Олимпиада «Ломоносов» 2023/24

Инженерные науки

Оглавление

6-8 классы

Задача 1.

Семья едет на автомобиле из дома на дачу. Первую половину пути они движутся по автомагистрали, а затем сворачивают на проселочную дорогу и скорость автомобиля уменьшается в три раза. Во сколько раз путь, пройденный за первую половину времени движения по автомагистрали больше, чем за вторую? Чему равна средняя скорость за первую половину времени, если средняя скорость на всем пути $v_0 = 60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Возможное решение:

Обозначим за v скорость на второй половине пути. Тогда на первой она равна nv, а все время движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{2v}\left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

Так как $n > 1$, то за вторую половину времени автомобиль пройдет путь $S_2 = v\frac{t}{2} = \frac{S(n+1)}{4n}$, а за первую $S_1 = S - S_2 = \frac{S(3n-1)}{4n}$.

Тогда искомое отношение $\frac{3n-1}{n+1} = 2$.

Время движения можно записать в виде: $t = \frac{S}{v_0}$. Тогда

$$v_1 = \frac{S_1}{t/2} = v_0\frac{2S_1}{S} = v_0\frac{3n-1}{2n} = 80\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии:

1. Правильная запись выражения для соотношения скоростей – 2 балла
2. Расчет времени прохождения каждой половины пути — 7 баллов.
2. Расчет пройденного пути на каждом временном интервале— 9 баллов.
3. Формула для средней скорости —7 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 2.

Пропускная способность аэропорта Шереметьево составляет 110 бортов в час (взлетов и посадок). В среднем вместимость одного самолета составляет 180 человек, при этом средняя заполненность салона – 80%.

За 2022 год пассажиропоток аэропорта составил 28.4 млн человек.

1. Рассчитайте, сколько в среднем взлетов/посадок в час происходит днем, если считать, что ночью с 1:00 до 5:00 количество бортов уменьшается в 10 раз.

2. Во сколько раз больше пассажиров мог бы обслужить аэропорт, если бы 24 часа в сутки работал с максимальной пропускной способностью?

Возможное решение:

Один самолет в среднем перевозит 180*0.8=144 пассажира
За день аэропорт обслуживает 28.4 млн/365 дней = 77 808 чел/день
В сутках 24 часа, из них 4 часа (с 1:00 до 5:00) – ночь и 20 часов – день. Примем за x количество бортов в час ночью, составим уравнение:
4*144x+20*144*10x=77 808
576x+28800x = 77 808
X=77808/(28800+576)=2.6

Днем происходит 10x=26 взлетов\посадок в час в среднем

Если бы аэропорт работал на максимум, он бы обслуживал в час:
144*110 = 15840 человек
В год:
15840*24(часа)*365(дней)=138 758 400 человек, что в
138 758 400/28 400 000 = 4.9 раз больше, чем сейчас

Критерии:

1. Ответ на первый вопрос верный, но решения нет — 3 балла
1. Ответ на второй вопрос верный, но решения нет — 2 балла
2. Описаны правильно формулы и верна логика — 10 баллов.
3. Проведены расчеты и получен верный ответ — 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 3.

При закалке ножа кузнец Прохор раскаленный железный клинок массой $m_ж = 100$ г при температуре $t_ж = 600^0$C бросает в воду массой $m_в = 200$ г при температуре $t_в = 20^0$C. Определить установившуюся температуру воды, пренебрегая теплообменом с окружающей средой за время ее установления. Теплоемкость воды $c_в = 4200\frac{Дж}{кг\cdot°C}$, железа $с_ж = 640\frac{Дж}{кг\cdot°C}$, удельная теплота парообразования воды $L_в = 2.3\frac{МДж}{кг}$.

Возможное решение:

До достижения железом температуры 100^0C при теплообмене испарится часть воды массой:

$$m_1 = \frac{с_ж m_ж(t_ж - t_к)}{L_в}$$

Оставшаяся масса воды нагреется при теплообмене согласно уравнения теплового баланса:

$$(m_в - m_1)c_в(t - t_в) = с_ж m_ж(t_к - t)$$

Подставляя численные значения, получаем $t = 26{,}14°C$.

Критерии:

1. Учет испарения воды – 5 баллов
2. Уравнение теплового баланса воды и железа— 10 баллов / уравнение теплового баланса воды и железа с учетом испарения воды – 13 баллов.
3. Численный расчет — 7 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 4.

Содержание витамина С в разных фруктах указано в таблице. Сколько яблок, бананов и апельсинов необходимо в неделю выдавать 6-классникам в столовой летнего лагеря, чтобы покрыть необходимость в витамине С. Норма потребления для детей 9-13 лет составляет примерно 50 мг/день. Фрукты выдаются только целыми. Допускается превышение дневной дозы не более, чем в два раза, однако суммарное количество за неделю должно быть в пределах нормы, при этом количество выдаваемых фруктов в день от 1 до 2. Предложите все возможные варианты.

Фрукт	Средний вес фрукта	Содержание витамина на 100 г
яблоко	200 г	5 мг
банан	150 г	10 мг
апельсин	200 г	50 мг

Возможное решение:

В 1 яблоке 10 мг

В банане – 15 мг

В апельсине 100 мг

Составим уравнение, которое должно быть решено в целых числах, сумма которых не менее 7 и не более 14

10*x + 15*y + 100 *z = 50*7

Z=3, x=5, y=0

Z=3, x=3, y=2

Z=2, x=0, y=10

Z=2, x= 3, y=8

Z=2, x=6, y=6

Критерии

1. За каждый правильный вариант ответа без приведенного решения – 2 балла (12 баллов за все верные ответы)
2. Рассчитаны количества витамина С в каждом фрукте – 6 балла
3. Составлено правильно уравнение – 2 балла
4. Проведены расчеты и получены верные ответы—6 баллов.
5. Рассчитана норма на неделю – 1 балл.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

9-10 классы

Задача 1.

Студенты разбирали старый склад реактивов и нашли три неподписанные банки. В одной находились оранжевые кристаллы (А), во второй белый порошок, который при растворении дает синий раствор (В), а в третьей – жидкость с резким запахом (С)

Чтобы узнать, что в банках, они решили провести реакции между всеми веществами попарно (вещества А и В предварительно растворили в воде) и получили вот такую таблицу с результатами:

	A	B	C
A	-	Реакция не идет	Сначала раствор желтеет, затем при нагревании выделяется бесцветный газ без запаха и выпадает серо-зеленый осадок (D)
B		-	При медленном добавлении С к раствору В сначала выпадает голубой осадок, который при дальнейшем добавлении С растворяется и образуется темно-синий раствор

Кроме того, они выяснили, что вещество В не разлагается при нагревании до 600^oC

Какие вещества находились в банках? Напишите уравнения всех проведенных реакций. Какие еще методы можно использовать для доказательства?

Возможное Решение:

А – $K_2Cr_2O_7$

В – $CuSO_4$

С – NH_4OH

1. $K_2Cr_2O_7$ + (**2**NH_4OH) → $KCrO_4$

2. $K_2Cr_2O_7$ + **2**NH_4OH (нагрев) → $Cr_2O_3 + N_2$ + **2**KOH + **4**H_2O

3. $CuSO_4 + NH_4OH = Cu(OH)_2 + (NH_4)_2SO_4$

4. $Cu(OH)_2 + NH_4OH = [Cu(NH_3)_4](OH)_2 + H_2O$

Варианты дополнительных методов:

Реакция с солями Ba – белый осадок с SO_4^{2-}, желтый с Cr_2O_7

Цвет пламени – $CuSO_4$ – сине-зеленый, $K_2Cr_2O_7$ - фиолетовый

Критерии.

1. Правильно определено вещество – 2 балла за каждое (максимально 6 баллов); правильно определен ион – 1 из 2 баллов.
2. Правильно составлены уравнения реакций – по 3 балла за каждое (максимально 12 баллов)
3. Правильно выполнено уравнивание ОВР (реакция 2) и расставлены верные коэффициенты – 3 балла
4. Приведены дополнительные методы исследования – по 2 балла за каждый подходящий метод (не более 4 суммарно)

   Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 2.

