Задача 1

В-1 Различные целые числа m и n таковы, что числа $\left(\dfrac{1}{m}-2\right)$ и $\left(\dfrac{1}{n}-2\right)$ являются корнями квадратного трехчлена x^2+ax+b с целыми коэффициентами. Найти все возможные значения выражения $a+b$.

Ответ: 7

Решение. Числа $\dfrac{1}{m}-2$ и $\dfrac{1}{n}-2$ являются рациональными. По теореме Виета имеем:

$$\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2=-a\in\mathbb{Z};$$
$$\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)=b\in\mathbb{Z}.$$

Из первого уравнения следует, что $m+n=(4-a)mn$. Тогда из второго уравнения имеем:

$$\frac{1-2(m+n)}{mn}=b-4,\ \Rightarrow\ \frac{1-2(4-a)mn}{mn}=b-4,\ \Rightarrow\ \frac{1}{mn}-2(4-a)=b-4,\ \Rightarrow\ \frac{1}{mn}=b-2a+4\in\mathbb{Z}.$$

Значит, $mn=\pm1$, следовательно, так как они целые и различные, то либо $m=1$, $n=-1$, либо $m=-1$, $n=1$. То есть -3 и -1 — корни квадратного трехчлена. Тогда (по теореме Виета) $a=4$, $b=3$, $a+b=7$.

Задача 2

В-1 Бросается стандартная игральная кость (кубик, от 1 до 6 очков на грани, сумма очков на противоположных гранях равна семи). После броска записываем результат, перекатываем кубик случайным образом на одну из соседних граней, записываем новый результат, потом снова случайно перекатываем кубик на одну из соседних граней, и записываем третий результат.

Сколько разных возрастающих последовательностей очков мы можем получить?

Ответ: 14

Решение. Мы получаем последовательность цифр $x - y - z$ с цифрами от 1 до 6. Возможна не каждая последовательность — числа с каждым ходом меняются, при этом невозможны соседства 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, так как они располагаются на противоположных гранях, и одним перекатом между ними не перейти. Выпишем и подсчитаем все возрастающие последовательности чисел, подходящие под такие условия.

4-5-6
3-5-6
2-3-5
2-3-6
2-4-5
2-4-6
1-2-3
1-2-4
1-2-6
1-3-5
1-3-6
1-4-5
1-4-6
1-5-6

Всего их 14.

Задача 3

B-1 Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}, \quad a,\, b,\, c>0.$$

Ответ: 3

Решение. Проведем цепочку упрощающих преобразований:

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3$$

В соответствии с неравенством о среднем можно заметить, что

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2c; \qquad \frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\geq 2b; \qquad \frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2a.$$

При этом равенства достигается при $a=b=c$.

Отсюда следует, что

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$$

Это значит, что минимум всего исходного выражения равен 3 и достигается при $a=b=c$

Задача 4

В-1 В кино пришли 5 девочек, 3 мальчика и учительница. Все они расселись в первом ряду, в котором места пронумерованы от 1 до 10. По пути в кинотеатр 5 девочек начали активно общаться, и учительница решила, что сажать их рядом небезопасно. Между любыми двумя девочками должно быть минимум одно место: или незанятое, или занятое мальчиком или учительницей. Сколько различных способов рассадки имеется? (Два способа отличаются, если хотя бы один из участников группы сидит на местах с разными номерами.)

Ответ: 86400

Решение. Обозначим девочек буквой Д (таких букв 5). Между буквами Д должен быть какой-то из «разделителей» (или больше одного разделителя): или мальчик, или учительница, или свободное место. Обозначим разделитель буквой Р – таких букв $3 + 1 + 1 = 5$. Расположим девочек слева направо и расположим между ними по одному разделителю: Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д. В результате останется вставить еще одну букву Р. Это можно сделать 6 способами (получаются варианты типа Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д, Д – Р – Д – Р – Д – Р – Р – Д – Р – Д и т. п.). В каждом из указанных вариантов так как все девочки – разные, и все «разделители» разные, есть $5! \cdot 5!$ способов переставить их местами, оставаясь в рамках данного варианта. Таким образом, количество способов рассадки равно: $6 \cdot 5! \cdot 5! = 6 \cdot 120^2 = 86400$.

Задача 5

В-1 На стороне AC треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $\angle ABM = 15^\circ$, $\angle MBN = 45^\circ$ и $\angle NBC = 75^\circ$, а сумма и произведение площадей треугольников ABM и NBC равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 6

Решение. Обозначив $S = S_{\triangle ABC}$ и $s = S_{\triangle MBN}$, имеем

$$S - s = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NBC} = 5, \quad Ss = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin(15^\circ + 45^\circ + 75^\circ) \cdot \frac{1}{2}MB \cdot NB \sin 45^\circ =$$
$$= \frac{1}{8}AB \cdot BC \cdot MB \cdot NB = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BM \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2}NB \cdot BC \sin 75^\circ = 2S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC} = 6,$$

так как $\sin(90^\circ + 45^\circ)\sin 45^\circ = \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$ и $\sin 15^\circ \sin 75^\circ = \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}$. Поэтому числа S и $-s$ образуют пару корней квадратного трёхчлена $\sigma^2 - 5\sigma - 6 = (\sigma - 6)(\sigma + 1)$, откуда $S = 6$.

