ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «ЛОМОНОСОВ» ПО КОСМОНАВТИКЕ 2024

РАЗМИНКА

КЛАССЫ 5 И 6

Задача 1. *Константин Эдуардович Циолковский справедливо считается теоретиком космонавтики. В своих работах он предложил много разнообразных идей. Что он предложил необычного для доставки грузов на орбиту кроме многоступенчатых ракет («ракетных поездов»)?*

A. *Использование дирижаблей*

B. *Самолет*

C. ***Космический лифт***

D. *Зенитные орудия*

E. *Левитацию*

Задача 2. *Какая планета земной группы в Солнечной системе самая большая?*

A. *Солнце*

B. *Юпитер*

C. *Сатурн*

D. ***Земля***

E. *Венера*

Задача 3. *Как называется характеристика отражающей способности поверхности?*

A. *Терминатор*

B. ***Альбедо***

C. *Пиктедо*

D. *Спектр*

E. *Поляризация*

Задача 4. *На Луне человек оставил следы на поверхности. Как долго они там будут оставаться и почему?*

A. ***Очень долго, потому что у Луны нет атмосферы, и нет ветра или осадков, которые могут стереть следы***

B. *Они уже стерлись от пылевых бурь, которые часто бывают на Луне*

C. *Следы на Луне стираются за 50–60 лет от космической пыли и космических лучей*

D. *Их теперь не найдешь из–за постоянной бомбардировки Луны метеоритами*

E. *На самом деле никаких следов на Луне никогда не было — это знаменитая Лунная афера*

Задача 5. *В октябре 1959 году советский спутник сфотографировал обратную сторону Луны. Что было сделано впервые в мировой практике для облета Луны спутником?*

A. *Съемка небесного тела с борта спутника*

B. *Впервые была достигнута вторая космическая скорость*

C. ***Впервые был применен гравитационный маневр***

D. *Впервые были включены двигатели на орбите Луны*

E. *Впервые была превышена вторая космическая скорость*

Задача 6. *Почему при запуске спутников на орбиту почти все ракеты летят на восток?*

A. *На востоке больше мест для падения ступеней ракет*

B. *Используются попутные воздушные потоки*

C. ***Используется вращение Земли для экономии топлива***

D. *Для секретности: чтобы не пролетать над Западной Европой на низкой высоте*

E. *Это не так: ракеты стартуют на запад так же часто, как и на восток*

Задача 7. *Как различается средняя плотность планет Солнечной системы?*

A. *Чем ближе планета к Солнцу, тем больше ее плотность*

B. *Чем ближе планета к Солнцу, тем меньше ее плотность*

C. *Все планеты Солнечной системы имеют примерно одинаковую плотность*

D. *Чем больше радиус планеты, тем меньше ее плотность*

E. ***Планеты Земной группы более плотные, чем ледяные и газовые гиганты***

Задача 8. *От чего зависит наличие или отсутствие смены времен года на планетах Солнечной Системы?*

A. *От расстояния от планеты до Солнца*

B. *От массы планеты*

C. *От радиуса планеты*

D. ***От угла наклона оси вращения планеты к плоскости эклиптики***

E. *От скорости вращения планеты вокруг своей оси*

Задача 9. *Какой стране удалось впервые запустить на орбиту животных и затем возвратить их с орбиты живыми?*

A. ***Советскому Союзу***

B. *США*

C. *Китаю*

D. *Евросоюзу*

E. *Украине*

Задача 10. *Какой стране впервые удалось разогнать космический аппарат до третьей космической скорости?*

A. *Советскому Союзу — аппарат «Луна-1»*

B. ***США — аппарат «Пионер-10»***

C. *Советскому Союзу — аппарат «Спутник»*

D. *США — аппарат «Новые горизонты»*

E. *Никому это пока не удалось*

Критерии проверки: автоматическая проверка по ответам, каждый верный ответ - 4 балла.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

КЛАССЫ 5 И 6

Задача 1.

Пожав плечами, я сказал:
— Меняю цвет на красный.
Это как бы уже не совсем чистая победа — поменять цвет.
Но на соседний по спектру — можно.
Сергей Лукьяненко. 'Вкус свободы'.
Сборник 'Именем Земли'.

Выпуклая фигура на плоскости разделена на две выпуклые части и раскрашена красным и оранжевым цветом (одна часть раскрашена в оранжевый цвет, другая — в красный). Треть части, закрашенной оранжевым, перекрасили в красный, и площадь красной части увеличилась в три раза. Какая часть фигуры была закрашена оранжевым вначале? Приведите полное решение.

Решение. Примем площадь всей фигуры за единицу, а площадь той части, которая была окрашена в красный изначально — за x. Тогда оранжевая часть была $1-x$, а после перекрашивания площадь красной части стала равна $x+\frac{1}{3}(1-x)$. Получаем уравнение $3x = x + \frac{1}{3}(1-x)$, откуда $x = \frac{1}{7}$. Значит, оранжевым цветом изначально было окрашено $\frac{6}{7}$ всей фигуры.

Ответ: 6/7.

Критерии проверки: 10 - Задача решена, ответ правильный, ответ следует из рассуждений.

6-8 - Правильный ответ, есть чертеж, обоснований не достаточно.

5 - Правильный ответ без обоснований.

2-3 - Попытка решения.

Задача 2.

Крошечная металлическая таблеточка,
занимавшая чуть ли не треть объема часов,
почему-то вызвала живейшее любопытство Корнеева.
Он потрогал ее пальцем и заявил:
— Батарейка. Слабенькая. Одна десятая ампера.
Сергей Лукьяненко 'Временная суета'.
Сборник 'Именем Земли'.

За 12 дней (пронумерованных в таблице отчетности числами 1-12) испытания моделей, юные исследователи космоса израсходовали 200 батареек, при этом сумма израсходованных батареек за любые три подряд идущих дня одинаковая. Заполните таблицу отчетности в соответствии с условиями расхода батареек. В первой строке указан номер дня, во второй — количество батареек, израсходованных в этот день.

День	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Количество батареек	.	.	.	*17*	.	.	.	*20*	.	.	.	.

Решение. Обозначим числа, стоящие в таблице, через $a_1, \dots, a_{12}$ соответственно. По условию дано, что $a_4 = 17$, $a_8 = 20$. Кроме того, сумма любых трех подряд идущих чисел одинакова. Значит, $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + 17$, откуда $a_1 = 17$. Аналогично $17 + a_5 + a_6 = a_5 + a_6 + a_7$, то есть $a_7 = 17$. Далее, $a_5 + a_6 + a_7 = a_6 + a_7 + 20$, откуда $a_5 = 20$; $20 + a_9 + a_{10} = a_9 + a_{10} + a_{11}$, значит, $a_{11} = 20$.

Пройдем еще раз таблицу с начала: $a_2 + a_3 + 17 = a_3 + 17 + 20$, значит, $a_2 = 20$. $17 + 20 + a_9 = 20 + a_9 + a_{10}$, значит, $a_{10} = 17$. Наконец, пусть $a_3 = x$. Тогда $a_3 + 17 + 20 = 17 + 20 + a_6$, следовательно, $a_6 = x$. Аналогично $a_9 = x$, $a_{12} = x$. Теперь вспомним, что сумма всех чисел в таблице равна 200, и получим уравнение: $4(17 + 20 + x) = 200$, откуда $x = 13$. Таблица полностью заполнена.
Ответ:

День	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Количество батареек	17	20	13	17	20	13	17	20	13	17	20	13

Критерии проверки: 10 - задача решена, таблица заполнена.
3-5 Попытка решения. В зависимости от заполнения таблицы.

Задача 3.

На другой стороне каньона Ингвар
видел серебристую каплю вездехода.
На крыше кабины подрагивал оранжевый огонек.
Сергей Лукьяненко '«Л» — значит люди'.
Сборник 'Именем Земли'.

Луноход двигается по замкнутому пути $ABCA$, такому, что ABC — прямоугольный треугольник с катетами AB и BC, причём $AB - BC = 1$ км. На участках AB и BC луноход двигался со скоростью 41 км/ч, а на участке CA из-за особенностей рельефа скорость была снижена до 29 км/ч. В результате оказалось, что на путь ABC по катетам треугольника луноход затратил столько же времени, сколько и на путь вдоль гипотенузы CA. Найдите длину пути $ABCA$, пройденного луноходом. Приведите полное решение.

Решение. Обозначим $BC = x$, тогда $AB = x + 1$. По теореме Пифагора: $AC^2 = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$. Обозначим через S_1 длину пути по катетам, через S_2 — по гипотенузе; через v_1 — скорость при движении по катетам, через v_2 — по гипотенузе. Поскольку по условию задачи время, затраченное на путь по этим участкам, одинаковое, получаем соотношение: $\dfrac{S_1}{v_1} = \dfrac{S_2}{v_2}$. Тогда $\left(\dfrac{S_1}{v_1}\right)^2 = \left(\dfrac{S_2}{v_2}\right)^2$. Подставим известные значения, получим $\dfrac{(2x+1)^2}{41^2} = \dfrac{2x^2+2x+1}{29^2}$. После упрощения получаем уравнение $x^2 + x = 420$. Заметим, что $x = 20$ является решением: $20^2 + 20 = 420$. Других подходящих нам решений нет: если $x > 20$, то $x^2 + x > 420$, если $x > 0$, но $x < 20$, то $x^2 + x < 420$. Отрицательным значение x не может быть по условию задачи. Итак, $BC = 20$, $AB = 21$, $AC^2 = 800 + 40 + 1 = 841 = 29^2$. Значит, весь путь составил $20 + 21 + 29 = 70$ км.
Ответ: 70 км.
Критерии проверки: 10 - Задача решена, ответ правильный.
6-8 - Ответ следует из рассуждений.
5 - Правильный ответ, есть чертеж, обоснований не достаточно.
2-3 - Правильный ответ без обоснований или попытка решения

Задача 4.

