букв. Функция *permutations* составляет список из всех выборок длины i. Функция *set* удаляет повторы в списке.

```
from itertools import permutations
s=input()
print(sum((len(set(permutations(s,i))) for i in range(1,len(s)+1))))
```

На самом деле, можно предложить алгоритм почти линейной сложности, например, основанный на построении суффиксного дерева.

Критерии проверки:
Задачи нет: 0
Алгоритм не доведен до кода ИЛИ неверная логика: от 1 до 3
Ошибки в логике И/ИЛИ ошибки в синтаксисе: от 4 до 8
Верно работает после исправления: 10
Работает верно, но факториальная сложность (перебор): 12
Обход перебора, работает верно: 14 или 15.

Задача 6. *Климат нашей планеты в основном определяется тепловым равновесием, связанным с поглощением солнечного света и его переизлучением в космическое пространство в более длинноволновой, инфракрасной области спектра. Найдите равновесную температуру Земли $T_{Зр}$, если заданы: эффективная (соответствующая приближению абсолютно черного тела) температура Солнца $T_C = 5780$ К; радиус Солнца $R_C = 6,96 \cdot 10^5$ км; среднее расстояние Земли от Солнца (астрономическая единица) $a = 1,496 \cdot 10^8$ км; интегральное сферическое альбедо Земли (альбедо Бонда) $A_З = 0,306$ (отношение всего отраженного, в том числе атмосферой, излучения Солнца к полному падающему на Землю потоку солнечного излучения). Орбиту Земли считайте круговой. Примите, что атмосфера и гидросфера Земли обеспечивают полное выравнивание температуры по поверхности.*

Сравните полученное значение $T_{Зр}$ с известным средним значением температуры поверхности Земли, равным $+14^o$. Чем можно объяснить расхождение в этих значениях? Предложите максимально подробное объяснение.

Решение: Поскольку спектр излучения Солнца близок к спектру излучения абсолютно чёрного тела (как и большинства нагретых тел, включая Землю, для которой степень черноты — около 0,96), то плотность потока солнечного излучения может быть выражена с помощью закона Стефана–Больцмана. На расстоянии орбиты Земли данная плотность потока (солнечная постоянная) с учётом её падения пропорционально квадрату расстояния: $E = \sigma T_{\text{С}}^4 (R_{\text{С}}/a)^2$, где σ — постоянная Стефана-Больцмана. Полная энергия, поглощенная поверхностью планеты, будет зависеть от альбедо Бонда, а также площади поглощающей поверхности. При этом необходимо учитывать угол падения излучения на разные участки поверхности, но в среднем можно считать, что полная поглощающая площадь — это площадь миделя, т.е. $S_{\text{погл}} = \pi R_{\text{З}}^2$. Тогда полная поглощенная мощность: $E_{\text{погл}} = S_{\text{погл}} * (1 - A_{\text{З}})E$. Поскольку принято, что благодаря теплопереносу и тепловой инерции температура поверхности Земли везде практически одинакова, то полная, излучаемая всей поверхностью Земли мощность: $E_{\text{изл}} = \sigma T_{\text{Зр}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{З}}^2$. Приравняв $E_{\text{погл}}$ и $E_{\text{изл}}$ (условие энергетического баланса без учета других источников энергии, помимо солнечной), после арифметических преобразований получим формулу для равновесной температуры Земли:

$$T_{\text{Зр}} = T_{\text{С}} \cdot \sqrt{\frac{R_{\text{С}}}{2a}} \cdot (1 - A_{\text{З}})^{1/4}.$$

Подставив в полученную формулу исходные данные, рассчитаем температуру: $T_{\text{Зр}} \approx 255\ K = -18^oC$.

Полученное значение температуры заметно меньше средней температуры Земли (на 32 градуса). Указанная температурная разность обусловлена, прежде всего, парниковым эффектом. Снижение концентрации углекислого газа и метана в атмосфере Земли ниже критического уровня может привести к глобальному оледенению («Земля-снежок»).

Критерии проверки: Максимум 20 баллов.
Нет объяснения, почему надо брать площадь миделя: вычитание 3 баллов.
ИЛИ вместо площади миделя взята площадь поверхности: вычитание 5 баллов.
Есть ошибки в формулах: вычитание 7 или 8 баллов.