Задача 6

В-1 В кувшин залили 7 литров воды. Ровно через сутки в кувшин добавили 5 литров воды, и эту операцию повторяли каждые очередные сутки. В промежутках между доливаниями из кувшина успевали выпить ровно половину воды, имевшейся после предыдущей заливки.

a) Какого минимального объёма должен быть кувшин, чтобы он никогда не мог наполниться при данных условиях?

b) На какой день кувшин такого объёма впервые окажется наполнен не менее, чем на 99,9 процента?

Ответ: 10 литров, 10-й день.

Решение. Пусть в начале в кувшин налили b литров воды, по прошествии каждых суток оставалось $100 \cdot q$ процентов имевшейся на начало суток воды, и доливалось c литров воды. Обозначим через a_k количество воды в кувшине после долива очередных c литров в k-тый день. Тогда

$$a_1 = b, \quad a_2 = qb + c, \quad a_3 = q^2 b + qc + c, \quad \ldots \quad ,$$

$$a_k = q^{k-1} b + q^{k-2} c + \ldots qc + c = q^{k-1} b + c\frac{1 - q^{k-1}}{1 - q} = \frac{c}{1 - q} + q^{k-1}\left(b - \frac{c}{1 - q}\right).$$

Таким образом, поскольку во всех задачах выполнено условие $b - c(1-q)^{-1} < 0,\ q < 1$, кувшин никогда не наполнится, если его объём будет не менее $V = c(1-q)^{-1}$ литров. В условиях задачи $c = 5$, а $q = \frac{1}{2}$, поэтому $V = 10$.

Ответом на второй вопрос задачи будет наименьшее натуральное решение неравенства

$$a_k \geq 0,999 \cdot V \Leftrightarrow V + q^{k-1}(b - V) \geq 0,999 \cdot V \Leftrightarrow k \geq 1 + \log_{q^{-1}} \frac{V - b}{V} 10^3.$$

То есть

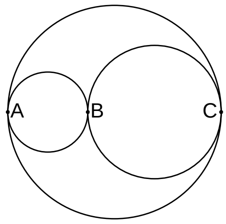
$$k \geqslant 1 + \log_2 \frac{10 - 7}{10} 10^3 = 1 + \log_2 300$$

Такой логарифм больше 8, но меньше 9 (т.е. $2^8 = 256 < 300 < 512 = 2^9$), так что k равно 10.

Задача 7

В-1

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180^o. По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг BC длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг AC — за 17 минут. Выехав из точки A, автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



Ответ: 190

Решение. Рассмотрим варианты, которыми находящийся в точке A автомобиль может в следующий раз впервые снова оказаться в этой точке.

Во-первых, можно сделать это, не проходя через точку C, т. е. путем ABA.

Во-вторых, можно одним из двух способов (AC или ABC) добраться до точки C, сделать несколько кругов CBC («несколько» может быть и нулем) и вернуться одним из двух способов (CA или CBA) в точку A.

В любом случае мы либо четное число раз проезжаем по 7-минутной дуге, четное число раз по 11-минутной и четное число раз по 17-минутной, либо наоборот, нечетное число раз по каждому из трех типов дуг.

То же самое можно сказать про неоднократное возвращение в точку A.

«Четный» случай нам не подходит, так как по условию на каждую дугу уходит целое число минут, а общее время выражается в минутах нечетным числом.

Заметим, что любая тройка нечетных положительных чисел может быть реализована в качестве числа проходов (в любом направлении) дуг 1) AB, 2) BC, 3) AC. Действительно, выехав из точки A и сделав заданное нечетное число проходов AB, мы окажемся в точке B, после чего, сделав заданное нечетное число проходов BC, мы окажемся в точке C, а после заданного нечетного числа проходов AC — снова в точке A.

Итак, попробуем найти три таких нечетных положительных числа i, j, k, что

$$7i + 11j + 17k = 60 + 25 = 85.$$

Для k возможны 3 варианта: 5, 3, 1.

Первый случай отбрасываем, так как для него получаем $i = j = 0$.

Во втором случае имеем $7i + 11j = 34$. Если $j \geq 3$, то $i < 1$. При $j = 1$ число $34 - 11 \cdot 1 = 23$ не делится на 7.

Наконец, при $k = 1$ имеем $7i + 11j = 68$. Для $j = 5, 3, 1$ получим $7i = 13, 35, 57$, откуда $j = 3, i = 35 : 7 = 5$, а пройденный путь равен $15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 190$ (км). Здесь 40=15+25 — длина дуги AC, которую находим геометрически. ($AC = \pi R = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = AB + BC$, где R, r_1, r_2 — радиусы.)