— Звезды похожи на искры от костра в небе или
светящийся планктон в море, — говорит старик.
— Когда-то все небо было в звездах.
Сергей Лукьяненко 'Донырнуть до звезд'.
Сборник 'Именем Земли'.

Три наблюдателя по-разному охарактеризовали падающую звезду. Первый сказал, что видел белый метеор. Второй – желтую комету. Третий – метеорит, точно не белый. При просмотре записи оказалось, что каждый указал правильно или только цвет, или только название. Как называлась падающая звезда и какого она была цвета? В чем разница между метеором, кометой и метеоритом? Приведите полное решение.

Решение. Предположим, что первый наблюдатель, правильно назвал цвет — белый. Тогда второй и третий с цветом ошиблись (оба назвали не белый). Но тогда и второй, и третий правы с названием, а это невозможно — комета не является метеоритом. Значит, первый правильно сказал правильное название — метеор. Тогда второй правильно назвал цвет — желтый. Третий тоже правильно назвал цвет — не белый. Значит, они видели желтый метеор.

Метеор — явление, возникающее при сгорании в атмосфере метеорных тел (осколков комет, астероидов и т.п.). Метеорит — тело космического происхождения, достигшее поверхности Земли. Комета — небольшое небесное тело, которое вращается вокруг Солнца по вытянутой орбите.

Ответ: желтый метеор.

Критерии проверки: 10 - задача решена, ответ правильный, ответ следует из рассуждений.

6-8 - правильный ответ, обоснований не достаточно.

5 - Правильный ответ без обоснований.

2-3 - Попытка решения.

Задача 5.

Он выключил компьютер, поинтересовался:
— Твоя старушка на ходу?
Петрович погрустнел, но признался:
— На ходу. Горючего только мало.
Сергей Лукьяненко 'Стройка века'.
Сборник 'Именем Земли'.

Можно ли с помощью двух канистр, вместимостью 15 л и 16 л набрать из цистерны в одну из канистр 8 литров горючего? Считайте, что в цистерне достаточно много горючего (например, более 100 л). Заполните таблицу, указав номер шага и количество литров горючего, находящееся в канистрах. На первом шаге канистры считаем пустыми.

Номер шага	*Канистра 15 л*	*Канистра 16 л*
1	*0*	*0*
2	...	...
...	...	...

Решение. Наполняем вторую канистру доверху. Выливаем из нее горючее в первую канистру, наполняя ее доверху — во второй канистре остается 1 л. Теперь из первой канистры все сливаем обратно в цистерну, а потом переливаем все из второй канистры в первую. Повторяем процедуру восемь раз.

Номер шага	Канистра 15 л	Канистра 16 л
1	0	0
2	0	16
3	15	1
4	0	1
5	1	0
6	1	16
7	15	2
8	0	2
9	2	0
10	2	16
11	...	...
33	8	0

Критерии проверки: 10 - задача решена, таблица заполнена.
3-5 Попытка решения. В зависимости от заполнения таблицы.

Задача 6.

— Часа через два связь будет. Мы проезжали мимо
ретрансляторов, ничего страшного с ними не случилось.
Сергей Лукьяненко. 'Мой папа — антибиотик'.
Сборник 'Именем Земли'.

Пять ретрансляторов радиосигнала отмечены на карте точками так, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Зоны распространения сигналов, исходящих из каждого ретранслятора, отмечены на карте геометрическим местом точек плоскости, находящихся между двумя лучами, выходящими из соответствующей точки под некоторым углом. Известно, что пересечением зон сигналов является часть плоскости, ограниченная выпуклым пятиугольником. Известно также, что у этого пятиугольника нет ни одной пары параллельных сторон, и ни одна из вершин пятиугольника не совпадает с ретранслятором.
а) Придумайте способ расположения ретрансляторов, который удовлетворял бы заданным условиям. Сделайте чертеж, отметьте на нем зоны распространения сигналов.
б) Вычислите сумму углов, образованных лучами, исходящими из каждой точки (ретранслятора).

Решение. а) Рассмотрим пятиугольник $XYZUV$ — пересечение зон сигналов. Поскольку его вершины лежат на лучах, выходящих из точек–ретрансляторов, то для того, чтобы найти эти точки, нужно продлить стороны пятиугольника, пока их продолжения попарно не пересекутся. Рассмотрим, например, сторону XY. Она пересекается со стороной YZ в точке Y, но здесь ретранслятора быть не может (ни одна из вершин пятиугольника не совпадает с ретранслятором), а других пересечений у двух прямых быть не может. Аналогично XY и VX. Прямая XY пересекается с прямой ZU (у пятиугольника нет параллельных сторон). Точка пересечения не может лежать на стороне XY или на стороне ZU (тогда пятиугольник не был бы выпуклым). Значит, эта точка лежит за пятиугольником. Аналогично, пересекаются продолжения XY и UV. Аналогично для других сторон: прямая YZ пересекается с прямыми UV и VX; прямая ZU пересекается с прямыми VX и XY; и так далее. Получим пять точек пересечения — обозначим их $A = XY \cap ZU$, $B = YZ \cap UV$, $C = ZU \cap VX$, $D = XY \cap UV$, $E = VX \cap YZ$. Получаем пятиконечную звезду $ABCDE$.
б) Вычислим сумму углов звезды. Заметим, что $\angle A + \angle AYZ + \angle AZY = 180^o$ (сумма углов в треугольнике AYZ). Далее, угол AYZ является внешним углом в треугольнике BYD, следовательно, $\angle AYZ = \angle B + \angle D$. Аналогично, угол AZY является внешним углом в треугольнике CZE, следовательно, $\angle AZY = \angle C + \angle E$. Подставляем все в первое соотношение, получаем $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^o$.
Ответ: 180^o.
Критерии проверки: 10 - Задача решена. Получены правильные ответы в пунктах а) и б) Ответы следуют из рассуждений.
5-7 - Нарисован правильный чертеж в пункте а) В пункте б) ответ неправильный.
2-3 - Попытка решения.

РАЗМИНКА

КЛАССЫ 7 И 8

Полностью совпадает с разминкой для 5 и 6 классов.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

КЛАССЫ 7 И 8

Задача 1.

Мы шли на восток, и солнце медленно выкатывалось нам навстречу.
Сергей Лукьяненко. 'Дорога на Веллесберг'.
Сборник 'Именем Земли'.

В полдень по местному времени два всадника выезжают из города Мбандака в Демократической Республике Конго с координатами 0^o с.ш 18^o в.д. Один из них движется строго на север, а второй — строго на восток. Оба всадника скачут с одинаковой скоростью, равной $v = 20$ км/ч. Для кого из них закат настанет раньше и на сколько? Считайте, что закат происходит в 18 часов по местному времени для любой точки, через которые проезжают всадники. Приведите полное решение.

Решение. Так как первый всадник двигается на север, то его движение не влияет на местное время. Значит, для него закат наступит через $t = 6$ часов.
Второй всадник двигается по экватору. Длина экватора $l = 2\pi R = 2\pi \cdot 6378 \approx 40074$ км.
Продолжительность солнечного дня равна $T_\odot = 24$ ч
Найдем скорость движения терминатора (линии дня и ночи) по поверхности Земли:

$$v_\odot = \frac{l}{T_\odot} \approx 1670 \text{ км/ч}$$

Всадник движется навстречу закату. В начале движения между ним и терминатором расстояние равно $v_\odot t$. Таким образом, закат для второго всадника наступит через

$$\tau = \frac{v_\odot t}{v_\odot + v} \approx 5,929 \text{ ч}$$

Ответ: для второго всадника Солнце зайдет раньше на $\Delta\tau = t - \tau = 0,071$ ч $= 4$ минуты 16 секунд.
Критерии проверки: 10 Расчитан верный ответ с большой точностью. Допустимо пренебречь малым слагаемым: доля от 6 часов в отношению скорости всадника с скорости Солнца на небе принимается за верный ответ.
8-9 Верная формула, но подставлены некорректные численные данные.
4-7 Указан корректный способ решения, но расчётов нет.
1-3 Высказаны некоторые корректные мысли по теме задачи.
0 Задача не решена; отправлен пустой файл; прикреплено решение от другой задачи; файл не загружен; высказаны абсолютно неверные предположения.

Задача 2.

— Надо построить загон для кроликов. В Подмосковье.
Пять на восемь километров. Вот я и думаю, как
в этот раз строить будем? На совесть? Или как обычно?
Сергей Лукьяненко 'Сухими из воды'.
Сборник 'Именем Земли'.

На плоскость нанесена прямоугольная сетка, ячейкой которой являются прямоугольники размера 4×5. От одного узла сетки до другого можно перемещаться только по линиям сетки. Найдите наибольшее возможное отношение длины кратчайшего пути от узла A до узла B (по сетке) к длине отрезка AB.