В большой стеклянный сосуд налили 50 ложек некоторого раствора различной концентрации (по массе). Первая ложка содержала 1%-й раствор, вторая ложка – 2%-й раствор, третья – 3%-й раствор и т.д. Последняя, пятидесятая, ложка содержала 50%-й раствор. Какова концентрация получившегося раствора в большом стеклянном сосуде? Считать, что все ложки имеют одинаковый объём.

Возможное Решение:

Согласно определению, массовая концентрация определяется как отношение массы растворённого вещества к объёму раствора (растворителя) по формуле:

$$c = \frac{m_{вещества}}{V_{растворителя}} \cdot 100\% \text{ (или } c = \frac{m_{вещества}}{V_{растворителя}}\text{).}$$

Обозначим объём растворителя в ложке через *V*.

Тогда концентрация раствора в первой ложке равна $c_1 = \frac{m_1}{V}$, во второй ложке равна $c_2 = \frac{m_2}{V}$, …. , пятидесятой ложке $c_{50} = \frac{m_{50}}{V}$. Здесь m_1, m_2, …, m_{50} – массы соли в первой, второй, …., пятидесятой ложках соответственно.

Значит, $m_1 = c_1 \cdot V$; $m_2 = c_2 \cdot V$; … $m_{50} = c_{50} \cdot V$, где c_1 = 1%; c_1 = 2%; …, c_{50} = 50%.

Тогда концентрация получившегося раствора соли в большом стеклянном сосуде равна:

$$c = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_{50}}{V \cdot 50} \cdot 100\%$$

Окончательно получаем:

$$c = \frac{c_1 \cdot V + c_2 \cdot V + ... + c_{50} \cdot V}{V \cdot 50} = \frac{c_1 + c_2 + ... + c_{50}}{50} = \frac{1\% + 2\% + ... + 50\%}{50} =$$
$$= \frac{(1+50) \cdot 50/2}{50} = 25{,}5\%$$

Примечание. Для вычисления числителя дроби полезно воспользоваться формулой для суммы арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Здесь $a_1 = 1$; $a_n = 50$; $n = 50$.

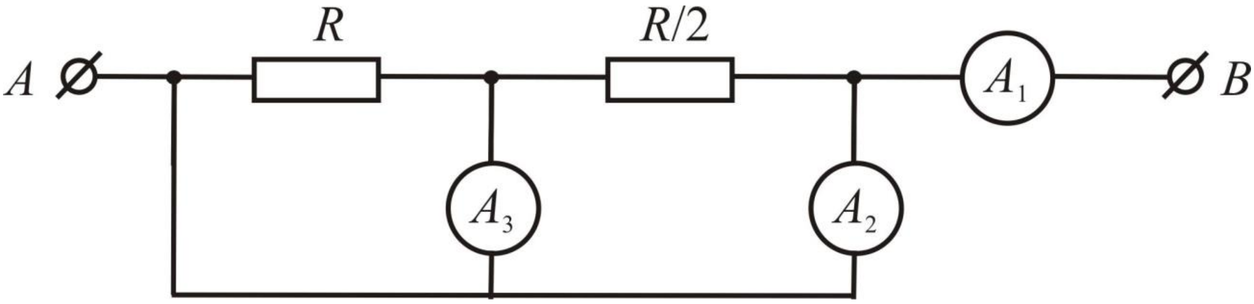
Ответ: Концентрация получившегося раствора в большом стеклянном сосуде равна $c = 25{,}5\%$.

Критерии:

1) Записаны формулы для нахождения масс соли в первой, второй, ..., пятидесятой ложках через соответствующие концентрации c_1, c_2,…c_{50} и объём ложки V. – 5 баллов.
2) Записана формула для нахождения концентрации получившегося раствора соли в большом стеклянном сосуде – 14 баллов.
3) Получен правильный численный ответ – 6 баллов.
   Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Задача 3.

Два резистора сопротивлениями R и $R/2$ и три неидеальных одинаковых амперметра, сопротивления которых равны $R_A = R$, соединены в электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Напряжение на клеммах $U_{AB} = 6$ В, сопротивление $R = 2$ Ом. Определите, чему равно общее сопротивление цепи на участке AB и найдите показания амперметров A_1, A_2 и A_3.



Решение.

Поскольку неидеальные амперметры обладают сопротивлениями *R*, то их можно представить их как идеальные амперметры, последовательно соединённые с резисторами *R*. Перерисуем эквивалентную схему электрической цепи:

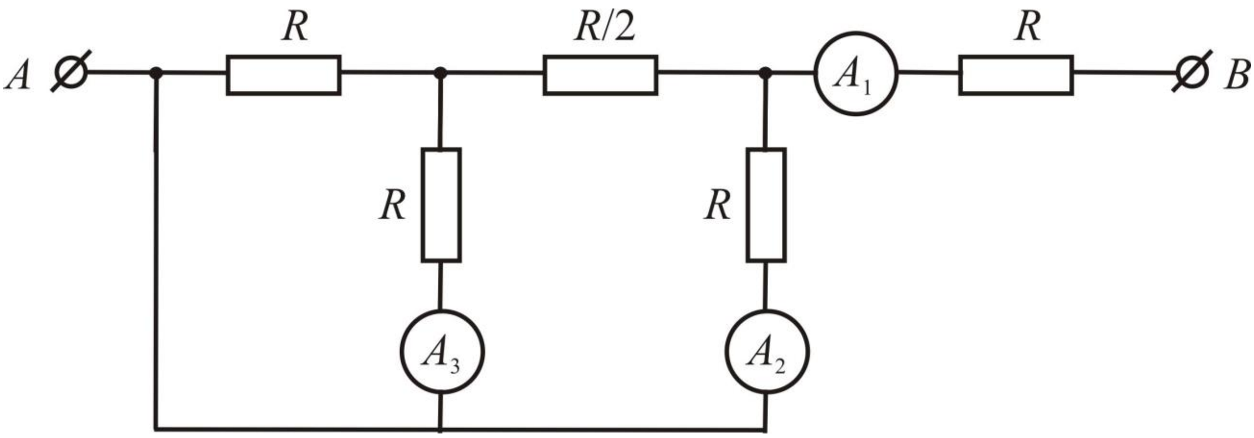


Рис. 1.

Далее сводим нашу электрическую схему к последовательности последовательно и параллельно соединённых элементов:

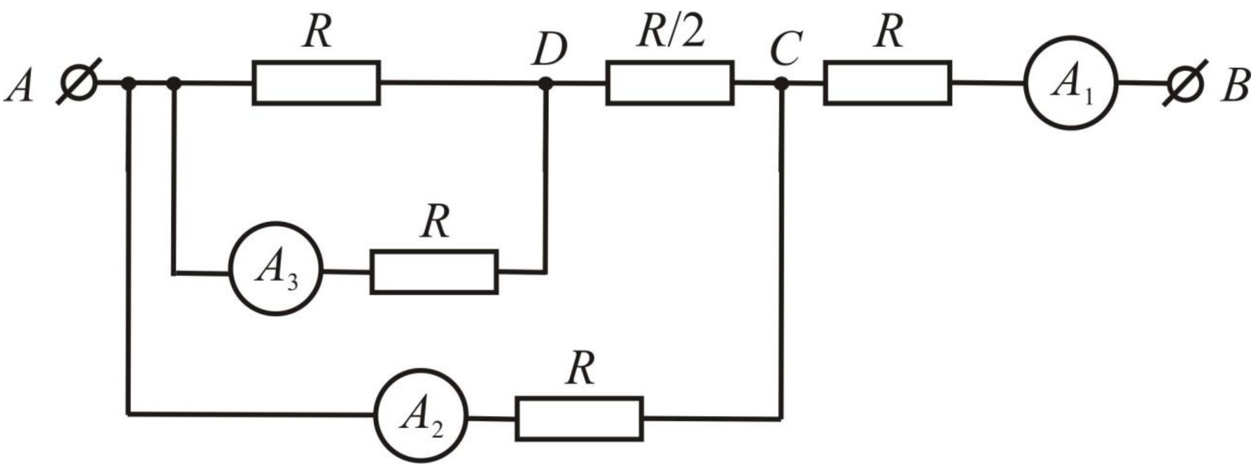


Рис. 2.

