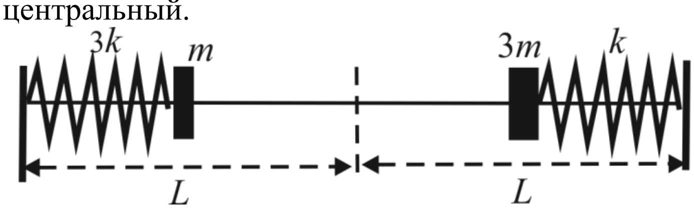
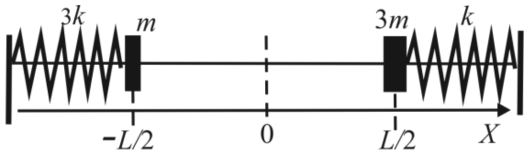
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада «Ломоносов 2022/2023» по физике
Заключительный этап для 10-х – 11-х классов

ВАРИАНТ 1

Задача 1.2.1. Две лёгкие пружины одинаковой длины L = 20 см закреплены на гладком горизонтальном стержне. Жёсткость первой пружины равна $k_1 = 3k$, а второй – $k_2 = k$. К концам пружин прикреплены небольшие грузы массами $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$. В положении равновесия грузы касаются друг друга. Сдвинув грузы вдоль стержня, пружины сжимают так, что их длина уменьшается в два раза (см. рисунок). После этого грузы отпускают. Через некоторое время грузы сталкиваются и слипаются друг с другом. Определить амплитуду A колебаний образовавшегося тела, считая, что пружины деформированы упруго, а удар грузов друг о друга центральный.



Решение.



Так как пружины деформированы упруго и стержень гладкий, то после отпускания грузы будут двигаться по закону гармоническому закону, при этом их можно считать материальными точками. Направим ось OX вдоль движения грузов, а начало координат выберем в положении равновесия (см.рисунок). Тогда законы движения грузов запишутся в следующем виде:

$$x_1(t) = -\frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t\right);$$

$$x_2(t) = \frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\cdot t\right)/$$

В момент столкновения координаты грузов их координаты равны

$x_1(t_0) = x_2(t_0)$.

Откуда получим:

$$\frac{L}{2}\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\cdot t_0\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t_0\right)\right) = 0.$$

Используя известное тригонометрическое соотношение, представим это уравнение в виде:

$$2\cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{3m}} + \sqrt{\frac{3k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2}\right)\cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{3m}} - \sqrt{\frac{3k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2}\right) = 0.$$

Нам нужен наименьший положительный корень этого уравнения, следовательно,:

$\left(\sqrt{\frac{k}{3m}} + \sqrt{\frac{3k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2} = \frac{\pi}{2}$. Откуда найдём время, через которое произойдёт столкновение грузов:

$$t_0 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

Координата места столкновения при этом равна:

$$x_0 = \frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\cdot t_0\right) = \frac{L\sqrt{2}}{4}.$$

Проекции скоростей грузов на ось OX непосредственно перед столкновением равны:

$$\upsilon_1(t_0) = \frac{L}{2}\cdot\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t_0\right) = \frac{L\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{3k}{m}};$$

$$\upsilon_2(t_0) = -\frac{L}{2}\cdot\sqrt{\frac{k}{3m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\cdot t_0\right) = -\frac{L\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{k}{3m}}.$$

По закону сохранения импульса, скорость слипшихся грузов сразу после соударения равна:

$$u = \frac{m\upsilon_1(t_0) + 3m\upsilon_2(t_0)}{4m} = 0.$$

Таким образом, это положение является наибольшим отклонением получившегося тела от положения равновесия. Так как положение равновесия тела совпадает с началом координат (пружины в этом положении не деформированы), то $A = x_0$. Окончательно получим:

$$A = x_0 = \frac{L\sqrt{2}}{4} = 5\sqrt{2} \approx 7\ \text{см}.$$

Ответ: $A = \frac{L\sqrt{2}}{4} \approx 7$ см.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б;
Записаны законы движения грузов – до 5 б;
Найдено время, через которое грузы столкнутся – до 10 б;
Доказано, что это положение является положением максимального отклонения от положения равновесия – до 15 б;
Получено верное выражение для амплитуды колебаний – до 18 б;
Получен верный численный ответ – 20 б.