Решение. Пусть точка B отстоит от A на x клеток по горизонтали и на y по вертикали. Тогда путь от A к B по линиями сетки имеет длину $4|x|+5|y|$, а длина отрезка AB равна $\sqrt{(4x)^2+(5y)^2}$. Получается, что надо найти наибольшее значение дроби $\dfrac{4|x|+5|y|}{\sqrt{16x^2+25y^2}}$. Заметим, что если $y=0$, то отношение равно 1. Если же $y \neq 0$, то поделим числитель и знаменатель дроби на $|y|$, обозначим $\dfrac{|x|}{|y|}=t$ и получим дробь $\dfrac{4t+5}{\sqrt{16t^2+25}}$. Чтобы найти ее наибольшее значение, приравняем дробь к неизвестному пока числу z и посмотрим, при каких z найдется решение полученного уравнения

$$\frac{4t+5}{\sqrt{16t^2+25}}=z \iff 16t^2+40t+25=16z^2t^2+25z^2 \iff 16(z^2-1)t^2-40t+25(z^2-1)=0.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения равен $1600(2-z^2)$, следовательно, максимально возможное значение $z=\sqrt{2}$. Приравняем дробь к нему, получим

$$\frac{4t+5}{\sqrt{16t^2+25}}=\sqrt{2} \iff 16t^2+40t+25=32t^2+50 \iff (4t-5)^2=0.$$

Значит $|x|/|y|=5/4$, что достигается, например, при $x=5$, $y=4$.
Ответ: $\sqrt{2}$.
Критерии проверки: 10 Задача решена верно
8-9 Задача решена с арифметическими ошибками
5-7 Рассмотрен частный случай и получен верный ответ, есть попытки обобщить результат.
2-4 Рассмотрен частный случай и получен верный ответ, нет попыток обобщить результат.
1 Есть попытка решить задачу, но без продвижений
0 Задача не решена; отправлен пустой файл Прикреплено решение от другой задачи Файл не загружен

Задача 3.

— Вы профессор Ломтев? — проклиная себя
за врожденную глупость, спросил Костя.
Парень хихикнул, но тут же посерьезнел.
— Неужели похож? Я лаборант.
Сергей Лукьяненко 'Гаджет'.
Сборник 'Именем Земли'.

Сотрудники астрономической фирмы «Светило» решили использовать шифр для кодировки координат. Для этого они выбрали слово, содержащее как минимум 10 неповторяющихся букв. Каждой букве сопоставили цифру в порядке от 1 до 9, затем 0 (читая слово слева направо). Например, если бы выбрали слово «авиадиспетчер», то «а» сопоставили 1, «в» — 2, «и» — 3, «а» уже соответствует 1, поэтому пропускаем ее, «д» — 4, «и» пропускаем, «с» — 5, «п» — 6, «е» — 7, «т» — 8, «ч» — 9, «р» — 0. Вася хочет устроиться в «Светило» лаборантом. На собеседовании ему дали пример деления с использованием этого шифра, указанный ниже:

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
\text{А} & \text{И} & \text{Ь} & \text{У} & \text{Я} & \text{М} & \text{Л} & \text{К} \\ \cline{6-8}
\text{М} & \text{Л} & \text{К} & & & \text{К} & \text{И} & \text{У} \\ \cline{1-4}
\text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{У} & & & & \\
\text{Л} & \text{К} & \text{А} & \text{И} & & & & \\ \cline{1-5}
 & \text{К} & \text{Ь} & \text{И} & \text{Я} & & & \\
 & \text{К} & \text{Я} & \text{И} & \text{У} & & & \\ \cline{2-5}
 & & \text{Л} & \text{Ц} & \text{А} & & &
\end{array}$$

Какое слово могли использовать сотрудники «Светила» для шифра? Поясните свой ответ.

Решение. Заметим, что первый раз вычитается делитель, а значит К соответствует 1.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
\text{А} & \text{И} & \text{Ь} & \text{У} & \text{Я} & \text{М} & \text{Л} & 1 \\ \cline{6-8}
\text{М} & \text{Л} & 1 & & & 1 & \text{И} & \text{У} \\ \cline{1-4}
\text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{У} & & & & \\
\text{Л} & 1 & \text{А} & \text{И} & & & & \\ \cline{1-5}
 & 1 & \text{Ь} & \text{И} & \text{Я} & & & \\
 & 1 & \text{Я} & \text{И} & \text{У} & & & \\ \cline{2-5}
 & & \text{Л} & \text{Ц} & \text{А} & & &
\end{array}$$

Посмотрим на второе вычитание, разряд сотен. $\text{Л} - 1 = 1$. Следовательно, Л соответствует либо 2, либо 3, если занимался десяток для разряда десятков. Пусть $\text{Л} = 2$.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
\text{А} & \text{И} & \text{Ь} & \text{У} & \text{Я} & \text{М} & 2 & 1 \\ \cline{6-8}
\text{М} & 2 & 1 & & & 1 & \text{И} & \text{У} \\ \cline{1-4}
2 & 2 & 2 & \text{У} & & & & \\
2 & 1 & \text{А} & \text{И} & & & & \\ \cline{1-5}
 & 1 & \text{Ь} & \text{И} & \text{Я} & & & \\
 & 1 & \text{Я} & \text{И} & \text{У} & & & \\ \cline{2-5}
 & & 2 & \text{Ц} & \text{А} & & &
\end{array}$$

Тогда Ь = 3 (см. первое вычитание, занятие десятков могло произойти, только если Ь = 0, но тогда $Ь + 10 - 1 = 9 \neq 2$), аналогично И = 4.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
А & 4 & 3 & У & Я & М\,2\,1 \\ \cline{6-6}
М & 2 & 1 & & & 1\,4\,У \\ \cline{1-3}
2 & 2 & 2 & У & & \\
2 & 1 & А & 4 & & \\ \cline{1-5}
 & 1 & 3 & 4 & Я & \\
 & 1 & Я & 4 & У & \\ \cline{2-5}
 & & 2 & Ц & А &
\end{array}
$$

Во втором вычитании в разряде единиц $У - 4 = 4$, т.е. У = 8, либо $10 + У - 4 = 4$ (если занимается десяток), но тогда $У = -2$, что невозможно. Итак, У = 8, а тогда $2228 - 21А4 = 134$ — мы пришли к противоречию! Вывод: предположение Л = 2 было неверным, а значит Л = 3.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
А & И & Ь & У & Я & М\;3\;1 \\ \cline{6-6}
М & 3 & 1 & & & 1\,И\,У \\ \cline{1-3}
3 & 3 & 3 & У & & \\
3 & 1 & А & И & & \\ \cline{1-5}
 & 1 & Ь & И & Я & \\
 & 1 & Я & И & У & \\ \cline{2-5}
 & & 3 & Ц & А &
\end{array}
$$

Рассуждая аналогично, получим Ь = 4, И = 6, У = 2.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
А & 6 & 4 & 2 & Я & М\,3\,1 \\ \cline{6-6}
М & 3 & 1 & & & 1\,6\,2 \\ \cline{1-3}
3 & 3 & 3 & 2 & & \\
3 & 1 & А & 6 & & \\ \cline{1-5}
 & 1 & 4 & 6 & Я & \\
 & 1 & Я & 6 & 2 & \\ \cline{2-5}
 & & 3 & Ц & А &
\end{array}
$$

В нашем распоряжении осталось не так много цифр: 0, 5, 7, 8, 9. Поскольку $А - М = 3$ (первое вычитание), то А = 8, М = 5. Тогда Я = 0 (последнее вычитание, было занятие десятка). Тогда Ц = 9. Итак, К = 1, У = 2, Л = 3, Ь = 4, М = 5, И = 6. Букву, соответствующую 7 мы не знаем, А = 8, Ц = 9, Я = 0. Получили «КУ_Л_Ь_М_И_?_А_Ц_Я» с возможным добавлением уже встречающихся букв. Сотрудники выбрали слово «кульминация».

Ответ: «кульминация».

Критерии проверки: 10 баллов – верно найдено слово и есть верная расшифровка ребуса.

9 баллов – ребус решен верно, слово не выписано.

8 баллов – верно найдено слово, есть ошибки при расшифровке ребуса (перепутаны не более трех букв из десяти).

6 баллов – верно найдено слово и некоторые буквы (менее семи).

5 баллов – некоторые буквы найдены верно, ответ не получен или неверный.

3 балла – ответ угадан верно, решение отсутствует.
2 балла – неверно понято условие, в итоге сделан вывод, что задача не имеет решения или предложен неверный ответ.
0 баллов – решение отсутствует или не имеет отношения к задаче.

Задача 4.

— Мне доводилось бывать в одиночестве, — заметил Максим.
— Я настраивал станцию на Плутоне...
— Плутон — это близко, — поморщился его предшественник.
— Совсем рядом. Купи кота.
Сергей Лукьяненко. 'Купи кота'.
Сборник 'Именем Земли'.

Во время работы двигателя, ракета поднималась с поверхности Плутона с постоянным ускорением a м/с^2, а затем, выключив двигатель, в свободном полете продолжала подъем с замедлением $g = 0,6$ м/с^2 (ускорение свободного падения на Плутоне). Достигнув наивысшей точки подъема через 45 секунд с момента старта, ракета падала 30 секунд до поверхности. Найдите ускорение a и время t работы двигателя ракеты. Влиянием атмосферы можно пренебречь. Поясните свой ответ.