Из получившейся схемы уже легко определить общее сопротивление цепи на участке *AB*:

Сопротивление участка *AD*: $R_{AD} = R/2 = 2/1 = 1$ (Ом)

Сопротивление участка *AC*: $R_{AC} = \dfrac{(R_{AD} + R/2)\cdot R}{(R_{AD} + R/2) + R} = \dfrac{(1+1)\cdot 2}{(1+1)+2} = \dfrac{4}{4} = 1$ (Ом)

Сопротивление участка *AB*: $R_{\text{общ}} = R_{AC} + R = 1 + 2 = 3(\text{Ом})$

Сила тока, протекающего через амперметр A_1: $I_1 = \dfrac{U_{AB}}{R_{\text{общ}}} = \dfrac{6\,\text{В}}{3\,\text{Ом}} = 2\ \text{А}$.

После прохождения первого амперметра A_1 в точке *C* ток разделяется на две ветви, имеющие одинаковые сопротивления. Следовательно, ток I_1 делится пополам, и амперметр A_2 покажет силу тока $I_2 = I_1/2 = 1$ А.
Аналогично, после прохождения резистора $R/2$ в точке *D* ток I_1 разделится пополам, и амперметр A_3 покажет силу тока $I_3 = I_2/2 = 0{,}5$ А.

Ответ: Общее сопротивление электрической цепи на участке *AB* равно $R_{\text{общ}} = 3$ Ом.
Показание амперметра A_1: $I_1 = 2$ А.
Показание амперметра A_2: $I_2 = 1$ А.
Показание амперметра A_3: $I_3 = 0{,}5$ А.

Критерии.

1) Представление неидеальных амперметров как идеальных амперметров, последовательно соединённых с резисторами. Приведение схемы электрической цепи к рис. 1. – 5 баллов.
2) Приведение схемы электрической цепи к рис. 2. – 10 баллов.
3) Расчёт общего сопротивления цепи. – 5 баллов.
4) Нахождение сил токов, текущих через амперметры A_1, A_2 и A_3. – 5 баллов.
   Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

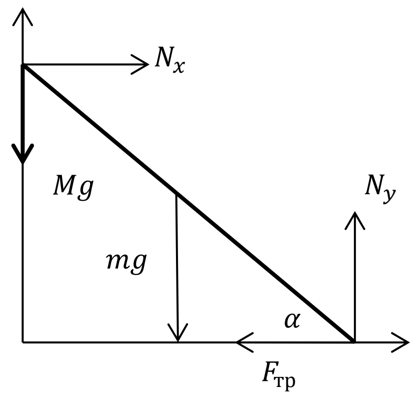
Задача 4.

Маляру массой M=90 кг требуется покрасить гладкую вертикальную стену. Он решил проверить сцепление лестницы массой m=15 кг с полом. Оказалось, что лестница начинает скользить, если она составляет с полом угол, меньший 45

градусов. Под каким минимальным углом к полу маляру следует поставить лестницу, чтобы он смог подняться как можно выше и не упасть?
Примечание: считать, что лестница однородная.

Решение:

Рассматривая условия равновесия лестницы с человеком на ней, необходимо считать, что оно выполняется для любого положения человека на лестнице. Таким образом, достаточно выяснить выполнение этих условий в случае, когда человек находится в верхней точке лестницы, что мы и будем полагать. Итак, пусть «критический угол» при этом равен β, и силу трения можно считать равной силе трения скольжения. Введем длину и массу лестницы и человека. Запишем условия равновесия – векторная сумма сил, приложенных к лестнице, равна нулю. Кроме того, необходимым условием отсутствия вращения является равенство нулю моментов всех сил относительно любой точки (в качестве потенциальной оси вращения удобнее выбрать точку горизонтальной опоры, так как относительно ее моменты сразу двух сил равны нулю). Итак, проектируя силы на рисунке, имеем три уравнения:



$$N_y = (m + M)g$$

$$N_x = F_{тр} = kN_y$$

$$N_x sin\beta = \left(\frac{m}{2} + M\right) cos\beta$$

Отсюда находим:

$$tg\beta = \frac{1}{2k} \cdot \frac{m + 2M}{m + M}$$

Полагая $M = 0$, находим условие равновесия лестницы без человека $\beta = \alpha$:

$$tg\alpha = \frac{1}{2k}$$

откуда коэффициент трения:

$$k = \frac{ctg\alpha}{2} = 0.5$$

Подставляя данные, приведенные в условии, получаем:

$$\beta = 61{,}7^0$$

Критерии:

1. Правильно записаны все условия равновесия — 8 баллов.

2. Из условий равновесия найден угол— 5 баллов.
3. Проведено сравнение случаев с маляром и без —8 баллов.
4. Исключен не заданный в условии коэффициент трения – 4 балла.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

11 классы

Блок: химия.

Задача 1.1.

Для определения кислотности почвы было взято несколько образцов с разных участков земли. Определение проводили методом кислотно-основного титрования. При этом для нейтрализации почвенных вытяжек объемом 100 мл потребовалось следующее количество кислоты (HCl, 10^{-5} М) или щелочи ($NaOH$, 10^{-5} М):

Проба	HCl, 10^{-5} М, мл	$NaOH$, 10^{-5} М, мл
1	3.9	
2	-	1.6
3	-	79.4

Рассчитайте pH каждой пробы и предложите оптимальный вариант посадки следующих культур, если известно, что площадь первого участка составляет 1.2 га, второго – 1.8 га, а третьего – 2.6 га. В таблице указаны оптимальны pH почв для посадки, а также необходимая площадь.

Растение	**Оптимальные значения pH**	**Необходима площадь, м^2**
Овёс	5,0–7,7	7000
Кукуруза	6,0–7,0	4000
Гречиха	4,7–7,5	6000
Горох	6,0–7,0	4000
Чай	4,8–6,2	7000
Картофель	5,0–5,5	6000
Люцерна	7,0–8,0	4000
Люпин	4,5–6,0	5000
Капуста	6,7–7,4	5000
Морковь	5,5–7,0	2000

Огурцы	6,0–7,9	3000
Хлопчатник	6,5–9,0	3000

Возможное решение:

$pH = -\log_{10}C(H^+)$ (для кислых растворов, пробы 2 и 3)

$pH= 14-(-\log_{10}C(OH^-))$ (для щелочных растворов, проба 1)

$C(H^+)$пробы*Vпробы=C(NaOH)*V(NaOH) для 2 и 3

$C(OH^-)$пробы*Vпробы=C(HCl)*V(HCl) для 1

- pH(1)=7.6
- pH(2)=6.8
- pH(3)=5.1

S(1)=12 000 $м^2$

Люцерна – 4000

+ Овес, огурцы, хлопчатник в любом соотношении на 8000 $м^2$

S(2) = 18 000 $м^2$

Кукуруза - 4000

Горох - 4000

Капуста - 5000

Морковь - 2000

+ Овес, гречиха, огурцы, хлопчатник в любом соотношении в сумме на 7000 $м^2$

S(3) = 26 000 $м^2$

Чай - 7000

Картофель - 6000

Люпин – 5000

+ Овес, гречиха в любом соотношении в сумме на 8000 $м^2$

Критерии:

1. Правильно рассчитаны pH проб – 5 баллов за каждый (максимум=15 баллов).
2. Дан правильный вариант ответа с обоснованием – 7 баллов.
3. Указан 1 вариант посадки –2 балла/ предложен дополнительный вариант посадки – 3 балла.

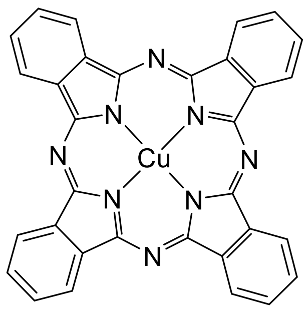
Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 1.2.

Один макроциклический синий краситель для окраски джинсовой ткани получают из динитрила ортофталевой кислоты и солей меди. Известно, что формула красителя – $C_{32}H_{16}N_8Cu$, его структурная формула представляет симметричный полностью сопряженный макроцикл, включающий в себя 4 шестичленных цикла и 4 пятичленных цикла, а атом меди связан координационной связью с четырьмя атомами азота. Предложите структурную формулу красителя, а также рассчитайте сколько необходимо взять орто-фталевой кислоты и ацетата меди (II) для получения 5 г красителя, если выход данной реакции составляет 65%.