2.9.1. Задача. В вертикально расположенной трубе с запаянным дном и с поперечным сечением S = 100 см^2 под легко подвижным поршнем массой M = 100 кг находится m = 9 г воды при температуре 0°C. Вся конструкция нагревается до температуры t = 127 °C. Определить высоту h, на которую поднимется поршень. Давление насыщенных паров воды при температуре t = 127°C равно $p_н$ = 2,5·10^5 Па. Атмосферное давление считать равным p_0 = 10^5 Па. Молярная масса воды μ = 18·10^{-3} кг/моль. Универсальную газовую постоянную и ускорение свободного падения принять равными соответственно R = 8,3 Дж/(моль·К) и g = 10 м/с^2. Результат выразите в сантиметрах.

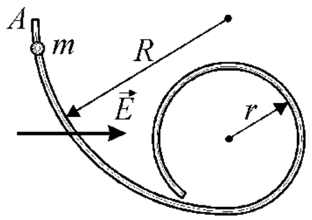
2.9.1. *Решение.* Давление насыщенного пара воды при конечной температуре системы T = t + 273K = 400K больше, чем давление за счёт веса поршня и давления внешней атмосферы равное $p = p_0 + \dfrac{Mg}{S}$ = 2·10^5 Па. Поэтому поршень будет подниматься над поверхностью воды пока вся она не превратится в ненасыщенный пар, обеспечивающий данное давление. Уравнение состояния (Клапейрона – Менделеева), записанное для такого газа имеет вид: $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$, где объём занимаемый паром равен V = Sh. Используя приведённые равенства, получаем искомый результат: $h = \dfrac{m \cdot R \cdot T}{\mu \cdot (p_0 S + Mg)}$.

***Ответ*:** $h = \dfrac{m \cdot R \cdot T}{\mu \cdot (p_0 S + Mg)} = 0{,}83$ м = 83 см.

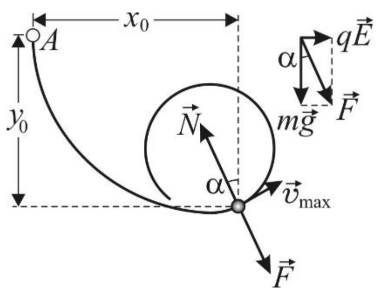
Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б.
Правильно записано выражение для давления – до 4 б.
Правильно проведен анализ состояния водяного пара в конечном состоянии – до 8 б.
Правильно записано уравнение Клапейрона – Менделеева – до 13 б.
Получено верное выражение для высоты подъема поршня – до 18 б.
Получен верный численный ответ – до 20 б.

3.9.1. Задача. Тонкой пластмассовой спице придали форму, изображенную на рисунке, изогнув ее в виде дуги, образующей четверть окружности радиусом $R = 1$ м, и кольцевого витка радиусом $r = 0{,}25$ м. Плоскость дуги и витка расположена вертикально. По спице может без трения перемещаться маленькая бусинка массой $m = 1$ г, несущая заряд $q = 10^{-6}$ Кл. Вся система помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^3$ В/м, направленное горизонтально в плоскости дуги и витка. Бусинку помещают в точку *A*, в которой касательная к дуге окружности радиусом *R* вертикальна, и отпускают без начальной скорости. Чему равна максимальная скорость v_{max} бусинки? Заряд бусинки при движении остается неизменным. Поляризацией пластмассы и потерями энергии на излучение можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Решение. Бусинка движется под действием трех сил: силы тяжести $m\vec{g}$, кулоновской силы $q\vec{E}$ и силы реакции спицы $\vec{N}$ (см. рисунок). Первые две силы образуют однородное силовое поле, направленное под углом α к вертикали, причем $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{qE}{mg}$. Скорость бусинки максимальна в точке, в которой вектор скорости перпендикулярен суммарной силе, действующей на нее. Как видно из рисунка, эта точка лежит на пересечении прямой, проходящей через центр витка под углом α к вертикали, с окружностью радиусом *r* в нижней ее части. Для нахождения максимальной скорости воспользуемся законом сохранения энергии. Выберем точку *A* за точку отсчета потенциальной энергии. Тогда



$$\frac{mv_{max}^2}{2} = qEx_0 + mgy_0, \text{ где } x_0 = R + r\sin\alpha,\; y_0 = R - r(1-\cos\alpha).$$