Решение: Падая, ракета двигалась равноускоренно, причем начальная скорость равна нулю, т.е. $H = \dfrac{g(30)^2}{2} = 270$ м. К моменту выключения двигателей ракета поднялась на высоту $h = \dfrac{at^2}{2}$ и набрала скорость $v = at$. В свободном полете скорость уменьшалась и за $45 - t$ секунд снизилась до нуля, т.е. $v - g(45 - t) = 0$. Высота при свободном полете менялась по закону равноускоренного движения и за $45 - t$ секунд стала равной $h + v(45 - t) - \dfrac{g(45-t)^2}{2}$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{at^2}{2} + at(45 - t) - \dfrac{g(45-t)^2}{2} = 270, \\ at - g(45 - t) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $at = g(45 - t)$ и подставляем в первое: $\dfrac{gt(45-t)}{2} + g(45-t)^2 - \dfrac{g(45-t)^2}{2} = 270$, откуда $t = 25$ секунд. Возвращаясь ко второму уравнению системы, получаем $a = 0,48$ м/с^2.
Ответ: $a = 0,48$ м/с^2, $t = 25$ секунд.
Критерии проверки: 10 Задача решена верно
7-9 Задача решена с незначительными арифметическими ошибками, либо верно дан ответ только на один из вопросов.
4-6 Верно рассчитана максимальная высота полёта, либо другие отдельные данные, но на вопросы задачи верных ответов не дано.
1-3 Есть попытка решить задачу, но без особых продвижений
0 Задача не решена; отправлен пустой файл; прикреплено решение от другой задачи; файл не загружен.

Задача 5.

— И правильно, — поддакнул лаборант.
— Я сам студент. Биофак, пятый курс.
Сергей Лукьяненко 'Гаджет'.
Сборник 'Именем Земли'.

В процессе написания курсовой работы студент Костя сталкивается со следующим вопросом из области теории чисел: какие из натуральных чисел N можно представить в виде суммы дробей:

$$N = \frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{3}{n_3} + \frac{4}{n_4} + \frac{5}{n_5} + \frac{6}{n_6},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_6$ — некоторые (не обязательно различные) натуральные числа? Помогите Константину найти все такие числа. Приведите полное решение.

Решение. Самые малые знаменатели в нашем распоряжении — это единицы. Значит, наибольшее значение суммы равно $1+2+3+4+5+6 = 21$. Таким образом, числа большие 21 получить нельзя. Докажем, что все натуральные числа от 1 до 21 получить можно. Для начала получим единицу:

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{12} + \frac{3}{18} + \frac{4}{24} + \frac{5}{30} + \frac{6}{36}.$$

Теперь заметим, что любое число от 1 до 20 можно составить в виде суммы некоторых из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторений). Действительно, $1 = 1$ (в сумме только одно число), $2 = 2, \ldots,\ 6 = 6$, $7 = 1+6$, $8 = 2+6, \ldots,\ 11 = 5+6$, $12 = 1+5+6$, $13 = 2+5+6$, $14 = 3+5+6$, $15 = 4+5+6$, $16 = 1+4+5+6$, $17 = 2+4+5+6$, $18 = 3+4+5+6$, $19 = 1+3+4+5+6$, $20 = 2+3+4+5+6$. При этом, мы используем не более пяти из наших чисел. Итак, чтобы представить число $N \leq 21$ в виде суммы дробей, мы вначале представим число $N-1$ в виде суммы натуральных слагаемых от 1 до 6, как мы показали. Теперь каждое это слагаемое превратим в дробь, взяв знаменатель равный 1. У нас останется несколько (не менее одного) неиспользованных чисел от 1 до 6. Пусть осталось неиспользованными k чисел. Тогда мы каждому такому числу поставим в знаменатель произведение — само число (числитель), умноженное на k. После сокращения дроби, получим $\frac{1}{k}$. Таких дробей будет как раз k и их сумма даст 1. В результате, общая сумма составит $(N-1)+1 = N$. Например, для числа $N = 18$ наш способ выглядит так:

$$18 = 17 + 1 = (2+4+5+6) + 1 = \left(\frac{2}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{6}{1}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$
$$= \left(\frac{2}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{6}{1}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{6}{1}.$$

Например, для числа 11 наш способ выглядит так:

$$11 = 10 + 1 = (4+6) + 1 = (4+6) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$
$$= \left(\frac{4}{1} + \frac{6}{1}\right) + \frac{1}{4} + \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{5}{5 \cdot 4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{4}{1} + \frac{5}{5 \cdot 4} + \frac{6}{1}.$$

Ответ: все числа от 1 до 21, и только их.
Критерии проверки: 10 Задача решена верно
8-9 Задача решена с незначительными арифметическими ошибками
5-7 Неверно найдена нижняя грань множества, но в остальном задача решена
2-4 Ответ верный, но рассмотрены лишь некоторые частные случаи/ есть небольшое продвижение по решению
1 Есть попытка решить задачу, но без продвижений
0 Задача не решена; отправлен пустой файл Прикреплено решение от другой задачи Файл не загружен

Задача 6.

— Хорошо! Мы от прямых вопросов не уходим,
а достойные ответы имеем на все происки! —
Выбегалло положил руку на плечо Седлового,
и тот слегка присел.
Сергей Лукьяненко. 'Временная суета'.
Сборник 'Именем Земли'.

Загадочный Оракул действует следующим образом: в него можно ввести последовательность цифр, после чего Загадочный Оракул даст ответ — некоторое число. Космонавт Василий решил узнать алгоритм работы Оракула и стал вводить свои примеры.

101 $\to$ 1
8181515 $\to$ 4
1111112 $\to$ 0
8888888 $\to$ 14
1010101 $\to$ 3

а) Догадайтесь, по какому принципу действует Загадочный Оракул. Поясните свой ответ.

б) Напишите программу на своем любимом языке программирования, моделирующую действия Загадочного Оракула.

Входные данные: *единственное неотрицательное число x, не превышающее* 10000000.
Выходные данные: *выведите n.*
Пример.
Входные данные:
689
Выходные данные:
4

Решение.

а) Оракул считает «кружочки в цифрах»: в цифрах 1, 2, 3, 4, 5 и 7 кружочков нет, в цифрах 0, 6 и 9 по одному кружочку, в цифре 8 два кружочка.

б) Программа на языке Python.

```
a = input()
ans = 0
for i in range(len(a)):
    if a[i] in ['0','6','9']:
        ans += 1
    elif a[i] == '8':
        ans += 2
print(ans)
```

Критерии проверки: 10 Задача решена верно и в полном объёме
8 Всё хорошо, но нет требуемой проверки на неотрицательность и на непревышение лимита

в 10000000.
6 Задача решена с ошибкой; нет проверки на неотрицательность и на непревышение лимита в 10000000.
2 Установлен принцип работы оракула, но задача не решена, программы нет
1 Не разобрался в принципе работы оракула; программы нет
0 Задача не решена; отправлен пустой файл Прикреплено решение от другой задачи Файл не загружен / не читается

РАЗМИНКА

КЛАССЫ 9 И 10

Задача 1. *Константин Эдуардович Циолковский справедливо считается теоретиком космонавтики. В своих работах он предложил много разнообразных идей. Что он предложил необычного для доставки грузов на орбиту кроме многоступенчатых ракет («ракетных поездов»)?*

A. *Использование дирижаблей*

B. *Самолет*

C. ***Космический лифт***

D. *Зенитные орудия*

E. *Левитацию*

Задача 2. *Как называется характеристика отражающей способности поверхности?*

A. *Терминатор*

B. ***Альбедо***

C. *Пиктедо*

D. *Спектр*

E. *Поляризация*

Задача 3. *Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите и совершив маневр переходит на более высокую круговую орбиту. Как измениться его скорость относительно неподвижного наблюдателя на Земле?*

A. *Не изменится*

B. ***Модуль скорости уменьшится***

C. *Модуль скорости увеличится*

D. *Модуль скорости не изменится, но вектор скорости может повернуться*

E. *Может быть по–разному: зависит от маневра*

Задача 4. *На Луне человек оставил следы на поверхности. Как долго они там будут оставаться и почему?*

A. ***Очень долго, потому что у Луны нет атмосферы, и нет ветра или осадков, которые могут эти следы стереть***

B. *Они уже стерлись от пылевых бурь, которые часто бывают на Луне*

C. *Следы на Луне стираются за 50–60 лет от космической пыли и космических лучей*

D. *Их теперь не найдешь из–за постоянной бомбардировки Луны метеоритами*

E. *На самом деле никаких следов на Луне никогда не было — это знаменитая Лунная афера*

Задача 5. *В октябре 1959 году советский спутник сфотографировал обратную сторону Луны. Что было сделано впервые в мировой практике для облета Луны спутником?*

A. *Съемка небесного тела с борта спутника*

B. *Впервые была достигнута вторая космическая скорость*

C. ***Впервые был применен гравитационный маневр***

D. *Впервые были включены двигатели на орбите Луны*

E. *Впервые была превышена вторая космическая скорость*

Задача 6. *Почему при запуске спутников на орбиту почти все ракеты летят на восток?*

A. *На востоке больше мест для падения ступеней ракет*

B. *Используются попутные воздушные потоки*

C. ***Используется вращение Земли для экономии топлива***

D. *Для секретности: чтобы не пролетать над Западной Европой на низкой высоте*

E. *Это не так: ракеты стартуют на запад так же часто, как и на восток*

Задача 7. *Как различается средняя плотность планет Солнечной системы?*

A. *Чем ближе планета к Солнцу, тем больше ее плотность*

B. *Чем ближе планета к Солнцу, тем меньше ее плотность*

C. *Все планеты Солнечной системы имеют примерно одинаковую плотность*

D. *Чем больше радиус планеты, тем меньше ее плотность*

E. ***Планеты земной группы более плотные, чем ледяные и газовые гиганты***

Задача 8. *От чего зависит наличие или отсутствие смены времен года на планетах Солнечной системы?*

A. *От расстояния от планеты до Солнца*

B. *От массы планеты*

C. *От радиуса планеты*

D. ***От угла наклона оси вращения планеты к плоскости эклиптики***

E. *От скорости вращения планеты вокруг своей оси*

Задача 9. *Какой стране удалось впервые запустить на орбиту животных и затем возвратить их с орбиты живыми?*

A. ***Советскому Союзу***

B. *США*

C. *Китаю*

D. *Евросоюзу*

E. *Украине*

Задача 10. *Какой стране впервые удалось разогнать космический аппарат до третьей космической скорости?*

A. *Советскому Союзу — аппарат «Луна-1»*

B. ***США — аппарат «Пионер-10»***

C. *Советскому Союзу — аппарат «Спутник»*

D. *США — аппарат «Новые горизонты»*

E. *Никому это пока не удалось*

Критерии проверки: автоматическая проверка по ответам, правильный ответ дает 2 балла.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

КЛАССЫ 9 И 10

Задача 1.