ИЛИ арифметическая ошибка, сильно изменившая ответ: вычитание 2 баллов.
Равновесная температура не получена: вычитание 8 баллов.
ИЛИ нет понимания теплового баланса ИЛИ нет решения первой части: вычитание 10 баллов.
Объяснение во второй части верное (присутствует), но в ряду других и не считается главным: вычитание 2 баллов.
Объяснение парникового эффекта сжатое или его действие понижает температуру: вычитание 3, 4 или 5 баллов.
Какие–то доводы есть, но правильного нет: вычитание 8 баллов.
Вторая часть не решена: вычитание 10 баллов.

КЛАСС 11

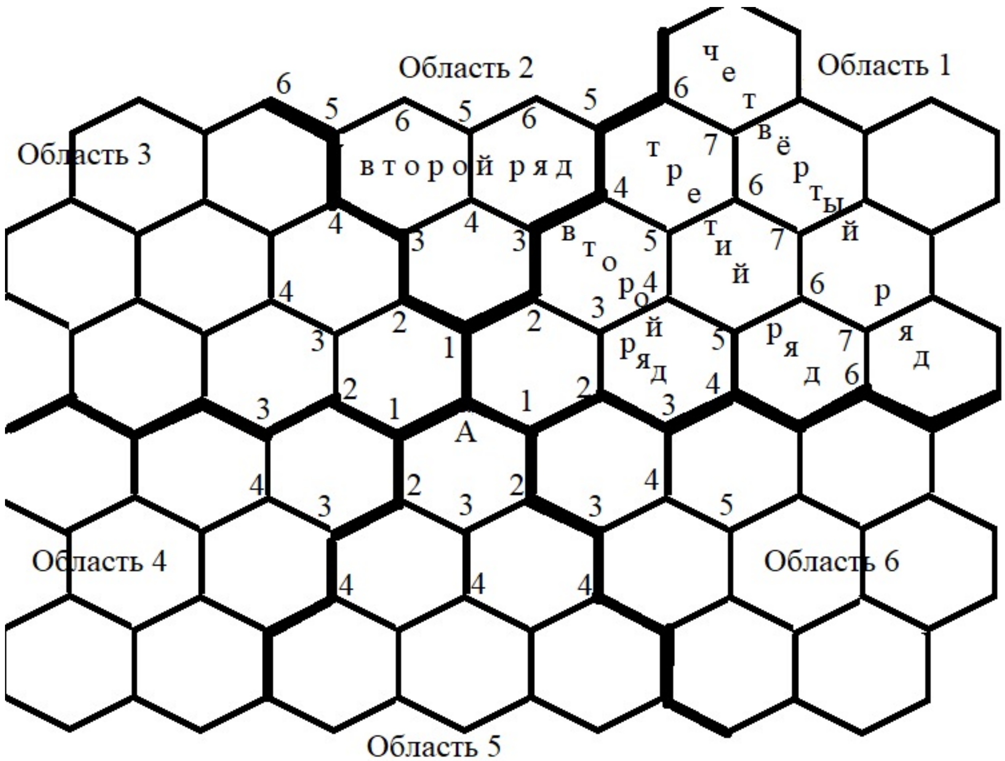
Задача 1. *Найдите все такие тройки a, b, c чисел, у которых среднее арифметическое $(a+b+c)/3 = -1$, среднее геометрическое $\sqrt[3]{abc} = 2$, а среднее гармоническое $\dfrac{3}{1/a+1/b+1/c} = -4$.*

Решение. Упростим последнее равенство: $\dfrac{3abc}{bc+ac+ab} = -4$, откуда $ab+ac+bc = -6$. Составим многочлен $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ — тогда a, b и c являются его корнями. При этом,

$$P(x) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc = x^3+3x^2-6x-8 = (x^3-8)+3x(x-2) =$$
$$= (x-2)(x^2+2x+4+3x) = (x-2)(x^2+5x+4) = (x-2)(x+1)(x+4).$$

Таким образом, $\{a,b,c\} = \{-4,-1,2\}$.
Ответ: любые перестановки тройки чисел $\{-4,-1,2\}$.
Критерии проверки:
1 — минимальные продвижения
2 — составлена система (сумма, произведение, попарные произведения)
3 — угадана тройка, ответ без перестановок
5 — ответ угадан, единственность не доказана
5 — сведено к кубическому уравнению одной переменной, которое не удалось решить
10 — верно
штраф 1 за арифметическую ошибку.

