Задача 1

В-1 Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

Ответ: 5355

Решение. С выбором вратаря проблем нет: $C_3^1 = 3$ способа. При выборе защитника есть 3 возможности: а) оба защитника выбираются из 5-ти защитников: $C_5^2 = (5 \cdot 4)/2 = 10$; тогда при выборе нападающих есть $6 + 3 = 9$ претендентов; б) один защитник выбирается из 5-ти защитников, а второй из 3-х «универсалов»; тогда при выборе нападающих есть $6 + 2 = 8$ претендентов; в) оба защитника выбираются из 3-х «универсалов»; тогда при выборе нападающих есть $6 + 1 = 7$ претендентов. Таким образом, общее количество вариантов равно:

$$C_3^1(C_5^2 \cdot C_9^3 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3 + C_3^2 \cdot C_7^3) =$$

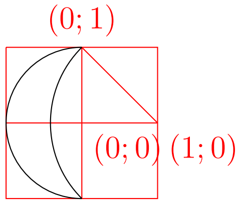
$$= 3 \cdot \left(\frac{(5 \cdot 4)}{2} \cdot \frac{(9 \cdot 8 \cdot 7)}{(2 \cdot 3)} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6)}{(2 \cdot 3)} + \frac{(3 \cdot 2)}{2} \cdot \frac{(7 \cdot 6 \cdot 5)}{(2 \cdot 3)} \right) =$$

$$= 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 3) = 105 \cdot (24 + 24 + 3) = 5355.$$

Задача 2

В-1

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в $(0;0)$, проходящей через $(0;1)$, другая — от окружности с центром в $(1;0)$, проходящей через $(0;1)$.

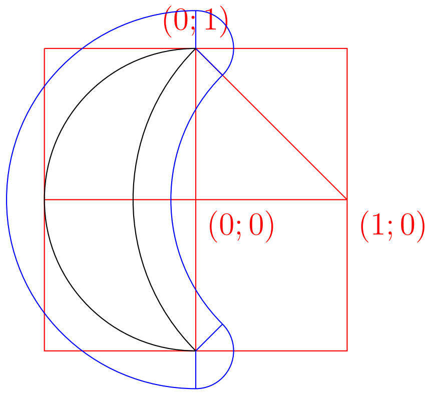


К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса 0.5. Найдите площадь получившейся фигуры.

Ответ:

$$1+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Решение. Пусть рисунок расплылся на радиус r. К площади полумесяца прибавятся «поля», которые можно разбить на левое, правое и два закругления на концах рогов.



Площадь полумесяца равна половине площади круга радиуса 1 минус сегмент круга радиуса $\sqrt{2}$.

$$\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi-4}{4}=1.$$

Площадь левого поля — половина от площади кольца с радиусами 1 и $1+r$.

$$\frac{\pi(1+r)^2-\pi}{2}.$$

Площадь правого поля — четверть от площади кольца с радиусами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}-r$.

$$\frac{\pi(\sqrt{2})^2-\pi(\sqrt{2}-r)^2}{4}.$$

Закругления на концах рогов вместе составляют три четверти окружности радиуса r.

$$\frac{3}{4}\pi r^2.$$

Вместе получается:

$$1+\frac{\pi(1+r)^2-\pi}{2}+\frac{\pi(\sqrt{2})^2-\pi(\sqrt{2}-r)^2}{4}+\frac{3}{4}\pi r^2=$$

$$=1+\pi r+\frac{\pi}{2}r^2+\frac{\pi\sqrt{2}r}{2}-\frac{\pi}{4}r^2+\frac{3\pi}{4}r^2=1+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi r+\pi r^2$$

Задача 3

B-1 Решите уравнение: $|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\dfrac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0.$

Ответ: $(3;-2)$

Решение. Если $x<0$, то при любом y решения нет, так как левая часть уравнения будет строго положительна. Если $x>0$, $y>0$, то решения тоже нет по той же причине. Остается вариант $x>0$, $y<0$. В этом случае у равнение приводится к виду

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|=0,$$

который равносилен системе уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3-19=0, \\ x^2y+xy^2+6=0. \end{cases}$$

После замены переменных $x+y=u$, $xy=v$ система сведется к следующему виду

$$\begin{cases} u(u^2-3v)=19, \\ u\cdot v=-6. \end{cases}$$

Прибавляем к первому уравнению второе, умноженное на три, и получаем $u^3=1, \Rightarrow u=1$. Значит (из второго уравнения), $v=-6$.