Возможное решение:

Структура:



Также принимаются любые возможные варианты, соответствующие описанию.

Расчет: $4C_8H_4N_2 + Cu(CH_3COO)_2 = C_{32}H_{16}N_8Cu$

$\upsilon(C_{32}H_{16}N_8Cu)=5/576=8.68*10^{-3}$ моль

$\upsilon(C_8H_4N_2)= 8.68*10^{-3}*4/0.65=53.4*10^{-3}$

$m(C_8H_4N_2)= 53.4*10^{-3}*128=6.84$ г

$\upsilon(Cu(CH_3COO)_2)$= 8.68*10^{-3}/0.65=13.4*10^{-3}

m($Cu(CH_3COO)_2$)= 13.4*10^{-3}*182=2.43 г

Критерии:

1. Правильно составлена структурная формула вещества (или приведен другой вариант, полностью соответствующий описанию) – 15 баллов.
2. Правильно выполнены расчеты и приведен ответ – 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Блок: физика и инженерные науки:

Задача 2.1.

Три соприкасающихся небольших абсолютно твердых шарика находятся на гладкой вертикальной направляющей на высоте h=1м. Масса нижнего шарика в n=4 раза больше массы верхнего. Шарики отпускают, и они падают на абсолютно твердую горизонтальную поверхность. При какой массе среднего шарика (в единицах массы нижнего) верхний поднимется на максимальную высоту? Найдите эту высоту. и предельно возможное ее значение при произвольных массах шариков. Все столкновения считать абсолютно упругими. Размер шариков мал по сравнению с высотой.

Возможное решение:

Предположим, что между падающими шариками существует исчезающе малый зазор. Тогда нижний (самый тяжелый) шарик переотразится со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$. В системе отсчета двух остальных шариков он будет налетать на них со скоростью $v_1 = 2v_0$.

Запишем законы сохранения энергии и импульса для двух столкновений:

$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2$

$m_1v_1^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2^2$

$m_2v_2 = m_3v_3 + m_2v_2'$

$m_2v_2^2 = m_3v_3^2 + m_2v_2'^2$

Исключая из полученной системы промежуточные скорости, находим:

$v_3 = \frac{4v_1}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(1+\frac{m_3}{m_2}\right)}$

Знаменатель последнего выражения равен

$$1 + \frac{m_3}{m_1} + \sqrt{\frac{m_3}{m_1}}\left(\frac{m_2}{\sqrt{m_1m_3}} + \frac{\sqrt{m_1m_3}}{m_2}\right).$$

Минимум выражения в скобках достигается при $m_2 = \sqrt{m_1m_3}$ как следует из неравенства $x + \frac{1}{x} \geq 2, x > 0$. Поэтому $m_1 = nm, m_2 = \sqrt{n}m, m_3 = m$. При этом

$v_3 = \frac{4nv_1}{\left(\sqrt{n}+1\right)^2} = \frac{8nv_0}{\left(\sqrt{n}+1\right)^2} = \frac{32}{9}v_0$

а скорость верхнего шарика относительно земли после отскока

$v_3 - v_0 = \frac{23}{9}v_0$

Следовательно, высота, на которую он поднимется при оптимальном значении промежуточной массы $m_2 = 2m$ равна $H = h\left(\frac{23}{9}\right)^2$=10.38 м.

Максимальное значение этой высоты будет если нижний шарик намного тяжелее верхнего и равно 49 м.

Критерии:

1. Описана идея о том, что нижний шарик отразиться первым и переход в систему отсчета, где остальные шарики покоятся — 4 балла.
2. Записаны законы сохранения энергии и импульса для абсолютно упругого столкновения шариков— 6 баллов.
3. Правильно решена система уравнений для скоростей и получено выражение для скорости верхнего шарика в рассматриваемой СО и в СО, связанной с наблюдателем —6 баллов.
4. Проведен анализ выражения для скорости, найдена промежуточная масса, максимальное значение скорости и высоты отскока верхнего шарика – 7 баллов.
5. Проведен анализ высоты отскока в случае произвольных масс, найдено оптимальное соотношение между массами и соответствующая высота – 2 балла.
6. Ошибка в расчетах – уменьшение на 5 баллов

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 2.2.

Горизонтальная подставка с грузом совершает гармонические колебания по вертикали в поле тяжести $g = 10$ м/с^2 с амплитудой A= 5 см. При какой частоте колебаний силы давления груза на подставку в крайних точках отличаются в 5 раз?

Возможное решение:

Закон движения по вертикали имеет вид:

$$z = A\sin\omega t$$

Отсюда ускорения в верхней и нижней точках:

$$a_{\text{в}} = -A\omega^2, a_{\text{н}} = A\omega^2$$

Второй закон Ньютона для верхней и нижней точек имеет вид:

$$ma_в = N_в - mg = -mA\omega^2, \qquad ma_н = N_н - mg = mA\omega^2$$

$$n = \frac{N_н}{N_в} = \frac{g + A\omega^2}{g - A\omega^2} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}\cdot\frac{n-1}{n+1}} = 1{,}84\ Гц$$

Критерии:

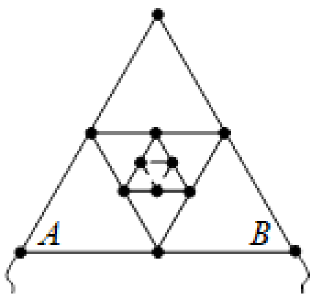
1. Правильно записан второй закон Ньютона для движения груза на подставке — 8 баллов.
2. Записан закон периодического движения (временная зависимость координаты— 7 баллов.
3. Записаны силы реакции в верхней и нижней точках—10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Блок: физика

Задача 3.1.

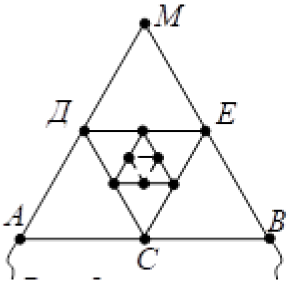
Фигура, изображенная на рис. 1, сделана из проволоки постоянного сечения. Число впаянных (вложенных) друг в друга равносторонних треугольников очень велико. Сторона самого большого треугольника a_1 = 1 м. Сопротивление одного метра проволоки равно 1 Ом. Найти сопротивление между клеммами А и В.



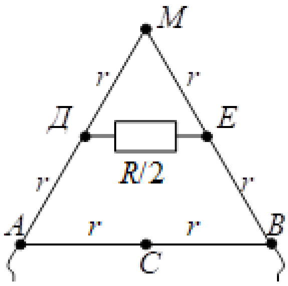
Возможное решение:

Каждый последующий треугольник в 2 раза меньше предыдущего (рис. 5), поэтому сопротивление между точками *Д* и *Е* $\Delta ДЕС$ (изъятого из ΔAMB и содержащего все меньшие треугольники внутри себя) будет в 2 раза меньше искомого сопротивления.

Из симметрии схемы следует возможность рассоединения проводников в т. С.



Тогда эквивалентная схема будет такой:



Если искомое сопротивление равно R, то $R_{ДЕ} = R/2$. Обозначив сопротивлении половины большего ребра через r, для верхней части получим $R_{ДМЕ} = \frac{2rR}{4r+R}$. Участки $АД$, $ДМЕ$ и $ЕВ$ соединены последовательно, поэтому $R' = \frac{2rR}{4r+R} + 2r = \frac{4Rr+8r^2}{4r+R}$. Эта группа подключена параллельно к участку $АВ$, следовательно $\frac{1}{R} = \frac{4r+R}{4Rr+4r^2} + \frac{1}{2r}$. Получившееся квадратное уравнение $3R^2 + 4rR - 8r^2 = 0$ имеет положительный корень $R = \frac{(\sqrt{7}-1)\cdot 2r}{3}$. Поскольку $r = \rho a/2$, получаем $R = \frac{\sqrt{7}-1}{3}\rho a = 0{,}43\rho a$

Критерии:

1 Обоснована идея самоподобия схемы и связь между сопротивлениями подобных элементов — 7 баллов.

2. Обоснована идея размыкания цепи в точке С.— 7 баллов.
3. Вычерчена эквивалентная схема —5 баллов.
4. Проведен расчет сопротивления и получен правильный ответ – 6 баллов.
5. Арифметическая ошибка- уменьшение на 1 балл.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 3.2.