— В чем проблема-то... Сообщите координаты, через час
доставим ученым их очень важный груз.
Сергей Лукьяненко 'Очень важный груз'.
Сборник 'Именем Земли'.

Найдите радиус и координаты центра окружности, проходящей через все точки пересечения парабол $y = x^2 - 1$ и $x = y^2 - 6y + 5$. Приведите полное решение.

Решение. Заметим, что оси парабол перпендикулярны. При этом осью параболы $y = x^2 - 1$ является ось Oy. Сделаем замену координат так, чтобы осью второй параболы стала ось Ox. Парабола имеет вершину в точке $(-4, 3)$, следовательно, сделаем замену $z = y - 3$. В новых координатах (x, z) уравнения парабол будут иметь вид $z = x^2 - 4$ и $x = z^2 - 4$ соответственно. Поскольку окружность проходит через точки пересечения парабол, что любая ее точка должна удовлетворять системе $\begin{cases} z = x^2 - 4, \\ x = z^2 - 4. \end{cases}$ Сложим уравнения, перенесем все в одну часть и выделим полные квадраты: $(x-1/2)^2+(z-1/2)^2 = 17/2$. Это и есть уравнение искомой окружности (в новых координатах). Тогда ее радиус равен $\sqrt{17/2}$, центр — $(1/2, 1/2)$ в новых координатах, то есть $(1/2, 7/2)$ — в исходных.
Ответ: радиус равен $\sqrt{17/2}$, координаты центра $(1/2, 7/2)$.
Критерии проверки: 10 баллов – верное решение.
9 баллов – верное решение с незначительной арифметической ошибкой.
7 баллов – верная логика решения, ответ неверен вследствие грубой арифметической ошибки.
4 балла – есть попытка решения, ответ не обоснован или неверен.
2 балла – есть только верный ответ (без решения).
0 баллов – решение отсутствует или не имеет отношения к задаче.

Задача 2.

Ненужный отныне бластер серебристой искоркой упал вниз.
Тимур следил за его падением. Двести метров — от вершины
скалы до густой багровой щетины джунглей.
Не спасет и гравитация в две трети земной...
Сергей Лукьяненко 'Очень важный груз'.
Сборник 'Именем Земли'.

Самой высокой горой Земли является Эверест. Могут ли (теоретически) на Земле существовать горы выше Эвереста? Если да, то определите максимально допустимую высоту h такой горы. Массу Земли примите равной $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус $R_\oplus = 6400$ км. Считайте, что плотность Земли и горы не зависит от расстояния до центра. Предел прочности поверхности Земли примите равным $6 \cdot 10^8$ Па. Форму горы примите равной конусу, влияние атмосферы не учитывайте. Приведите полное решение.

Решение. Объем Земли: $V = \frac{4}{3}\pi R_\oplus^3$. Плотность Земли: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R_\oplus^3}$. Так как очевидно, что $h << R$, то изменением g и вращением Земли можно пренебречь. Тогда

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho S h g}{3S},$$

где S — площадь основания горы, а m — ее масса. Отсюда

$$h = \frac{3P}{\rho g} = \frac{4\pi P R_\oplus^3}{Mg} \approx 33,6 \text{ км}.$$

Ответ: примерно $33,6$ км.
Критерии проверки: 10 баллов – верное решение.
9 баллов – верное решение с арифметической ошибкой.
7 баллов – не расписана плотность Земли / представлено какое-либо табличное значение, получен близкий к верному ответ.
5 баллов – неправильно выписана формула для высоты или для предела прочности или для плотности.
4 балла – одна из формул – верная.
2 балла – есть попытка решения.
0 баллов – решение отсутствует или не имеет отношения к задаче.

Задача 3.

Печатающим устройством «Алдану» служила электрическая
пишущая машинка, снабженная виртуальным набором литер.
Благодаря этой маленькой модернизации она могла печатать
на семидесяти языках шестнадцатью цветами,
а также рисовать графики...
Сергей Лукьяненко. "Временная суета'.
Сборник 'Именем Земли'.

Задана строка S, состоящая из маленьких букв латинского алфавита. Сколько различных строк можно получить при помощи вычеркивания ровно двух символов из S? Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по данной строке вычисляет количество строк, которые можно получить таким образом.
Входные данные: *строка S длиной от 3 до 1000 символов включительно. Строка S содержит только маленькие буквы латинского алфавита.*
Выходные данные: *одно целое число — количество различных строк, которые можно получить при помощи вычеркивания ровно двух символов из S.*
Пример.
Ввод: biber
Вывод: 9
Пояснение. *Действительно, вычеркивая по два символа, можем получить следующие различные комбинации: ber,ier,ibr,ibe,bbr,bbe,bir,bie,bib — всего 9.*

Критерии проверки: 10 - Верное решение
9,5 - Неверный формат ввода и/ или вывода, либо решение содержит незначительные ошибки
9 - Отсутствует ввод и/ или вывод
6 - Программа работает только для некоторых входных данных
2 - Решение неверное, но представляет собой программу

Задача 4.

— Вы профессор Ломтев? — проклиная себя
за врожденную глупость, спросил Костя.
Парень хихикнул, но тут же посерьезнел.
— Неужели похож? Я лаборант.
Сергей Лукьяненко 'Гаджет'.
Сборник 'Именем Земли'.

Сотрудники астрономической фирмы «Светило» решили использовать шифр для кодировки координат. Для этого они выбрали слово, содержащее как минимум 10 неповторяющихся букв. Каждой букве сопоставили цифру обязательно в порядке от 1 до 9, затем 0. Например, если бы выбрали слово «авиадиспетчер», то «а» сопоставили 1, «в» — 2, «и» — 3, «а» уже соответствует 1, поэтому пропускаем ее, «д» — 4, «с» — 5, «п» — 6, «е» — 7, «т» — 8, «ч» — 9, «р» — 0. Вася хочет устроиться в "Светило" лаборантом. На собеседовании ему дали пример деления с использованием этого шифра, указанный ниже:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
\text{А} & \text{И} & \text{Ь} & \text{У} & \text{Я} & \text{М Л К} \\
\cline{6-6}
\text{М} & \text{Л} & \text{К} & & & \text{К И У} \\
\cline{1-3}
\text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{У} & & \\
\text{Л} & \text{К} & \text{А} & \text{И} & & \\
\cline{1-4}
 & \text{К} & \text{Ь} & \text{И} & \text{Я} & \\
 & \text{К} & \text{Я} & \text{И} & \text{У} & \\
\cline{2-5}
 & & \text{Л} & \text{Ц} & \text{А} &
\end{array}
$$

Какое слово могли использовать сотрудники «Светила» для шифра? Поясните свой ответ.

Решение, ответ и критерии к этой задачи см. в варианте для 7-8 классов.

Задача 5.

— И правильно, — поддакнул лаборант.
— Я сам студент. Биофак, пятый курс.
Сергей Лукьяненко 'Гаджет'.
Сборник 'Именем Земли'.

В процессе написания курсовой работы студент Костя сталкивается со следующим вопросом из области теории чисел: какие из натуральных чисел N можно представить в виде суммы дробей:

$$N = \frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{3}{n_3} + \ldots + \frac{2024}{n_{2024}},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_{2024}$ — некоторые (не обязательно различные) натуральные числа? Помогите Константину найти все такие числа. Приведите полное решение.

Решение: Наименьшие возможные знаменатели — единицы. Значит, наибольшее возможное число равно $1 + 2 + \cdots + 2024 = \frac{2025 \cdot 2024}{2} = 2\,049\,300$. Итак, получить числа, больше чем $2\,049\,300$ нельзя. Покажем, что все числа от 1 до $2\,049\,300$ получить можно. Вначале получим единицу:

$$1 = \frac{1}{2024} + \frac{2}{2 \cdot 2024} + \frac{3}{3 \cdot 2024} + \ldots + \frac{2024}{2024 \cdot 2024}.$$

Теперь получим произвольное число $k = N - 1$ от 1 до $2\,049\,299$ в виде суммы нескольких (попарно различных) натуральных чисел в диапазоне от 1 до 2024. Для чисел k от 1 до 2024 все очевидно (надо взять одно слагаемое). Для чисел k от $2025 = 2024 + 1$ до $4047 = 2024 + 2023$ надо взять 2024 и еще одно соответствующее слагаемое. Далее будем брать сумму трех слагаемых $x + 2023 + 2024$, меняя x от 1 до 2022; потом четырех, и т.д., пока не дойдем до $k = 2\,049\,299 = 2 + 3 + \ldots + 2024$. Теперь получим произвольное $N \in [1,\, 2\,049\,300]$. Представим $k = N - 1$, как было показано выше. Для чисел от 1 до 2024, которые вошли в эту сумму, возьмем знаменатели 1. Для чисел, которые в сумму не вошли, знаменатели подберем так, чтобы сумма дробей дала 1. А именно, пусть в сумму не вошли натуральные числа $1 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m \le 2024$. Тогда

$$\frac{x_1}{m \cdot x_1} + \frac{x_2}{m \cdot x_2} + \ldots + \frac{x_m}{m \cdot x_m} = 1.$$

Тогда общая сумма составим $k + 1 = N$.