Отсюда $v_{max} = \sqrt{\dfrac{2}{m}}\sqrt{qE\big(R + r\sin\alpha\big) + mg\big(R - r(1-\cos\alpha)\big)}$. Учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{qE}{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{mg}{\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}}$, после несложных преобразований получаем **ответ:**

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{qER + mg(R-r) + r\sqrt{(qE)^2 + (mg)^2}} \approx 4{,}7 \text{ м/с}.$$

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б.
Сделан рисунок с указанием сил, действующих на бусинку в момент достижения максимальной скорости – до 6 б.
Правильно записано условие максимума скорости бусинки – до 10 б;
Правильно записан закон сохранения (изменения) энергии – до 15 б.
Получено верное выражение для максимальной скорости бусинки – до 18 б;
Получен верный численный ответ – до 20 б.

4.5.1. Задача. Тонкая собирающая линза дает на экране изображение предмета с увеличением $\Gamma = 3$. Какова оптическая сила D линзы, если расстояние между предметом и экраном $L = 80$ см?

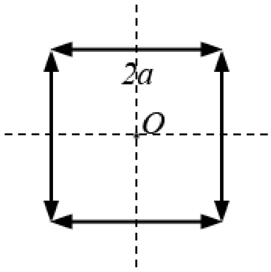
4.5.1. Решение. По формуле тонкой линзы $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, где a и b – расстояния от предмета до линзы и от линзы да изображения. По условию задачи $\frac{b}{a} = \Gamma$, $a + b = L$. Отсюда $a = \frac{L}{\Gamma + 1}$, $b = \frac{\Gamma L}{\Gamma + 1}$. Объединяя записанные выражения, получаем, что $D = \frac{(\Gamma + 1)^2}{\Gamma L}$.

Ответ: $D = \frac{(\Gamma + 1)^2}{\Gamma L} \approx 6{,}7$ дптр.

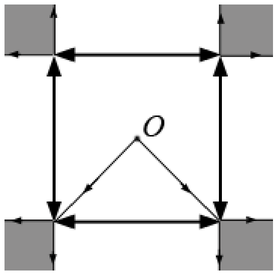
Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б;
Правильно записана формула тонкой линзы – до 6 б;
Правильно записано выражение для увеличения линзы – до 12 б;
В результате решения системы уравнений получено правильное выражение для оптической силы линзы – до 18б.
Получено верное численное значение оптической силы линзы – 20 б.

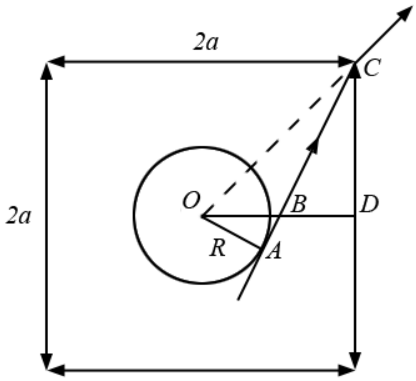
5.3.1. Задача. Оптическая система состоит из четырёх одинаковых тонких собирающих линз диаметром $2a$ = 4,5 см, расположенных как показано на рисунке. Оптические оси всех линз находятся в одной плоскости и пересекаются в точке *O*, которая совпадает с фокусом каждой линзы. В центр системы (точка *O*) помещают источник света сферической формы. Определите минимальный радиус источника света R_{min}, при котором такая система будет излучать свет по всем направлениям в плоскости рисунка? Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.



5.3.1.*Решение.* Как сказано в условии задачи, точка *O* является фокусом линз. Поэтому, если поместить в неё точечный источник света, то, как видно из рисунка, свет не будет проходить в области, закрашенные серым цветом. Однако если вместо точечного источника взять источник сферической формы, то при достаточных его размерах свет будет попадать и в эти области, распространяясь по всем возможным направлениям.