Электромагнитное поле создается закрепленным точечным зарядом Q, помещенным в постоянное однородное магнитное поле $\vec{B}$. Чему равны минимальный радиус орбиты и период обращения заряда q с массой m? Траекторию заряда лежит в плоскости, содержащей Q и перпендикулярной $\vec{B}$.

Возможное решение:

Запишем второй закон Ньютона в проекции на нормаль, считая для определенности заряд q положительным, магнитное поле – от рисунка, а скорость – направленной по часовой стрелке:

$$\frac{mv^2}{R} = Bqv - \frac{kqQ}{R^2}$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно v, находим:

$$v = \frac{v_B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{v_B}{2}\right)^2 - v_E^2}$$

где $v_B = \frac{BqR}{m}$, $v_E = \sqrt{\frac{kqQ}{mR}}$.

Скорость движения постоянна по величине, так как касательные проекции сил отсутствуют. Таким образом, для периода получаем:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{4\pi m}{Bq} \cdot \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kQm}{qB^2R^3}}}$$

Анализ данного соотношения показывает, что в случае отталкивания между зарядами ($Q>0$) по круговой орбите заданного радиуса возможно движение с двумя значениями скорости, стремящимися друг к другу при его уменьшении. Однако, если при этом $R < \sqrt[3]{\frac{4kQm}{qB^2}}$ то равновесное движение по такой орбите невозможно, так как магнитная сила не сможет скомпенсировать кулоновское отталкивание.

Если же $Q<0$ (кулоновское притяжение), значений скорости может быть также два. Но при этом радиус круговой орбиты уже ничем не ограничен. В первом случае (знак + в выражении для периода) электрическая и магнитные силы направлены к центру окружности, во втором (знак -) – магнитная сила является силой «отталкивания» (при этом направление вращения должно быть против часовой стрелки).

Критерии:

1. Записан второй закон Ньютона для движения заряда— 6 баллов.
2. Сделан рисунок с указанием возможного направления электромагнитных сил— 3 балла.

3. Получено решение квадратного уравнения для скорости, сделан вывод о существовании двух равновесных орбит и записан период —7 баллов.
4. Проведен анализ дискриминанта уравнения и получен минимальный радиус – 6 баллов.
5. Выполнен анализ случаев заряда разных знаков и направлений движения – 3 балла.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 3.3.

В центре закрепленного кольца с равномерно распределенным зарядом Q=1мкКл непроводящего кольца радиуса R=10 см находится маленький шарик массой m=1 г с зарядом q=-1 нКл.

Определите период его малых колебаний вблизи положения равновесия, если в начальный момент времени его слегка сместили вдоль оси кольца.

Указание: при решении воспользоваться приближенной формулой $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, для $\varepsilon \ll 1$.

Возможное решение:

Пусть смещение шарика вдоль оси кольца равно x. Изменение потенциальной энергии взаимодействия шарика с кольцом равно $U = -\left(\frac{kqQ}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{kqQ}{R}\right) \approx \frac{kqQ}{R^3}\frac{x^2}{2}$. Полная механическая энергия при движении шарика сохраняется:

$$E = \frac{m}{2}\left(v^2 + \frac{kqQ}{mR^3}x^2\right)$$

Сравнивая последнее выражение с энергией пружинного маятника, находим:

$$\omega^2 = \frac{kqQ}{mR^3},\ T = 2\pi R\sqrt{\frac{mR}{kqQ}} \approx 2.1\text{ с}$$

Возможно также Возможное решение с помощью второго закона Ньютона, но оно более громоздкое.

Критерии:

1. Записана энергия взаимодействия заряда с кольцом и произведено ее квадрирование с помощью приближенных формул — 8 баллов.
2. Сравнение полной энергии заряда в поле кольца с энергией колебаний произвольной системы, высказана идея ее сохранения при колебаниях— 8 баллов.

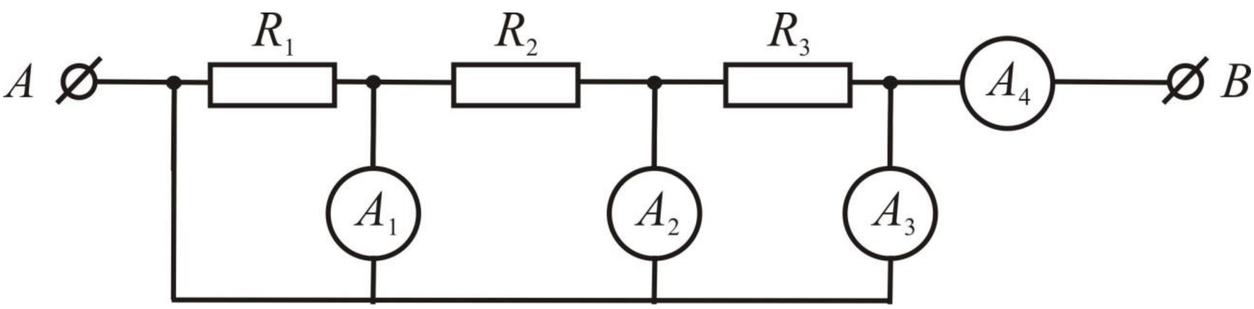
3. Также возможно решение с помощью сил. В этом случае – записано выражение для силы притяжения между зарядом и кольцом и второй закон Ньютона —9 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Блок: физика.

Задача 4.1.

Несколько резисторов сопротивлениями $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 4$ Ом и четыре неидеальных амперметра, имеющих сопротивления $R_{A1} = 8$ Ом, $R_{A2} = 8$ Ом, $R_{A3} = 2$ Ом и $R_{A4} = 2$ Ом соединены в электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Напряжение на клеммах $U_{AB} = 10{,}8$ В. Определите, чему равно общее сопротивление $R_{общ}$ цепи на участке AB и найдите показания амперметров A_1, A_2, A_3 и A_4.



Возможное решение:

Поскольку неидеальные амперметры обладают сопротивлениями, то их можно представить их как идеальные амперметры A_1, A_2, A_3 и A_4, последовательно соединённые с резисторами R_{A1}, R_{A2}, R_{A3}, R_{A4}.

Перерисуем эквивалентную схему электрической цепи:

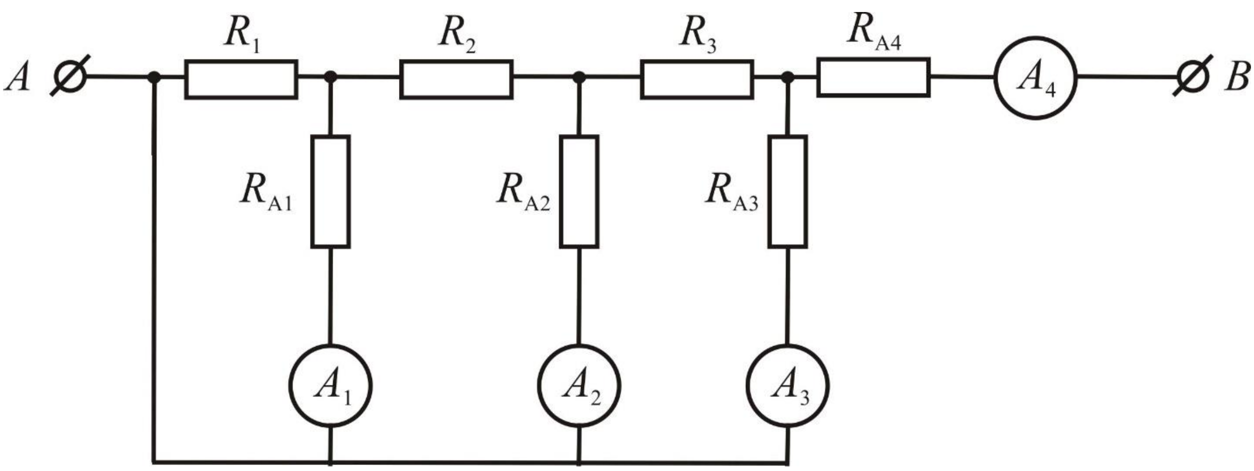


Рис.1.