Ответ: Все числа от 1 до $2\,049\,300$, и только их.

Критерии проверки: 10 - верно

9 - ошибка в нескольких разложениях, в целом не влияет на решение

8 - в целом верно, но есть пробелы в обосновании существования разложений для некоторых чисел

6 - получены разложения (или обосновано существование этих разложений) только для части чисел (как правило, для $[6, 21]$ и $[2024, 2049300]$)

4 - есть оценка снизу и разложения некоторых чисел. сюда же относятся случаи, когда безосновательно утверждается существование разложений для этих промежутков

2 - получена оценка сверху или разложения для некоторых чисел.

Задача 6.

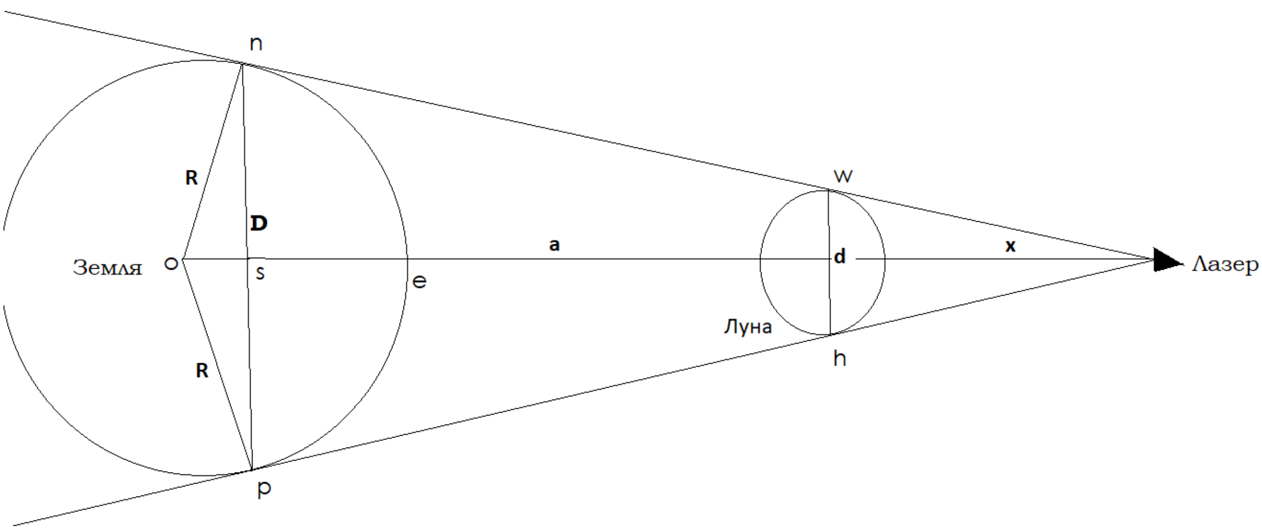
— Ерунда, откуда на Земле боевой лазер?
Сергей Лукьяненко. 'Мой папа — антибиотик'.
Сборник 'Именем Земли'.

В одном из фильмов инопланетяне облучили Землю лазером. В результате на большей части Земли отключилось электричество. Электричество осталось только в небольшой области с Москвой (56^o с. ш. $37,5^o$ в. д.) в центре и Глазго (56^o с. ш. $4,3^o$ з. д.) на её границе. Этот «круг жизни» образовался благодаря тому, что на пути лазера попалась Луна. Найдите расстояние от лазера до Земли. Орбиту Луны считайте круговой радиуса $385 \cdot 10^3$ км, кривизной Земли пренебрегите. Приведите полное решение.

Решение: Найдем расстояние между городами (радиус тени)

$$D = 2r = 2R\cos(\varphi)\Delta\lambda \approx 5200 \text{ км}$$

Сделаем рисунок к этой задачи.



Из рисунка видно, что треугольники p-n-Лазер и n-w-Лазер: подобны. Так как se намного меньше расстояния от Луны до Земли, то

$$\frac{D}{d} = \frac{a+x}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$l = x + a = 7,6 \cdot 10^5 \text{ км } \approx 0,005 \text{ а.е.}$$

Ответ: Примерно $7,6 \cdot 10^5$ км.
Критерии проверки: 10 баллов – полное решение с верным ответом.
6 баллов – есть формула отношения, правильно найден угол между городами, дальше

ошибка.
между объектами взяты угловые размеры).
3 балла – найден угол между городами, далее грубая ошибка или неверно понято условие.
2 балла – есть попытка решения.
0 баллов – решение отсутствует или не имеет отношения к задаче.

Задача 7.

Кто-то сказал мальчику, что, когда день сменяется ночью,
в небе можно увидеть звезды. Это неправда.
Но вечерами мальчик приходит к морю и смотрит на горизонт.
Сергей Лукьяненко 'Донырнуть до звезд'.
Сборник 'Именем Земли'.

Найдите максимальный диаметр телескопа с равнозрачковым увеличением, в который можно одновременно наблюдать полную Луну в день весеннего равноденствия и Заниах ($\alpha = 12^h 20^m$, $\delta = -0^o 40'$). Поле зрения окуляра примите равным 30^o. Диаметр зрачка человека $d = 6$ мм. Приведите полное решение.

Решение. В день весеннего равноденствия Солнце имеет координаты $\alpha = 0^h,\ \delta = 0^o$. То есть Луна имеет координаты: $\alpha = 12^h,\ \delta = 0^o$. Так как разность склонения и прямого восхождения малые углы, то воспользуемся плоским приближением. Расстояние между звездами

$$\omega' = \sqrt{\Delta\alpha^2 + \Delta\delta^2} \approx 5^o$$

Возьмем диаметр зрачка человека $d = 6$ мм Поле зрения окуляра ω и телескопа ω' соотносятся как

$$\tan(\omega') = \frac{\tan(\omega)}{\Gamma} = \frac{d\tan(\omega)}{D}$$

$$\Downarrow$$

$$D = \frac{d\tan(\omega)}{\tan(\omega')} \approx 4 \text{ см}$$

Ответ: Примерно 4 см.

Критерии проверки: 8 баллов – верная формула, допущена арифметическая ошибка.

6 баллов – ошибка в формуле (не взяты тангенсы от углов, вместо расстояния между объектами взяты угловые размеры).

3 балла – есть рассуждения, но основные величины найдены неверно.

2 балла – есть попытка решения.

0 баллов – решение отсутствует или не имеет отношения к задаче.

Задача 8.

—Ты кто такая? — воскликнул Крылов. — Ты как в машину попала?
— Я маленькая девочка. Я сместила себя относительно пространства.
Вы меня выслушаете?
Сергей Лукьяненко 'Девочка с китайскими зажигалками'
Сборник 'Именем Земли'.

Алексей едет из пункта A в пункт B на автомобиле. Расстояние между этими пунктами равно N километров. Известно, что с полным баком автомобиль способен проехать k километров. Дана карта, на которой отмечены координаты бензоколонок, относительно пункта A. Определите минимальное число заправок, которые придется сделать Алексею, чтобы успешно достичь пункта B. Известно, что при выезде из пункта A бак был полон.
Входные данные: *в первой строке вводятся числа N и k (натуральные, не превосходят* 1000*). В следующей строке вводится количество бензоколонок S, потом следует S натуральных чисел, не превосходящих N — расстояния от пункта A до каждой заправки. Заправки упорядочены по удаленности от пункта A.*
Выходные данные: *если при данных условиях пункта B достичь невозможно, то выведите число -1. Если решение существует, то выведите минимальное количество остановок на дозаправку, которое нужно, чтобы достичь пункта B.*
Примеры.
Входные данные:
100 20
1 50
Выходные данные:
−1

Входные данные:
100 50
1 50
Выходные данные:
1

Решение.

```
n, k = map(int, input().split())
a=list(map(int, input().split()))
s=a[0]
stations=[0]*s
for i in range(s):
    stations[i]=a[i+1]

stations.append(n)
```

```
current_position = 0
last_refuel_position = 0
num_refuels = 0

for i in range(s + 1):
    if stations[i] - last_refuel_position > k:
       print(-1)
       exit()

    if stations[i] - current_position > k:
       current_position = last_refuel_position
       num_refuels += 1

    last_refuel_position = stations[i]

print(num_refuels)
```

Критерии проверки: 10 - Верное решение
8 - Неверный формат ввода и/ или вывода, либо решение содержит незначительные ошибки
8 - Отсутствует ввод и/ или вывод
6 - Программа работает только для некоторых входных данных, причем на данных из примера работает
4 - Программа работает только для некоторых входных данных, причем не на всех данных из примера работает
2 - Решение неверное, но представляет собой программу

РАЗМИНКА

КЛАСС 11

Полностью совпадает с разминкой для 9 и 10 классов.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

КЛАСС 11

Задача 1.