Поскольку система симметричная, достаточно рассмотреть ход луча – например, *AC*, идущего от одной из крайних точек сферического источника света (см. рисунок). Чтобы оптическая система могла излучать свет по всем направлениям в плоскости рисунка достаточно, чтобы этот луч выходил под углом 45º к плоскости расположения правой линзы. Тогда продолжение этого луча пройдёт через точку *O*. Из подобия треугольников *AOB* и *BCD* можно записать: $\frac{AB}{OA}=\frac{BD}{CD}$, где $OA=R$, $CD=a$. Получим: $R\cdot BD=a\cdot AB$. Длину отрезка *BD* можно найти, используя формулу тонкой линзы (имея в виду виртуальный источник, расположенный в точке «*B*»): $\frac{1}{BD}-\frac{1}{OD}=\frac{1}{F}$. Поскольку $OD=F=a$, получим: $BD=\frac{a}{2}$. Длину отрезка *AB* найдём, используя теорему Пифагора: $AB=\sqrt{OB^2-R^2}$. Учитывая, что $OB=OD-BD=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$, получим $AB=\sqrt{\frac{a^2}{4}-R^2}$. Подставляем выражения для *BD* и *AB* в полученное ранее соотношение: $R\cdot\frac{a}{2}=a\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4}-R^2}$. Откуда получаем ответ задачи: $R=\frac{a}{\sqrt{5}}$.



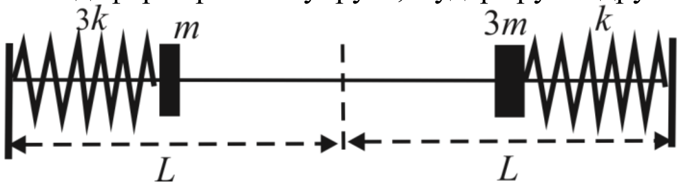
Ответ: $R_{\min}=\frac{a}{\sqrt{5}}=1$ см.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):
Приступил к решению задачи – 2 б;
Правильно изображена оптическая схема с указанием хода лучей – до 7б.
Правильно записана формула тонкой линзы – до 10 б.
Правильно записаны геометрические соотношения, необходимые для нахождения минимального радиуса источника – до 13 б.
Получено верное выражение для минимального радиуса источника – до 18 б.
Получено верное численное значение минимального радиуса источника – 20 б.

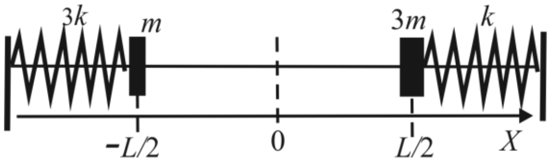
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада «Ломоносов 2022/2023» по физике
Заключительный этап для 10-х – 11-х классов

ВАРИАНТ 2

Задача 1.2.2. Две лёгкие пружины одинаковой длины L = 20 см закреплены на гладком горизонтальном стержне. Жёсткость первой пружины равна $k_1 = 3k$, а второй – $k_2 = k$. К концам пружин прикреплены небольшие грузы массами $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$. В положении равновесия грузы касаются друг друга. Сдвинув грузы вдоль стержня, пружины сжимают так, что их длина уменьшается в два раза (см. рисунок). После этого грузы отпускают. Через некоторое время грузы сталкиваются и слипаются друг с другом. Определить жесткость первой пружины k_1, если полная механическая энергия системы после соударения грузов равна W =3 Дж. Пружины деформированы упруго, а удар грузов друг о друга центральный.



Решение.



Так как пружины деформированы упруго и стержень гладкий, то после отпускания грузы будут двигаться по закону гармоническому закону, при этом их можно считать материальными точками. Направим ось OX вдоль движения грузов, а начало координат выберем в положении равновесия. Тогда законы движения грузов запишутся в следующем виде:

$$x_1(t) = -\frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t\right);$$

$$x_2(t) = \frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\cdot t\right)/$$

В момент столкновения координаты грузов их координаты равны

$x_1(t_0) = x_2(t_0)$.

Откуда получим:

$$\frac{L}{2}\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\cdot t_0\right)+\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t_0\right)\right)=0.$$

Используя известное тригонометрическое соотношение, представим это уравнение в виде:

$$2\cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}+\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2}\right)\cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}-\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2}\right)=0.$$

Нам нужен наименьший положительный корень этого уравнения, следовательно,:

$\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}+\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2}=\frac{\pi}{2}$. Откуда найдём время, через которое произойдёт столкновение грузов:

$$t_0 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

Координата места столкновения при этом равна:

$$x_0 = \frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\cdot t_0\right) = \frac{L\sqrt{2}}{4}.$$