В исходных переменных задача свелась к системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x\cdot y=-6, \end{cases}$$

которая с помощью обратной теоремы Виета сводится к решению квадратного уравнения

$$t^2-t-6=0 \Rightarrow t=3,\ t=-2 \Rightarrow (x=3;\ y=-2)$$

Задача 4

В-1 На стороне AC треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $\angle ABM = 15^\circ$, $\angle MBN = 45^\circ$ и $\angle NBC = 75^\circ$, а сумма и произведение площадей треугольников ABM и NBC равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 6

Решение. Обозначив $S = S_{\triangle ABC}$ и $s = S_{\triangle MBN}$, имеем

$$S - s = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NBC} = 5, \quad Ss = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin(15^\circ + 45^\circ + 75^\circ) \cdot \frac{1}{2}MB \cdot NB \sin 45^\circ =$$
$$= \frac{1}{8}AB \cdot BC \cdot MB \cdot NB = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BM \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2}NB \cdot BC \sin 75^\circ = 2S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC} = 6,$$

так как $\sin(90^\circ + 45^\circ)\sin 45^\circ = \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$ и $\sin 15^\circ \sin 75^\circ = \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}$. Поэтому числа S и $-s$ образуют пару корней квадратного трёхчлена $\sigma^2 - 5\sigma - 6 = (\sigma - 6)(\sigma + 1)$, откуда $S = 6$.

Задача 5

В-1 Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c}, \quad a,\, b,\, c > 0.$$

Ответ: 3

Решение. Проведем цепочку упрощающих преобразований:

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$$

В соответствии с неравенством о среднем можно заметить, что

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c; \qquad \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \geq 2b; \qquad \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a.$$

При этом равенства достигается при $a = b = c$.

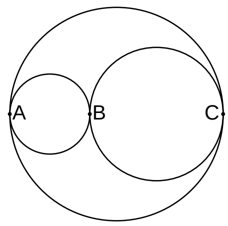
Отсюда следует, что

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

Это значит, что минимум всего исходного выражения равен 3 и достигается при $a = b = c$

Задача 6

В-1



Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180^o. По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг BC длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг AC — за 17 минут. Выехав из точки A, автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?

Ответ: 190

Решение. Рассмотрим варианты, которыми находящийся в точке A автомобиль может в следующий раз впервые снова оказаться в этой точке.

Во-первых, можно сделать это, не проходя через точку C, т. е. путем ABA.

Во-вторых, можно одним из двух способов (AC или ABC) добраться до точки C, сделать несколько кругов CBC («несколько» может быть и нулем) и вернуться одним из двух способов (CA или CBA) в точку A.

В любом случае мы либо четное число раз проезжаем по 7-минутной дуге, четное число раз по 11-минутной и четное число раз по 17-минутной, либо наоборот, нечетное число раз по каждому из трех типов дуг.

То же самое можно сказать про неоднократное возвращение в точку A.

«Четный» случай нам не подходит, так как по условию на каждую дугу уходит целое число минут, а общее время выражается в минутах нечетным числом.

Заметим, что любая тройка нечетных положительных чисел может быть реализована в качестве числа проходов (в любом направлении) дуг 1) AB, 2) BC, 3) AC. Действительно, выехав из точки A и сделав заданное нечетное число проходов AB, мы окажемся в точке B, после чего, сделав заданное нечетное число проходов BC, мы окажемся в точке C, а после заданного нечетного числа проходов AC — снова в точке A.

Итак, попробуем найти три таких нечетных положительных числа i, j, k, что

$$7i + 11j + 17k = 60 + 25 = 85.$$

Для k возможны 3 варианта: 5, 3, 1.

Первый случай отбрасываем, так как для него получаем $i = j = 0$.

Во втором случае имеем $7i + 11j = 34$. Если $j \geq 3$, то $i < 1$. При $j = 1$ число $34 - 11 \cdot 1 = 23$ не делится на 7.