*— В чем проблема-то... Сообщите координаты, через час
доставим ученым их очень важный груз.
Сергей Лукьяненко 'Очень важный груз'.
Сборник 'Именем Земли'.*

Найдите радиус и координаты центра окружности, проходящей через все точки пересечения парабол $y = x^2 - 1$ и $x = y^2 - 6y + 5$. Приведите полное решение.

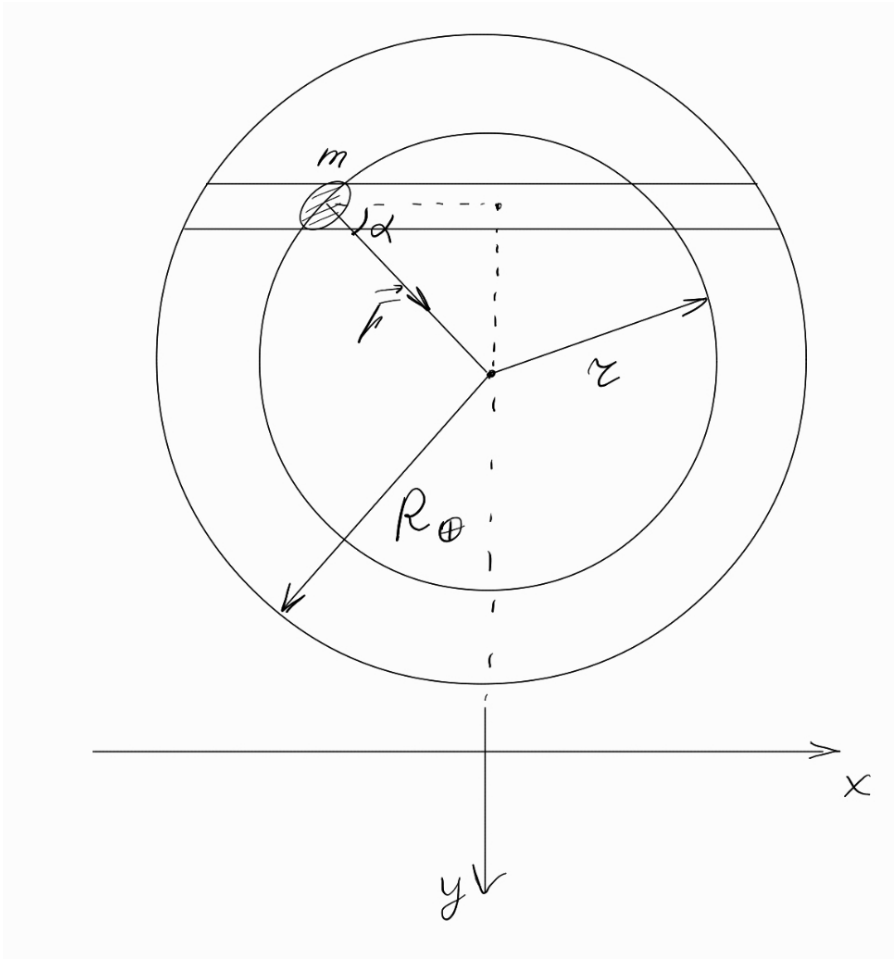
Решение, ответ и критерии проверки этой задачи см. в заданиях для 9-10 классов.

Задача 2.

*— Ломать — не строить, — слегка смутившись, сказал Петрович.
— Увлекся. Я в детстве все мечтал дыру до центра Земли прорыть.
Сергей Лукьяненко 'Стройка века'.
Сборник 'Именем Земли'.*

Между Главным зданием Московского Университета ($55,7^o$ с. ш. и $37,5^o$ в. д.) и космодромом Восточным (52^o с. ш. $128,3^o$ в. д.) прорыт прямолинейный тоннель, в котором проложены рельса. Сколько времени будет двигаться вагон из одного в другой конец туннеля, если отпустить его в Москве без начальной скорости? Найдите максимальную скорость вагона и точку, в которой она достигается. Трением, сопротивлением воздуха, различием широт пунктов и вращением Земли пренебрегите. Плотность Земли считайте одинаковой в любой точке.

Решение: Найдём радиус круга равных широт, на котором находится Москва и космодромом: $r = R_\oplus \cos\varphi \approx 3670$ км
Найдём длину туннеля: $l = (\lambda_{cosm} - \lambda_{msk}) \cdot r \approx 5800$ км Пусть вагон имеет массу m. Когда он находится на расстоянии r от центра Земли, то на него действует только внутренний слой Земли. Масса внутреннего слоя равна $M' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$
Плотность Земли: $\rho = \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3}$
Таким образом, масса внутреннего слоя: $M' = \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M_\oplus r^3}{R_\oplus^3}$



Найдем проекцию гравитационной силы на ось x: $F_x = F\cos\alpha = G\frac{mM'}{r^2}\cos\alpha = -\frac{mxGM}{R_\oplus^3} = -mg\frac{x}{R_\oplus}$
По второму закону Ньютона: $ma = -mg\frac{x}{R_\oplus}$
Ускорение по определению это $\ddot{x} = a$, Таким образом $\ddot{x} + \frac{g}{R_\oplus}x = 0$ – основное уравнение динамики гармонических колебаний.
Таким образом $\omega^2 = \frac{g}{R_\oplus} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R_\oplus}}$.
Значит, вагон будет двигаться от Москвы до космодрома за половину периода одного колебания, то есть $\tau = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi\sqrt{\frac{R_\oplus}{g}} \approx 42$ мин
Очевидно, что максимальная скорость будет посередине туннеля (в точке, которая максимально приближена к центру Земли).
Решение основного уравнения динамики гармонических колебаний равно $x(t) = A\cos\omega t$.
Амплитуда $A = \frac{l}{2}$. Значит, скорость равна $v(t) = \int x(t)dt = \frac{l\omega}{2}\sin\omega t$
Максимальная скорость вагона будет равна $v_{max} = \frac{l\omega}{2} \approx 3,6$ км/с
Ответ: примерно $3,6$ км/с
Критерии проверки: 10 - верное решение
9 - верное решение с опечаткой/арифметической ошибкой, не влияет на дальнейший ход рассуждений, приводит к физически правильному ответу./ Вместо времени движения

указан период колебания/ не учтено различие g при решении через потенциальную энергию

8 - верный ход решения, однако из-за опечатки или арифметической ошибки получен физически абсурдный ответ.

7 - В решение не выведено основное уравнение динамики гармонических колебаний/имеются пробелы в логике решения, но дальнейшее решение верное.

6 - Найден период одного колебания, но нет нет дальнейших продвижений по задаче или они неверные. Или получена максимальная скорость и неверно записано уравнение для периода/гармонических колебаний/не найдено время движения вагона

4 - не получено основное уравнение динамики гармонических колебаний (возможно решение без получения его в явном виде, тогда этот критерий не применяется).

3 - Получена формула для массы внутреннего слоя Земли/ Найдена длина туннеля + Обосновано, что в середине туннеля скорость максимальна

2 - Найдена только длина туннеля , дальнейших продвижений нет.

1 - Обосновано, что в середине туннеля скорость максимальна/ найден угол МСК-центр Земли - космодром. Или записана только формула для п2, но значение не посчитано в явном виде

0 - Решение лишено физического смысла, нет никакого продвижения по задаче или ответ никак не обоснован.

Задача 3.

Итак, после того, как при включении рубильника перегорела вся проводка...
— Ты что, ее последовательно подключал? — охнул Львович.
— А как еще можно? — удивился Петрович.
Сергей Лукьяненко 'Стройка века'.
Сборник 'Именем Земли'.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество всех точек координатной плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-4x+6y-3}{x^2+y^2-2x+4y+4} \le 0, \\ ax - y = 0, \end{cases}$$

образует прямолинейный отрезок.

Решение: В числители дроби стоит выражение $(x-2)^2+(y+3)^2-16$. Приравняв его к нулю, получим уравнение окружности с центром в точке $(2, -3)$ радиуса 4 (назовем эту окружность C_1). В знаменателе стоит выражение $(x-1)^2+(y+2)^2-1$. Аналогично, получим окружность C_2 с центром в $(1, -2)$ радиуса 1. Видим, что вторая окружность целиком находится внутри первой. Таким образом, дробь отрицательна, если точка лежит внутри C_1 (граница входит), но вне C_2. Второе уравнение системы задает прямую $y = ax$, проходящую через начало координат. Остается посмотреть, когда прямая пересекает указанную выше область по отрезку. Касание прямой и окружности C_2 произойдет при таком a, при котором система $y = ax, x^2+y^2-2x+4y+4 = 0$ имеет ровно одно решение. Подставляем и получаем квадратное уравнение. Находим его дискриминант $D/4 = (2a-1)^2 - 4(1+a^2) = -4a-3$ и видим, что он обращается в ноль при $a = -3/4$.
Ответ: $a \in (-3/4, +\infty)$.
Критерии проверки. для геометрического решения: 10 - верно
9 - ошибочно включено граничное значение $= -3/4$ в ответ либо арифметическая ошибка при нахождении граничного положения
8 - неверно выбрано множество отрицательных параметров по граничному, неотрицательные включены в ответ
6 - неверно выбрано множество отрицательных параметров по граничному, неотрицательные не включены в ответ
4 - есть верное положение окружностей на плоскости, верно выбрана область решения системы
2 - выделены уравнения окружностей
штрафы: -2 за ошибку в уравнении окружностей, -2 за неверное положение окружностей на плоскости (далее при полученной автором картинке решение анализировалось по предыдущим критериям).
для аналитического решения: 10 - верно
9 - арифметические ошибки
8 - пробелы в обосновании некоторых случаев

6 - аналитически показано что случай $> -3/4$ (отрицательный дискриминант 2 параболы) подходит, но оставшиеся случаи практически не обосновано отброшены
4 - задача сведена к взаимному расположению двух парабол

Задача 4.