Проекции скоростей грузов на ось ОХ непосредственно перед столкновением равны:

$$\upsilon_1(t_0) = \frac{L}{2}\cdot\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t_0\right) = \frac{L\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{3k}{m}};$$

$$\upsilon_2(t_0) = -\frac{L}{2}\cdot\sqrt{\frac{k}{3m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\cdot t_0\right) = -\frac{L\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{k}{3m}}.$$

По закону сохранения импульса, скорость слипшихся грузов сразу после соударения равна:

$$u = \frac{m\upsilon_1(t_0) + 3m\upsilon_2(t_0)}{4m} = 0.$$

Таким образом, полная механическая энергия системы сразу после соударения определяется только потенциальной энергией пружин (в дальнейшем эта энергия сохраняется). Получим:

$$W = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{3kx_0^2}{2} = \frac{kL^2}{4}\ \text{см.}$$

Тогда $k = \frac{4W}{L^2}$, а жёсткость первой пружины

$$k_1 = 3k = \frac{12W}{L^2} = 900\ \text{Н/м.}$$

Ответ: $k_1 = \frac{12W}{L^2} = 900$ Н/м.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б;
Записаны законы движения грузов – до 5 б;
Найдено время, через которое грузы столкнутся – до 10 б;
Доказано, что это сразу после столкновения грузов кинетическая энергия системы равна нулю – до 15 б;
Получено верное выражение для жёсткости первой пружины – до 18 б;
Получен верный численный ответ – 20 б.

2.9.2. Задача. В вертикально расположенной трубе с запаянным дном и с поперечным сечением $S = 100$ см^2 под легко подвижным поршнем массой $M = 100$ кг находится некоторое количество воды при температуре $0°C$. Вся конструкция нагревается до температуры $t = 127$ $°C$. В результате чего поршень поднимется на высоту $h = 0{,}83$ м. Определить массу воды m. Давление насыщенных паров воды при температуре $t = 127°C$ равно $p_н = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па. Атмосферное давление считать равным $p_0 = 10^5$ Па. Молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Универсальную газовую постоянную и ускорение свободного падения принять равными соответственно $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) и $g = 10$ м/с^2. Результат выразите в граммах.

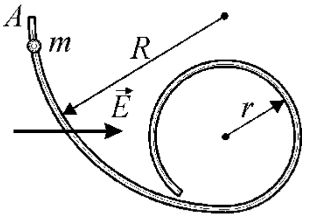
2.9.2. ***Решение***: Давление насыщенного пара воды при конечной температуре системы $T = t + 273К = 400К$ больше, чем давление за счёт веса поршня и давления внешней атмосферы равное $p = p_0 + \dfrac{Mg}{S}$ = $2 \cdot 10^5$ Па. Поэтому поршень будет подниматься над поверхностью воды пока вся она не превратится в ненасыщенный пар, обеспечивающий данное давление. Уравнение состояния (Клапейрона – Менделеева), записанное для такого газа имеет вид: $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$, где объём занимаемый паром равен $V = Sh$. Используя приведённые равенства, получаем искомый результат: $m = \dfrac{\mu \cdot h \cdot (p_0 S + Mg)}{RT}$.

Ответ: $m = \dfrac{\mu \cdot h \cdot (p_0 S + Mg)}{RT} = 9$ г.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

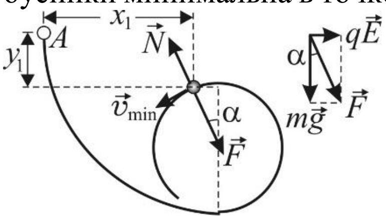
Приступил к решению задачи – 2 б.
Правильно записано выражение для давления – до 4 б.
Правильно проведен анализ состояния водяного пара в конечном состоянии – до 8 б.
Правильно записано уравнение Клапейрона – Менделеева – до 13 б.
Получено верное выражение для массы воды – до 18 б.
Получен верный численный ответ – до 20 б.

3.9.2. Задача. Тонкой пластмассовой спице придали форму, изображенную на рисунке, изогнув ее в виде дуги, образующей четверть окружности радиусом $R = 1$ м, и кольцевого витка радиусом $r = 0{,}25$ м. Плоскость дуги и витка расположена вертикально. По спице может без трения перемещаться маленькая бусинка массой $m = 1$ г, несущая заряд $q = 10^{-6}$ Кл. Вся система помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^3$ В/м, направленное горизонтально в плоскости дуги и витка. Бусинку помещают в точку *A*, в которой касательная к дуге окружности радиусом *R* вертикальна, и отпускают без начальной скорости. Чему равна минимальная скорость $v_{\min}$ бусинки при ее движении по витку? Заряд бусинки при движении остается неизменным. Поляризацией пластмассы и потерями энергии на излучение можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



При решении считайте, что $r \le \dfrac{(qE+mg)R}{mg+\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}$.