Задача 2. *На плоскость нанесена сетка, ячейками которой являются правильные шестиугольники. От одного узла сетки до другого можно перемещаться только по линиям сетки. Найдите наибольшее возможное отношение длины кратчайшего пути от узла A до узла B (по сетке) к длине отрезка AB.*



Решение:

Повернем плоскость так, чтобы точка A была расположена так, как изображено на рисунке (расстояния при повороте не меняются). Зададим масштаб, взяв длину стороны ячейки 1. Разобьем всю плоскость на шесть областей, точка B лежит в одной из них. Видим, что области 1, 3 и 5 аналогичны друг другу (отличаются поворотом плоскости), так же как области 2, 4 и 6. Итак, достаточно рассмотреть области 1 и 2.

В первой области занумеруем ряды ячеек $n = 1, 2, 3, \ldots$. Узлы сетки, лежащие на границе n–го и $n+1$–го ряда занумеруем числом $k = 0, 1, \ldots, n$ (снизу вверх). Для каждого узла найдем расстояние до точки A по линиям сетки — видим, что оно равно $2n$ для четных k и $2n+1$ для нечетных. Найдем координаты узлов на каждой границе: $((n-k/2)\sqrt{3}, 3k/2)$ для четных k и $((n-k/2)\sqrt{3}, 3k/2+1)$ для нечетных. Исследуем дробь (отношение длины пути по линиям сетки к длине отрезка) на максимум по n и k. В первом случае получаем

$$\frac{2n}{\sqrt{3(n-k/2)^2 + 9k^2/4}} \longrightarrow max.$$

Разделим на n и обозначим $x = k/n \in [0,1]$. Получим задачу $\frac{2}{\sqrt{3(1-x+x^2)}} \longrightarrow max$, откуда

$x = 1/2$, максимум равен $2/\sqrt{3}$. Во втором случае получаем задачу

$$\frac{2n+1}{\sqrt{3(n-k/2)^2+(3k/2+1)^2}} \longrightarrow max.$$

Разделим на $n + 1/2$, обозначим $x = k/(n+1/2) \in [0,1]$ и получим задачу $\frac{2}{\sqrt{3(1-x/2)^2+(3x/2-1/(2n+1))^2}} \longrightarrow max$. Видим, что увеличение n лишь уменьшает дробь, так что берем $n = 1$. Находя минимум параболы по x, получим $x = 2/3$, максимум равен $3/2$.

В области 2 рассуждения аналогичны — разделим узлы сетки на уровни с номерами $n = 1, 2, \ldots$, на каждом уровне занумеруем ячейки числами $k = -n, -n+1, \ldots, n$ (слева направо). Расстояние от A до узлов сетки равно $2n$ для четных k и $2n-1$ для нечетных. Координаты точек получаются $(-n+k, 3n/2-1/2)$ для четных k и $(-n+k, 3n/2-1)$ для нечетных. Вновь получим две задачи на максимизацию

$$\frac{2n}{\sqrt{(-n+k)^2+(3n-1)^2/4}} \longrightarrow max, \qquad \frac{2n-1}{\sqrt{(-n+k)^2+(3n/2-1)^2}} \longrightarrow max.$$

В обоих случаях максимум не достигается, но выражение не превосходит своего значения при $k = 0$ и $n \to +\infty$, которое равно $4/3$ в обоих случаях.

Выбирая максимум из $2/\sqrt{3}$, $3/2$ и $4/3$, получаем $3/2$. Это значение достигается, если A и B лежат на границе одной ячейки и диаметрально противоположны друг другу.

Ответ: $1,5$

Критерии проверки:

1 — рассмотрен какой-то один частный случай

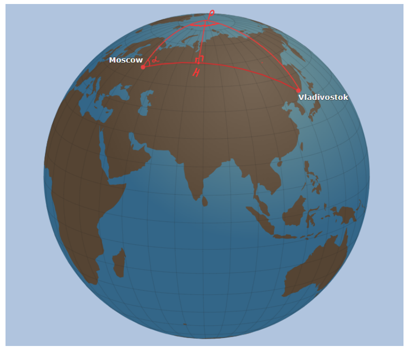
2 — изучены случай, когда точки в одном шестиугольнике

4 — есть верный ответ и есть попытки обосновать оптимальность

5 — рассматривается какой-то один из общих видов траекторий, есть верный ответ, есть попытки обосновать оптимальность

8 — потерян какой-то случай из траекторий общего вида, получен верный ответ

10 — полное верное решение.