Далее сводим нашу электрическую схему к последовательности последовательно и параллельно соединённых элементов:

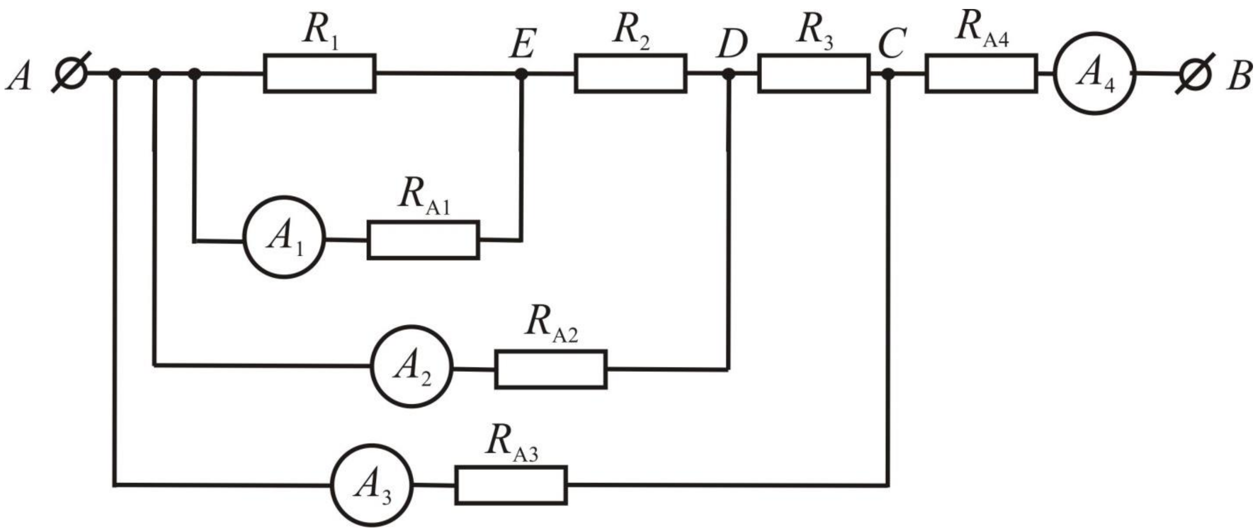


Рис. 2.

Из получившейся схемы уже легко определить общее сопротивление цепи на участке *AB*.

Сопротивление участка *AE*: $R_{AE} = \dfrac{R_1 \cdot R_{A1}}{R_1 + R_{A1}} = \dfrac{8 \cdot 8}{8+8} = \dfrac{8}{2} = 4\,(\text{Ом})$

Сопротивление участка *AD*:

$$R_{AD} = \frac{(R_{AE}+R_2)\cdot R_{A2}}{(R_{AE}+R_2)+R_{A2}} = \frac{(4+4)\cdot 8}{(4+4)+8} = \frac{8}{2} = 4\ (\text{Ом})$$

Сопротивление участка *AC*:

$$R_{AC} = \frac{(R_{AD}+R_3)\cdot R_{A3}}{(R_{AD}+R_3)+R_{A3}} = \frac{(4+4)\cdot 2}{(4+4)+2} = \frac{16}{10} = 1{,}6\ (\text{Ом})$$

Сопротивление участка *AB*:

$R_{\text{общ}} = R_{A4} + R_{AC} = 2 + 1{,}6 = 3{,}6$ (Ом).

Сила тока, протекающего через амперметр A_4: $I_4 = \dfrac{U_{AB}}{R_{\text{общ}}} = \dfrac{10{,}8\,\text{В}}{3{,}6\,\text{Ом}} = 3\ \text{А}$.

После прохождения амперметра A_4 и резистора R_{A4} в точке *C* ток разделяется на две ветви: в нижней ветви через резистор R_{A3}= 2 Ом, соединённый последовательно с идеальным амперметром A_3 и имеющий в 4 раза меньшее сопротивление, чем сопротивление верхней ветви, будет протекать в 4 раза больший ток I_3 = 2,4 А, а в резисторе R_3 сила тока будет равна $I_{R3} = I_4 - I_3$ = 3 А – 2,4 А = 0,6 А.

В точке D ток снова разделяется на две ветви, но поскольку в данном случае сопротивления обеих ветвей одинаковы, то данный ток разделяется пополам: амперметр A_2 покажет силу тока $I_2 = I_{R3}/2 = 0{,}6/2 = 0{,}3$ А.

Аналогично, после прохождения резистора R_2 в точке E ток снова разделяется поровну, поскольку сопротивления R_1 и R_{A1} равны. Поэтому амперметр A_1 покажет силу тока $I_1 = I_2/2 = 0{,}3/2 = 0{,}15$ (А).

Ответ: Общее сопротивление электрической цепи на участке AB равно $R_{общ} = 3{,}6$ Ом.
Показание амперметра A_1: $I_1 = 0{,}15$А.
Показание амперметра A_2: $I_2 = 0{,}3$ А.
Показание амперметра A_3: $I_3 = 2{,}4$ А.
Показание амперметра A_4: $I_4 = 3$ А.

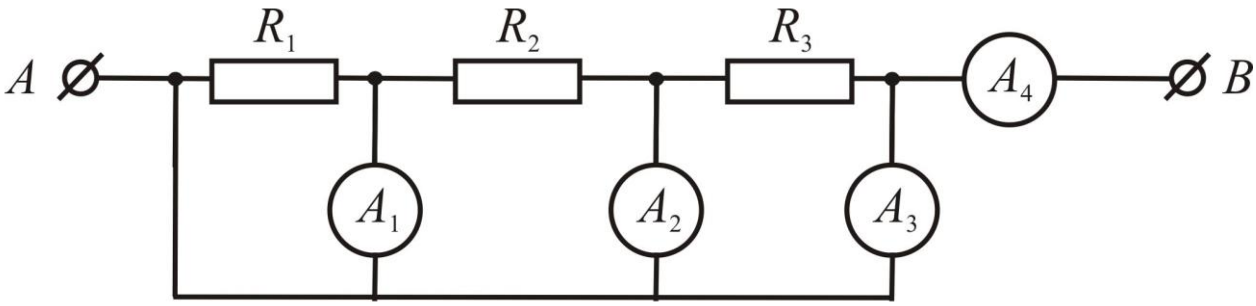
Критерии.

1) Представление неидеальных амперметров как идеальных амперметров, последовательно соединённых с резисторами. Приведение схемы электрической цепи к рис. 1 — 1 балл.
2) Приведение схемы электрической цепи к рис. 2 — 4 балла.
3) Расчёт общего сопротивления цепи. — 10 баллов.
4) Нахождение сил токов, текущих через амперметры A_1, A_2, A_3 и A_4— 10 баллов.
5) Ошибка при расчете — уменьшение на 5 баллов.

Итого: 25 баллов

Задача 4.2.

Несколько резисторов сопротивлениями $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 2$ Ом и четыре неидеальных амперметра, имеющих сопротивления $R_{A1} = 4$ Ом, $R_{A2} = 4$ Ом, $R_{A3} = 1$ Ом и $R_{A4} = 1$ Ом соединены в электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Напряжение на клеммах $U_{AB} = 5{,}4$ В. Определите, чему равно общее сопротивление $R_{общ}$ цепи на участке AB и найдите показания амперметров A_1, A_2, A_3 и A_4.



Возможное решение:

Поскольку неидеальные амперметры обладают сопротивлениями, то их можно представить их как идеальные амперметры A_1, A_2, A_3 и A_4, последовательно соединённые с резисторами R_{A1}, R_{A2}, R_{A3}, R_{A4}.