Решение. Бусинка движется под действием трех сил: силы тяжести $m\vec{g}$, кулоновской силы $q\vec{E}$ и силы реакции спицы $\vec{N}$ (см. рисунок). Первые две силы образуют однородное силовое поле, направленное под углом α к вертикали, причем $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{qE}{mg}$. Скорость бусинки минимальна в точке, в которой вектор скорости перпендикулярен суммарной силе, действующей на нее. Как видно из рисунка, эта точка при достаточно малых r лежит на пересечении прямой, проходящей через центр витка под углом α к вертикали, с окружностью радиусом r в верхней ее части. Для нахождения минимальной скорости воспользуемся законом сохранения энергии. Выберем точку *A* за точку отсчета потенциальной энергии. Тогда



$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = qEx_1 + mgy_1, \text{ где } x_1 = R - r\sin\alpha,\ y_1 = R - r(1+\cos\alpha).$$

Отсюда $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{2}{m}}\sqrt{qE\big(R - r\sin\alpha\big) + mg\big(R - r(1+\cos\alpha)\big)}$. Учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{qE}{\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{mg}{\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}}$, после несложных преобразований получаем, что $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{2}{m}}\sqrt{qER + mg(R-r) - r\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}$. Это решение справедливо, если выполняется неравенство $r \le \dfrac{(qE+mg)R}{mg+\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}$. В противном случае минимальная скорость достигается в другой точке витка.

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{2}{m}}\sqrt{qER + mg(R-r) - r\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}} \approx 3{,}5$ м/с.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):
Приступил к решению задачи – 2 б.
Сделан рисунок с указанием сил, действующих на бусинку в момент достижения минимальной скорости – до 6 б.
Правильно записано условие минимума скорости бусинки – до 10 б;
Правильно записан закон сохранения (изменения) энергии – до 15 б.
Получено верное выражение для минимальной скорости бусинки – до 18 б;
Получен верный численный ответ – до 20 б.

4.5.2. Задача. Тонкая собирающая линза с оптической силой $D = 6$ дптр дает на экране изображение предмета с увеличением $\Gamma = 3$. Каково расстояние L между предметом и экраном?

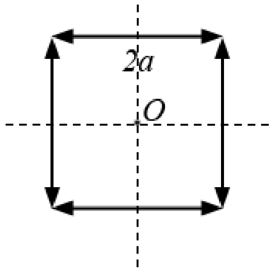
4.5.2. Решение. По формуле тонкой линзы $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, где a и b – расстояния от предмета до линзы и от линзы да изображения. По условию задачи $\frac{b}{a} = \Gamma$, $a + b = L$. Отсюда $a = \frac{L}{\Gamma + 1}$, $b = \frac{\Gamma L}{\Gamma + 1}$. Объединяя записанные выражения, получаем, что $L = \frac{(\Gamma + 1)^2}{\Gamma D}$.

Ответ: $L = \frac{(\Gamma + 1)^2}{\Gamma D} \approx 0{,}89$ м.

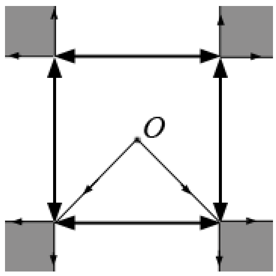
Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б;
Правильно записана формула тонкой линзы – до 6 б;
Правильно записано выражение для увеличения линзы – до 12 б;
В результате решения системы уравнений получено правильное выражение для расстояния между предметом и экраном – до 18б.
Получено верное численное значение расстояния между предметом и экраном – 20 б.