Задача 3. *Для составления аэрофотокарт из Москвы* ($55,7^o$ *с. ш. и* $37,5^o$ *в.д.) во Владивосток* (43^o *с. ш.* $131,5^o$ *в. д) вылетел самолет. Самолет летел на высоте* 5 *км, внизу него была закреплена камера с квадратной матрицей размером* 25 *на* 25 *мм и фокусным расстоянием* 100 *мм. Найдите количество снимков, сделанных во время всего полета. Снимки не накладываются друг на друга и расположены без пропусков.*

Решение: Кратчайшее расстояние между двумя точками на сферической поверхности, измеренное на поверхности, – это расстояние вдоль большого круга через эти точки. Мы можем использовать теорему синусов и косинусов, так как все стороны треугольников это дуги больших кругов. Рассмотрим треугольник MPV (здесь M — Москва, V — Владивосток, P — Северный полюс):
По сферической теореме косинусов:

$$\cos(MV) = \cos(MP)\cos(PV) + \sin(MP)\sin(PV)\cos(\Delta\lambda)$$

$$\cos(MV) = \cos(90^o - \varphi_{msk})\cos(90^o - \varphi_{vl}) + \sin(90^o - \varphi_{msk})\sin(90^o - \varphi_{vl})\cos(\Delta\lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$MV \approx 57,7^o$$

Найдем длину данного пути

$$l = \frac{MV}{360^o} \cdot 2\pi(R+h) \approx 6445 \text{ км}$$

Поле зрения камеры: $\angle\beta = \arctan\left(\frac{d}{2f}\right) \approx 0,124$ радиана.
Таким образом, один снимок захватывает квадратную область со стороной $a = 2h\tan\beta = 1,25$ км
Значит, всего необходимо снимков $N = \frac{l}{a} = 5156$
Ответ: примерно 5156 снимков.
Критерии проверки. Максимальный балл 10.
Арифметическая ошибка при подсчете длины пути: минус 2.
Арифметическая ошибка при подсчете площади снимка: минус 2.
Снимки расположены ромбами: минус 2.
Принципиальная ошибка при подсчете длины пути: минус 4.
Принципиальная ошибка при подсчете площади снимка: минус 4.

Нет подсчета длины пути: минус 5.
Нет подсчета размера снимка: минус 5.
Задачи нет = 0.

Задача 4. *Марсианская экспедиция высадилась и основала обитаемую базу на экваторе. Для обеспечения связи на стационарную круговую экваториальную орбиту Марса (ареостационарную орбиту) был выведен спутник, точка стояния которого находится строго над базой. Проверьте, может ли Фобос или Деймос (естественные спутники Марса), двигаясь по своей орбите, оказаться на отрезке между спутником связи и базой (считайте, орбиты Фобоса и Деймоса круговыми экваториальными с радиусами $r_Ф = 9377,2$ км и $r_Д = 23458$ км). Если может, то на какое максимальное время может пропасть связь между спутником и базой? Средний диаметр Фобоса $D_Ф = 22,2$ км, Деймоса — $D_Д = 12,4$ км. Период обращения Марса вокруг своей оси $T_M = 24$ ч $37,5$ минут, масса Марса $_M = 6,45 \cdot 10^{23}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$м^{3}с$^{-2}$кг$^{-1}$. Экваториальный радиус Марса $R_M = 3396,2$ км.*

Решение: Радиус орбиты спутника равен $R = \sqrt[3]{\dfrac{T^2GM}{4\pi^2}}$, где T — период обращения, а M — масса планеты. Таким образом, радиус ареостационарной орбиты равен

$$R = \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 60^2 + 37,5 \cdot 60)^2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 6,45 \cdot 10^{23}}{4\pi^2}} \approx 20\,463,5 \text{ км},$$

что больше радиуса орбиты Фобоса, но меньше радиусы орбиты Деймоса. Таким образом, создать проблемы связи может только Фобос.