— И правильно, — поддакнул лаборант.
— Я сам студент. Биофак, пятый курс.
Сергей Лукьяненко 'Гаджет'.
Сборник 'Именем Земли'.

В процессе написания курсовой работы студент Костя сталкивается со следующим вопросом из области теории чисел: какие из натуральных чисел N можно представить в виде суммы дробей:

$$N = \frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{3}{n_3} + \ldots + \frac{2024}{n_{2024}},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_{2024}$ — некоторые (не обязательно различные) натуральные числа? Помогите Константину найти все такие числа. Приведите полное решение.

Решение: См. решение и критерии для этой задачи в задании для 9-10 классов.

Задача 5.

Выбегалло неуклюже нажал какую-то кнопку.
Экран слабо засветился синим, и на нем появилась
какая-то желтая таблица с английскими надписями.
Сергей Лукьяненко 'Временная суета'.
Сборник 'Именем Земли'.

Дана таблица, состоящая из N строк и M столбцов. В каждой клетке таблицы записано одно из чисел: 0 или 1. Расстоянием между клетками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) назовем сумму $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Для каждой клетки (i, j) начальной таблицы найдем ближайшую клетку, в которой записано число 1, и вычислим расстояние до этой клетке (если единица записана в клетке (i, j), то расстояние до нее равно 0). Гарантируется, что хотя бы одна единица в таблице есть. Полученное расстояние запишем в клетку (i, j) новой таблицы. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по данной таблице заполняет новую.
Входные данные.
В первой строке вводятся два натуральных числа N и M, не превосходящих 500. Далее идут N строк по M чисел — элементы таблицы.
Выходные данные.
Требуется вывести N строк по M чисел — элементы новой таблицы.
Пример.
Ввод:
2 3
0 0 1
1 0 0
Вывод:
1 1 0
0 1 1

Решение на языке C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

int dist(int x_1, int y_1, int x_2, int y_2){
 return abs(x_1 - x_2) + abs(y_1 - y_2);
}

int main() {
 int N, M, i, j, k, l, d, d1;
 cin >> N >> M;
 const int max_dist = N + M;
 int mat[N][M], res_mat[N][M];
 for (i = 0; i < N; i++)
 for (j = 0 ; j < M; j++)
 cin >> mat[i][j];

 for (i = 0; i < N; i++)
 for (j = 0 ; j < M; j++) // each cell
 if (mat[i][j] == 1)
 res_mat[i][j] = 0;
 else{
  d = max_dist;
  for (k = 0; k < N; k++) // searching for the nearest ""1""
  for (l = 0; l < M; l++)
  if (mat[k][l] == 1 && (d1 = dist(i, j, k, l)) < d)
  d = d1;
  res_mat[i][j] = d;
 }

 for (i = 0; i < N - 1; i++){
  for (j = 0 ; j < M-1; j++) // printing the result
  cout << res_mat[i][j] << ' ';
  cout << res_mat[i][M-1] << endl;
 }
 for (j = 0 ; j < M-1; j++) // printing the result
 cout << res_mat[N-1][j] << ' ';
 cout << res_mat[N-1][M-1];
 return 0;
```

Решение на языке Python:

```
from collections import deque
N, M = map(int, input().split())
```

```
table = [list(map(int, input().split())) for _ in range(N)]
distance = [[-1] * M for _ in range(N)]
queue = deque()
for i in range(N):
 for j in range(M):
  if table[i][j] == 1:
   distance[i][j] = 0
   queue.append((i, j))
directions = [(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)]
while queue:
 x, y = queue.popleft()
 for dx, dy in directions:
  nx, ny = x + dx, y + dy
  if 0 <= nx < N and 0 <= ny < M and distance[nx][ny] == -1:
   distance[nx][ny] = distance[x][y] + 1
   queue.append((nx, ny))
for row in distance:
 print("" "".join(map(str, row)))
```

Критерии проверки: 10 Верное решение
9,5 - Неверный формат ввода и/ или вывода, либо нет вызова функции, в которой реализовано решение
9 - Отсутствие ввода с клавиатуры
6 - Верное решение для матрицы фиксированного размера или только некоторых входных данных
4 - Логически верное решение, содержащее значительные синтаксические ошибки
0 - Нет решения

Задача 6.

Люк упорно не хотел открываться.
Наконец до Ингвара дошло, что автоматика
не собирается выпускать его из станции без скафандра.
Сергей Лукьяненко. '«Л» — значит люди'.
Сборник 'Именем Земли'.

Космонавт в скафандре суммарной массой $m_k = 200$ кг связан страховочным тросом длиной $L = 100$ м с космической станцией массой M ($M >> m_k$), движущейся вокруг Земли (радиус Земли $R = 6400$ км) по круговой орбите. Высота орбиты движения космической станции $H = 400$ км. Определите натяжение троса, если известно, что он все время ориентирован вдоль радиуса, направленного к центру Земли. Массу троса не учитывайте. Считайте Землю шаром с однородным распределением плотности. Ускорение свободного падения на поверхности Земли примите равным $g_0 = 9,8$ м/с^2/.

Решение: Центростремительное ускорение космической станции равно $a_1 = \omega^2(R+H)$, где ω — частота обращения станции вокруг центра Земли. Для космонавта ускорение равно $a_2 = \omega^2(R + H + L)$, т.е. со стороны космонавта возникает дополнительная сила $F = m(a_2 - a_1)$, которая и натягивает трос. Поскольку $\omega^2 = \dfrac{GM}{(R+H)^3}$, где M — масса Земли, а G — гравитационная постоянная, то получаем $F = mL\dfrac{GM}{(R+H)^3}$. Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно $g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$. Тогда $F = mL\dfrac{g_0R^2}{(R+H)^3} \approx 25,5$ Н.

Ответ: $25,5$ Н.

Критерии проверки: 10 - верное решение

9 - верное решение с 1-ой арифметической ошибкой

8 - расписано решение, получена формула с небольшой ошибкой / не посчитан численно ответ

7 - неверно расписано 1 из ускорений / сила

5 - неправильно расписаны центростремительные ускорения / представлены формулы для других ускорений, формула для силы верная

4 - неправильно расписаны центростремительные ускорения / формула для силы не верная.

2 - есть что-то разумное.

Задача 7.

Львович вздохнул и посмотрел в иллюминатор.
Их офис располагался в старой космической станции
на геостационарной орбите... если честно — дыра дырой!
Сергей Лукьяненко 'Сухими из воды'.
Сборник 'Именем Земли'.

Искусственный спутник Земли совершает полет по орбите с периодом T с и осуществляет съемку поверхности Земли. На спутнике установлена фотокамера с объективом. Линейные размеры матрицы фотокамеры: $a \times a$ см^2, количество пикселей: $N \times N$. Считая объектив состоящим из одной тонкой линзы, найдите ее фокусное расстояние F см, если такая фотокамера позволяет пространственное разрешение снимка местности L м.

Решение: Пусть размеры матрицы $a \times a$, а число пикселей $N \times N$. Тогда размер одного пикселя $d = \dfrac{a}{N}$. Разрешающая способность позволяет уместить в пределах одного пикселя объект размера L. Его угловой размер $\rho = \dfrac{L}{H}$, где H — высота орбиты. Пусть F — фокусное расстояние линзы. Тогда $d = \rho F$, $F = \dfrac{aH}{LN}$. Находим высоту орбиты $H = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}} - R$, где R — радиус Земли, M — масса Земли, G — гравитационная постоянная, T — период обращения. Тогда

$$\textbf{Ответ:} \quad F = \frac{a}{LN}\left(\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R\right).$$

Критерии проверки: 10 - верное решение
9 - верное решение, однако ответ получен неправильный (неправильно что-то сократил)
5 - правильно записаны некоторые выражения (для размера одного пикселя / углового размера / общая формула для фокусного расстояния линзы), не расписана высоту орбиты / представлено неверное выражение для высоты орбиты
2 - есть что-то разумное.

Задача 8.

—Ты кто такая? — воскликнул Крылов. — Ты как в машину попала?
— Я маленькая девочка. Я сместила себя относительно пространства.
Вы меня выслушаете?
Сергей Лукьяненко 'Девочка с китайскими зажигалками'
Сборник 'Именем Земли'.

Алексей едет из пункта A в пункт B на автомобиле. Расстояние между этими пунктами равно N километров. Известно, что с полным баком автомобиль способен проехать k километров. Дана карта, на которой отмечены координаты бензоколонок, относительно пункта A. Определите минимальное число заправок, которые придется сделать Алексею, чтобы успешно достичь пункта B. Известно, что при выезде из пункта A бак был полон.

Входные данные: *в первой строке вводятся числа N и k (натуральные, не превосходят* 1000*). В следующей строке вводится количество бензоколонок S, потом следует S натуральных чисел, не превосходящих N — расстояния от пункта A до каждой заправки. Заправки упорядочены по удаленности от пункта A.*

Выходные данные: *если при данных условиях пункта B достичь невозможно, то выведите число -1. Если решение существует, то выведите минимальное количество остановок на дозаправку, которое нужно, чтобы достичь пункта B.*

Примеры.

Входные данные:
100 20
1 50
Выходные данные:
-1

Входные данные:
100 50
1 50
Выходные данные:
1

Решение: См. решение и критерии для этой задачи в заданиях для 9–10 классов.