Перерисуем эквивалентную схему электрической цепи:

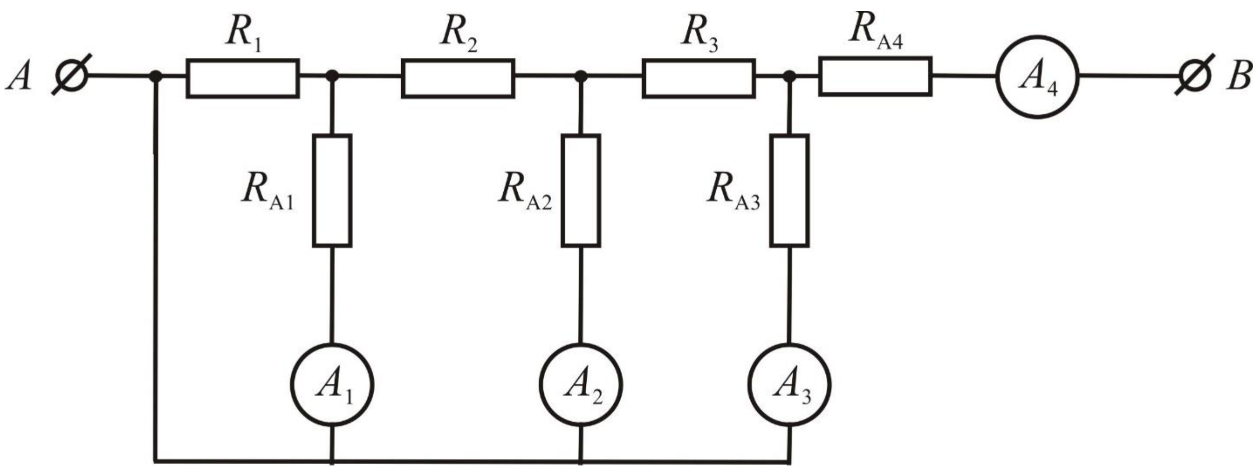


Рис.1.

Далее сводим нашу электрическую схему к последовательности параллельно и последовательно соединённых элементов:

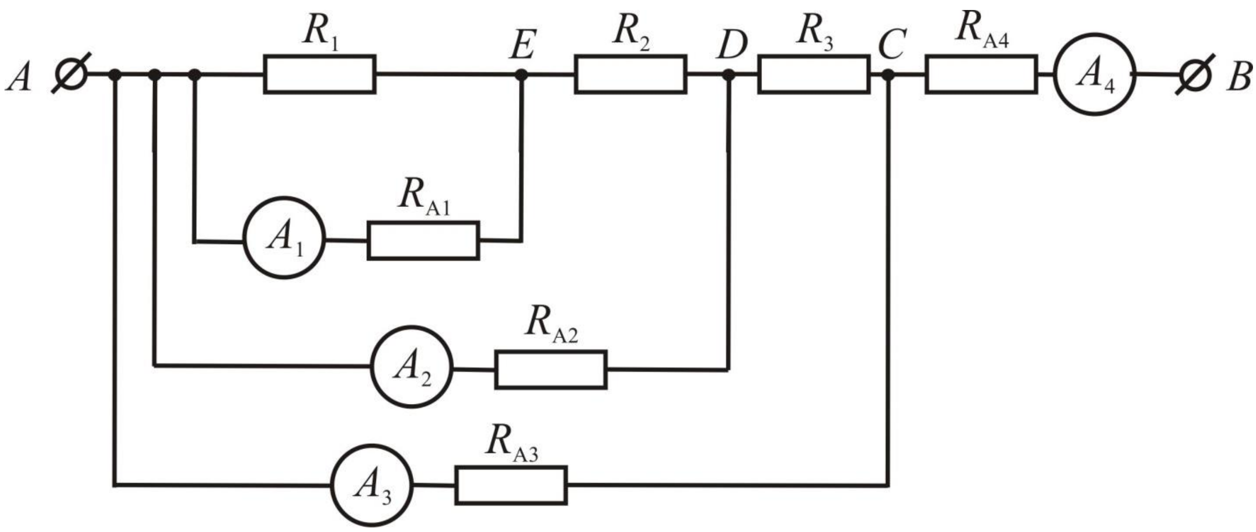


Рис. 2.

Из получившейся схемы уже легко определить общее сопротивление цепи на участке AB.

Сопротивление участка AE: $R_{AE} = \dfrac{R_1 \cdot R_{\text{A}1}}{R_1 + R_{\text{A}1}} = \dfrac{4 \cdot 4}{4+4} = \dfrac{16}{8} = 2\,(\text{Ом})$

Сопротивление участка AD:

$$R_{AD} = \frac{(R_{AE} + R_2) \cdot R_{\text{A}2}}{(R_{AE} + R_2) + R_{\text{A}2}} = \frac{(2+2) \cdot 4}{(2+2)+4} = \frac{16}{8} = 2\ (\text{Ом})$$

Сопротивление участка AC:

$$R_{AC} = \frac{(R_{AD} + R_3) \cdot R_{\text{A}3}}{(R_{AD} + R_3) + R_{\text{A}3}} = \frac{(2+2) \cdot 1}{(2+2)+1} = \frac{4}{5} = 0{,}8\ (\text{Ом})$$

Сопротивление участка AB:

$R_{\text{общ}} = R_{\text{A}4} + R_{\text{AC}} = 1 + 0{,}8 = 1{,}8$ (Ом).

Сила тока, протекающего через амперметр А$_4$: $I_4 = \dfrac{U_{AB}}{R_{\text{общ}}} = \dfrac{5{,}4\,\text{В}}{1{,}8\,\text{Ом}} = 3\ \text{А}$.

После прохождения амперметра A_4 и резистора $R_{\text{A}4}$ в точке C ток разделяется на две ветви: в нижней ветви через резистор $R_{\text{A}3}$= 1 Ом, соединённый последовательно с идеальным амперметром А$_3$ и имеющий в 4 раза меньшее сопротивление, чем сопротивление верхней ветви, будет протекать в 4 раза больший ток $I_3 = 2{,}4$ А, а в резисторе R_3 сила тока будет равна $I_{R3} = I_4 - I_3 = 3\ \text{А} - 2{,}4\ \text{А} = 0{,}6$ А.

В точке D ток снова разделяется на две ветви, но поскольку в данном случае сопротивления обеих ветвей одинаковы, то данный ток разделяется пополам: амперметр A_2 покажет силу тока $I_2 = I_{R3}/2 = 0{,}6/2 = 0{,}3$ А.

Аналогично, после прохождения резистора R_2 в точке E ток снова разделяется поровну, поскольку сопротивления R_1 и R_{A1} равны. Поэтому амперметр A_1 покажет силу тока $I_1 = I_2/2 = 0{,}3/2 = 0{,}15$ (А).

Ответ: Общее сопротивление электрической цепи на участке AB равно $R_{общ} = 1{,}8$ Ом.
Показание амперметра A_1: $I_1 = 0{,}15$А.
Показание амперметра A_2: $I_2 = 0{,}3$ А.
Показание амперметра A_3: $I_3 = 2{,}4$ А.
Показание амперметра A_4: $I_4 = 3$ А.

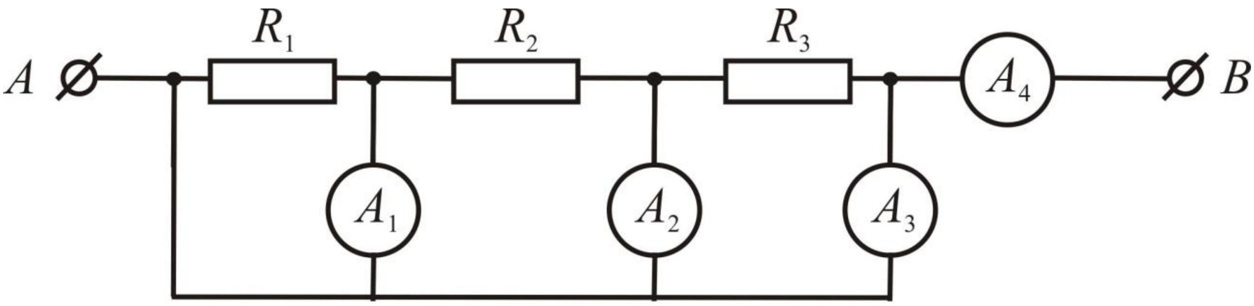
Критерии.

1) Представление неидеальных амперметров как идеальных амперметров, последовательно соединённых с резисторами. Приведение схемы электрической цепи к рис. 1. – 1 балл.
2) Приведение схемы электрической цепи к рис. 2. – 4 балла.
3) Расчёт общего сопротивления цепи. – 10 баллов.
4) Нахождение сил токов, текущих через амперметры A_1, A_2, A_3 и A_4. – 10 баллов.

<u>Итого</u>: 25 баллов

Задача 4.3.