Наконец, при $k = 1$ имеем $7i + 11j = 68$. Для $j = 5, 3, 1$ получим $7i = 13, 35, 57$, откуда $j = 3, i = 35 : 7 = 5$, а пройденный путь равен $15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 190$ (км). Здесь 40=15+25 — длина дуги AC, которую находим геометрически. ($AC = \pi R = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = AB + BC$, где R, r_1, r_2 — радиусы.)

Задача 7

В-1 Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью Ox и графиком некоторой параболы $y = a - bx^2$). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 24, высота туннеля равна 18. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки A, B, C, D и соединили их между собой балками. Балки AB и CD параллельны полу, AD пересекается с BC, и при этом $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ Найдите расстояние между балками AB и CD.

Ответ: 8

Решение. Допустим, ширина тоннеля равна $2l$, а высота равна h. Из этих параметров однозначно выводятся параметры параболы: x принадлежит отрезку $[-l, l]$, а $y(l) = y(-l) = 0$, так что

$$y(x) = h - \frac{hx^2}{l^2}.$$

Теперь зададим координаты точек так:

$$A = \left(x_1, h\left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)\right), B = \left(-x_1; h\left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)\right), C = \left(x_2; h\left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right)\right), D = \left(-x_2; h\left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right)\right)$$

Так как AB и CD параллельны полу, понятно, что ординаты A и B одинаковы, значит, абсциссы отличаются только знаком. Аналогично для C и D.

Тогда перпендикулярность AC и CB, AD и DB можно выразить, например, через равенство нулю скалярных произведений. Достаточно рассмотреть одну пару, так как рисунок симметричен.

$$AC = \left(x_2 - x_1; \frac{h}{l^2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right), \quad CB = \left(-x_1 - x_2; \frac{h}{l^2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right)$$

$$AC \cdot CB = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2)^2 = -(x_2^2 - x_1^2) - \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2)^2 = 0$$

Выносим множитель:

$$-\left(x_2^2 - x_1^2\right)\left(\frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2) + 1\right) = 0$$

То есть либо $(x_2^2 - x_1^2) = 0$ (но балки не совпадают, поэтому такой вариант не пойдёт), либо

$$(x_2^2 - x_1^2) = -\frac{l^4}{h^2}.$$

А расстояние между балками — это

$$\left|\frac{h}{l^2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right|,$$

или, после подстановки,

$$\frac{l^2}{h}.$$

Задача 8

В-1 Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n. Найти наибольшее 100-значное натуральное число n, удовлетворяющее условию: для всех натуральных m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ справедливы равенства $S(mn) = S(n)$.

Ответ: $n = 10^{100} - 1$.

Решение. Найдем все натуральные числа n с таким свойством. Среди однозначных чисел таким свойством, очевидно, обладает $n = 1$, и несложно проверить, что $n = 9$ также обладает таким свойством.

Пусть n — k-разрядное число $(k \geqslant 2)$. Тогда $10^{k-1} \leqslant n < 10^k - 1$. Очевидно, что число вида 10^{k-1} не обладает этим свойством. Рассмотрим $n \geqslant 10^{k-1} + 1$. Тогда для $m = 10^{k-1} + 1 \leqslant n$ должно выполняться равенство

$$S(mn) = S((10^{k-1} + 1)n) = S(n).$$

Пусть a — старшая цифра числа n $\left(a = \left[\frac{n}{10^{k-1}}\right]\right)$. Тогда

$$S((10^{k-1} + 1)n) = S(n + a) + S(n) - a$$

и равенство $S((10^{k-1}+1)n) = S(n)$ возможно только если $S(n+a) = a$. Так как у n цифра a уже стоит в старшем разряде, это возможно только если число $n+a$ переходит в следующий разряд, т.е. имеет вид $10^k - b$ $(1 \leqslant b \leqslant 9)$. Так как $S(2n) = S(n)$, то $S(2n)$ и $S(n)$ имеют одинаковый остаток при делении на 9, а значит n делится на 9.

Несложно проверить, что для $n = 10^k - 1$ выполнено $S(mn) = S(n) = 9k$.