Период обращения Фобоса вокруг Марса: $T_\Phi = 2\pi R_\Phi^{3/2}(GM_\text{М})^{-1/2} \approx 27499$ с, т.е. 7 ч 38 минут 19 с. Соответственно, Фобос обгоняет Марс в осевом вращении (в результате восходит на западе и садится на востоке). Угловая скорость движения Фобоса по марсианскому небу (относительно центра Марса) составит:

$$\lambda = \frac{2\pi}{T_\Phi} - \frac{2\pi}{T_\text{М}} \approx 0,000158\text{с}^{-1}.$$

Соответственно, максимальное время пропадания связи (затмения), при котором спутник связи пройдет за Фобосом практически по его диаметру, составит: $T_\text{зат} = \frac{\theta}{\lambda}$, где θ — видимый угловой диаметр Фобоса при наблюдении из центра Марса. Поскольку по условиям задачи затмеваемый спутник связи находится в зените, то данная величина рассчитывается по формуле: $\theta = \frac{D_\Phi}{r_\Phi} \approx 0,0024$ рад. Таким образом, время затмения составит $T_\text{зат} = \frac{\theta}{\lambda} \approx 15,0$ с.

Ответ: проблемы может составить Фобос, время помех связи не превысит 15 с.

Критерии проверки. Максимум 10 баллов.

Небольшие отклонения от верного: минус 1 балл.

Не выписан радиус орбиты: минус 1 балл.

Большие отклонения из–за арифметических ошибок: минус 3 балла.

Угловой размер взять для наблюдателя на поверхности, а скорость — для наблюдателя в центре: минус 3 балла.

Взята разность скоростей, а не угловых скоростей: минус 5 баллов.

Задачи нет или нет продвижений = 0.

Задача 5. *Строка называется палиндромом, если она читается одинаково как слева направо, так и справа налево. Например, строки abba, ata являются палиндромами.*

Дана строчка. Ее подстрокой называется некоторая непустая последовательность подряд идущих символов. Напишите программу, которая определит, сколько различных подстрок данной строки является палиндромами. Любая подстрока из одного символа считается палиндромом.
Входные данные: одна строка, состоящая из маленьких латинских букв. Длина строки не превышает 100000 *символов.*
Выходные данные: одно число — количество подстрок данной строки, являющихся палиндромами
Пример
Входные данные
ababa
Выходные данные
5
Пояснение. В строке есть палиндромы a,b,a,b,a,aba,bab,aba,ababa. Из них 5 различных.

Решение:
Программа на Python

```
m = set()
s = input()
for i in range (len(s)):
   for j in range (i, len(s)):
      x = s[i:j+1]
      if x == x[::-1]:
         m.add(x)
print(len(m))
```

Программа на C

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>
#include <set>

using namespace std;
typedef long long ll;
ll p[100100];
const ll MOD = 1e9+7;
const ll q = 257;

ll getHs(vector<ll>& Hs, int l, int r){
 return (Hs[r+1] - Hs[l]*p[r-l]%MOD + MOD)%MOD;
}
```

```
ll getrevHs(vector<ll>& rHs, int l, int r){
 return (rHs[l] - rHs[r+1]*p[r-l]%MOD + MOD)%MOD;
}

void initP(){
 p[0] = 1;
 for(int i = 1; i <100100; i++)
 p[i] = (p[i-1]*q)%MOD;
}