Несколько резисторов сопротивлениями $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 6$ Ом и четыре неидеальных амперметра, имеющих сопротивления $R_{A1} = 12$ Ом, $R_{A2} = 12$ Ом, $R_{A3} = 3$ Ом и $R_{A4} = 3$ Ом соединены в электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Напряжение на клеммах $U_{AB} = 10{,}8$ В. Определите, чему равно общее сопротивление $R_{\text{общ}}$ цепи на участке AB и найдите показания амперметров A_1, A_2, A_3 и A_4.



Возможное решение:

Поскольку неидеальные амперметры обладают сопротивлениями, то их можно представить их как идеальные амперметры A_1, A_2, A_3 и A_4, последовательно соединённые с резисторами R_{A1}, R_{A2}, R_{A3}, R_{A4}.
Перерисуем эквивалентную схему электрической цепи:

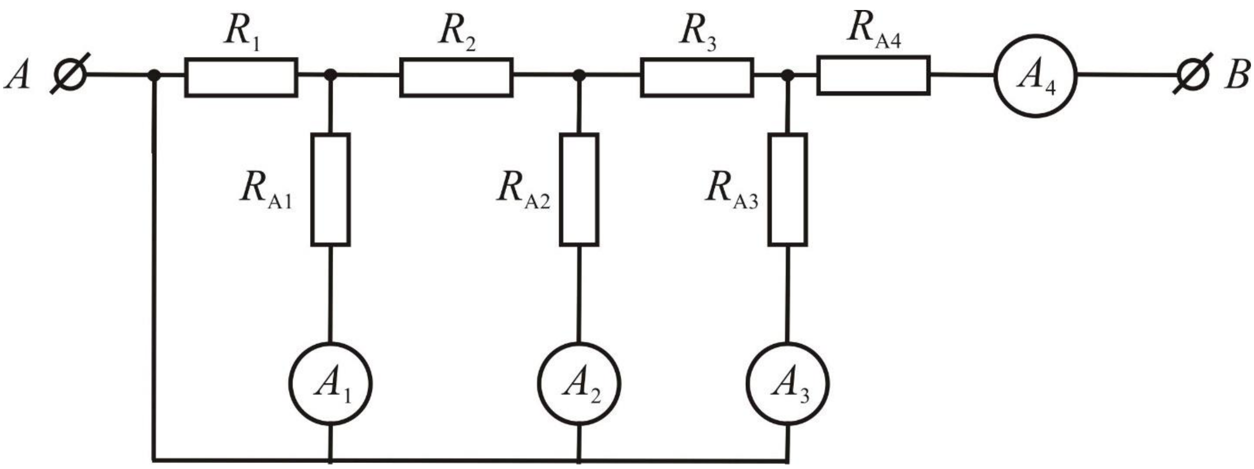


Рис.1.

Далее сводим нашу электрическую схему к последовательности параллельно и последовательно соединённых элементов:

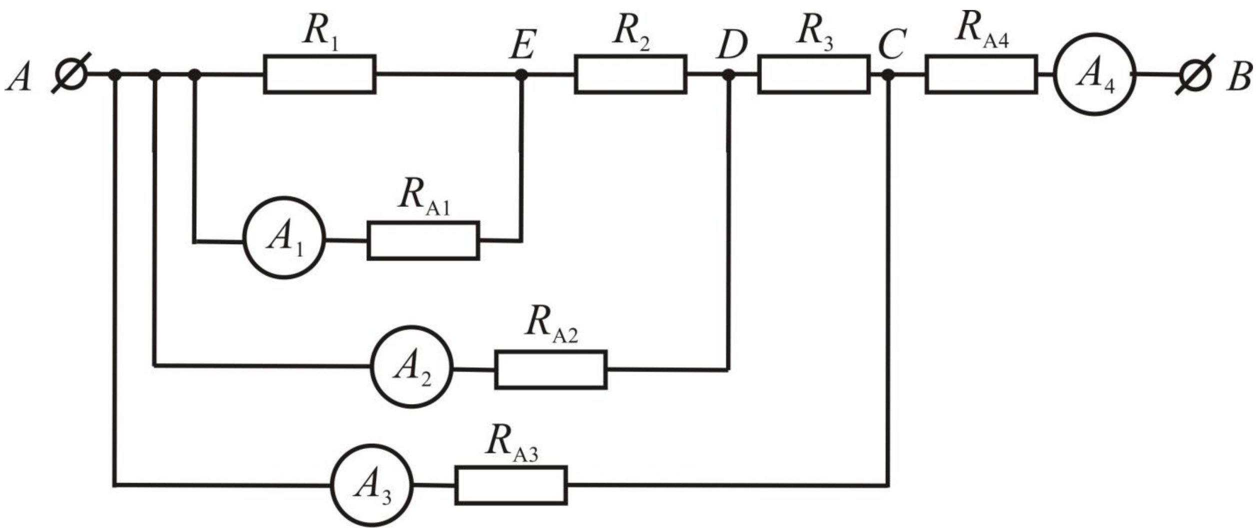


Рис. 2.

Из получившейся схемы уже легко определить общее сопротивление цепи на участке *AB*.

Сопротивление участка *AE*: $R_{AE} = \dfrac{R_1 \cdot R_{A1}}{R_1 + R_{A1}} = \dfrac{12 \cdot 12}{12+12} = \dfrac{12 \cdot 12}{24} = 6\,(\text{Ом})$

Сопротивление участка *AD*:

$$R_{AD} = \frac{(R_{AE} + R_2) \cdot R_{A2}}{(R_{AE} + R_2) + R_{A2}} = \frac{(6+6) \cdot 12}{(6+6)+12} = \frac{12 \cdot 12}{24} = 6\ (\text{Ом})$$

Сопротивление участка *AC*:

$$R_{AC} = \frac{(R_{AD} + R_3) \cdot R_{A3}}{(R_{AD} + R_3) + R_{A3}} = \frac{(6+6) \cdot 3}{(6+6)+3} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2{,}4\ (\text{Ом})$$

Сопротивление участка *AB*:

$R_{\text{общ}} = R_{A4} + R_{AC} = 3 + 2{,}4 = 5{,}4$ (Ом).

Сила тока, протекающего через амперметр A_4: $I_4 = \dfrac{U_{AB}}{R_{\text{общ}}} = \dfrac{10{,}8\,\text{В}}{5{,}4\,\text{Ом}} = 2\ \text{А}$.

После прохождения амперметра A_4 и резистора R_{A4} в точке *C* ток разделяется на две ветви: в нижней ветви через резистор R_{A3}= 3 Ом, соединённый последовательно с идеальным амперметром A_3 и имеющий в 4 раза меньшее сопротивление, чем сопротивление верхней ветви, будет протекать в 4 раза больший ток I_3 = 1,6 А, а в резисторе R_3 сила тока будет равна $I_{R3} = I_4 - I_3$ = 2 А – 1,6 А = 0,4 А.

В точке D ток снова разделяется на две ветви, но поскольку в данном случае сопротивления обеих ветвей одинаковы, то данный ток разделяется пополам: амперметр A_2 покажет силу тока $I_2 = I_{R3}/2 = 0,4/2 = 0,2$ А.

Аналогично, после прохождения резистора R_2 в точке E ток снова разделяется поровну, поскольку сопротивления R_1 и R_{A1} равны. Поэтому амперметр A_1 покажет силу тока $I_1 = I_2/2 = 0,2/2 = 0,1$ (А).

Ответ: Общее сопротивление электрической цепи на участке AB равно $R_{общ} = 2,4$ Ом.
Показание амперметра A_1: $I_1 = 0,1$А.
Показание амперметра A_2: $I_2 = 0,2$ А.
Показание амперметра A_3: $I_3 = 1,6$ А.
Показание амперметра A_4: $I_4 = 2$ А.

Критерии.

1) Представление неидеальных амперметров как идеальных амперметров, последовательно соединённых с резисторами. Приведение схемы электрической цепи к рис. 1. – 1 балл.
2) Приведение схемы электрической цепи к рис. 2. – 4 балла.
3) Расчёт общего сопротивления цепи. – 10 баллов.
4) Нахождение сил токов, текущих через амперметры A_1, A_2, A_3 и A_4. – 10 баллов.

Итого: 25 баллов