int main()
{
 string str; cin >>str;
 initP();
 int n = str.length();
 vector<ll> Hs(n+1), rHs(n+1);
 set<ll> st;
 Hs[0] = rHs[n] = 0;
 for (int i = 1; i <= n; i++)
 {
  Hs[i] = (Hs[i-1]*q % MOD + str[i-1])%MOD;
 }
 for (int i = n-1; i >= 0; i--)
 {
  rHs[i] = (rHs[i+1]*q % MOD + str[i])%MOD;
 }
 for (int l = 0; l < n; l++)
 for (int r = l; r < n; r++)
 if (getHs(Hs, l, r) == getrevHs(rHs, l, r))
 st.insert(getHs(Hs, l, r));
 cout << st.size();
 return 0;
}
```

Критерии проверки: Верное решение: 10
Ввод/ вывод не в соответствии с условием или несущественные опечатки: 9.
Есть существенные опечатки или неверный синтаксис в программе, но алгоритм верный: 7 или 8.
Программа работает верно не для всех входных данных, либо верный алгоритм при некорректной реализации: 5 или 6.
Решение не в виде кода, алгоритм решения задачи явно не указан: 2 или 3.
Указан ответ для других выходных данных, либо решение не связано с задачей, но является кодом: 1.

Задача 6. *Климат нашей планеты в основном определяется тепловым равновесием, связанным с поглощением солнечного света и его переизлучением в космическое пространство в более длинноволновой, инфракрасной области спектра. Найдите равновесную температуру Земли $T_{Зр}$, если заданы: эффективная (соответствующая приближению абсолютно черного тела) температура Солнца $T_C = 5780$ К; радиус Солнца $R_C = 6,96 \cdot 10^5$ км; среднее расстояние Земли от Солнца (астрономическая единица) $a = 1,496 \cdot 10^8$ км; интегральное сферическое альбедо Земли (альбедо Бонда) $A_З = 0,306$ (отношение всего отраженного, в том числе атмосферой, излучения Солнца к полному падающему на Землю потоку солнечного излучения). Орбиту Земли считайте круговой. Примите, что атмосфера и гидросфера Земли обеспечивают полное выравнивание температуры по поверхности.*

Сравните полученное значение $T_{Зр}$ с известным средним значением температуры поверхности Земли, равным $+14^o$. Чем можно объяснить расхождение в этих значениях? Предложите максимально подробное объяснение.

Решение: Поскольку спектр излучения Солнца близок к спектру излучения абсолютно чёрного тела (как и большинства нагретых тел, включая Землю, для которой степень черноты — около 0,96), то плотность потока солнечного излучения может быть выражена с помощью закона Стефана–Больцмана. Плотность излучения равна $j = \sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана-Больцмана. Тогда общая энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени равна $E_{\text{С}} = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_{\text{С}}^2$. Площадь сферы радиуса a (величина орбиты Земли) равна $4\pi a^2$, а значит через единицу площади проходит энергия равная $E = E_{\text{С}}/(4\pi a^2) = \sigma T_{\text{С}}^4 R_{\text{С}}^2/a^2$. Полная энергия, поглощенная поверхностью планеты, будет зависеть от альбедо Бонда, а также площади поглощающей поверхности. При этом необходимо учитывать угол падения излучения на разные участки поверхности: поток через участок пропорционален площади проекции участка на плоскость, перпендикулярную направлению потока. Проектирую освещенную Солнцем половину Земли на плоскость, перпендикулярную потоку, получим круг радиуса $R_{\text{З}} = 6400$ км. Значит, полная поглощающая площадь — это площадь миделя, т.е. $S_{\text{погл}} = \pi R_{\text{З}}^2$. Тогда полная поглощенная энергия:

$$E_{\text{погл}} = S_{\text{погл}} \cdot (1 - A_{\text{З}})E = \frac{\pi R_{\text{З}}^2 (1 - A_{\text{З}}) \sigma T_{\text{С}}^4 R_{\text{С}}^2}{a^2}.$$

Поскольку принято, что благодаря теплопереносу и тепловой инерции температура поверхности Земли везде практически одинакова, то полная, излучаемая всей поверхностью Земли мощность: $E_{\text{изл}} = \sigma T_{\text{Зр}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{З}}^2$. Приравняв $E_{\text{погл}}$ и $E_{\text{изл}}$ (условие энергетического баланса без учета других источников энергии, помимо солнечной), после арифметических преобразований получим формулу для равновесной температуры Земли:

$$T_{\text{Зр}} = T_{\text{С}} \cdot \sqrt{\frac{R_{\text{С}}}{2a}} \cdot (1 - A_{\text{З}})^{1/4}.$$

Подставив в полученную формулу исходные данные, рассчитаем температуру: $T_{\text{Зр}} \approx 254\ K = -19^o C$.

Полученное значение температуры заметно меньше средней температуры Земли (на 33 градуса). Указанная температурная разность обусловлена, прежде всего, парниковым эффектом. Снижение концентрации углекислого газа и метана в атмосфере Земли ниже критического уровня может привести к глобальному оледенению («Земля-снежок»).

Критерии проверки: Максимум 20 баллов.

Нет объяснения, почему надо брать площадь миделя: вычитание 3 баллов.

ИЛИ вместо площади миделя взята площадь поверхности: вычитание 5 баллов.

Есть ошибки в формулах: вычитание 7 или 8 баллов.

ИЛИ арифметическая ошибка, сильно изменившая ответ: вычитание 2 баллов.

Равновесная температура не получена: вычитание 8 баллов.

ИЛИ нет понимания теплового баланса ИЛИ нет решения первой части: вычитание 10 баллов.

Объяснение во второй части верное (присутствует), но в ряду других и не считается главным: вычитание 2 баллов.

Объяснение парникового эффекта сжатое или его действие понижает температуру: вычитание 3, 4 или 5 баллов.

Какие–то доводы есть, но правильного нет: вычитание 8 баллов.

Вторая часть не решена: вычитание 10 баллов.