5.3.2. Задача. Оптическая система состоит из четырёх одинаковых тонких собирающих линз диаметром $2a$, расположенных как показано на рисунке. Оптические оси всех линз находятся в одной плоскости и пересекаются в точке *O*, которая совпадает с фокусом каждой линзы. В центр системы (точка *O*) помещают источник света сферической формы радиуса R = 2,25 см. Определите, при каких значениях фокусного расстояния линз F такая система будет излучать свет по всем направлениям в плоскости рисунка? Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

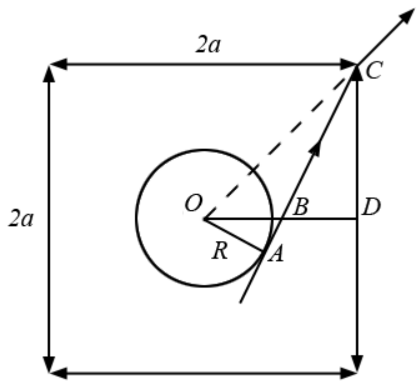


5.3.2. ***Решение.*** Как сказано в условии задачи, точка *O* является фокусом линз. Поэтому, если поместить в неё точечный источник света, то, как видно из рисунка, свет не будет проходить в области, закрашенные серым цветом. Однако если вместо точечного источника взять источник сферической формы, то при достаточных его размерах свет будет попадать и в эти области, распространяясь по всем возможным направлениям.



Поскольку система симметричная, достаточно рассмотреть ход луча – например, AC, идущего от одной из крайних точек сферического источника света (см. рисунок). Чтобы оптическая система могла излучать свет по всем направлениям в плоскости рисунка достаточно, чтобы этот луч выходил под углом 45^o к плоскости расположения правой линзы. Тогда продолжение этого луча пройдёт через точку *O*. Из подобия треугольников AOB и BCD можно записать: $\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{BD}{CD}$, где $OA = R$, $CD = a$. Получим: $R \cdot BD = a \cdot AB$. Длину отрезка BD можно найти, используя формулу тонкой линзы (имея в виду виртуальный источник, расположенный в точке «*B*»): $\dfrac{1}{BD} - \dfrac{1}{OD} = \dfrac{1}{F}$.

Поскольку $OD = F = a$, получим: $BD = \dfrac{a}{2}$. Длину отрезка AB найдём, используя теорему Пифагора: $AB = \sqrt{OB^2 - R^2}$. Учитывая, что $OB = OD - BD = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$, получим $AB = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - R^2}$. Подставляем выражения для BD и AB в полученное ранее соотношение: $R \cdot \dfrac{a}{2} = a \cdot \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - R^2}$. Откуда получаем, что система излучает свет по всем направлениям при условии:



$F = a \le \sqrt{5} \cdot R$. Можно добавить, что F не может быть меньше R, но это понятно из рисунка.

Ответ: $R < F \le \sqrt{5} \cdot R \approx 5$ см.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б;

Правильно изображена оптическая схема с указанием хода лучей – до 7б.

Правильно записана формула тонкой линзы – до 10 б.

Правильно записаны геометрические соотношения, необходимые для решения задачи – до 13 б.

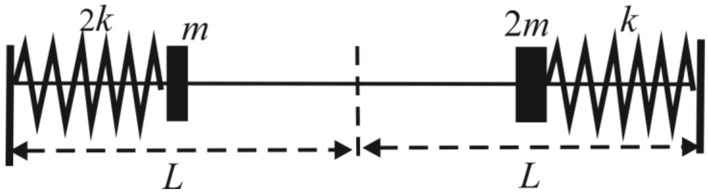
Получено верное выражение для фокусного расстояния линзы – до 18 б.

Получено верное численное значение фокусного расстояния – 20 б.

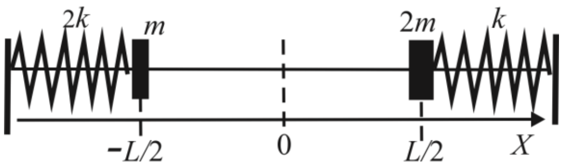
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада «Ломоносов 2022/2023» по физике
Заключительный этап для 10-х – 11-х классов

ВАРИАНТ 3

Задача 1.2.3. Две лёгкие пружины одинаковой длины закреплены на гладком горизонтальном стержне. Жёсткость первой пружины равна $k_1 = 2k$, а второй – $k_2 = k$. К концам пружин прикреплены небольшие грузы массами $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$. В положении равновесия грузы касаются друг друга. Сдвинув грузы вдоль стержня, пружины сжимают так, что их длина уменьшается в два раза (см. рисунок). После этого грузы отпускают. Через некоторое время грузы сталкиваются и слипаются друг с другом. Чему равна длина недеформированных пружин L, если амплитуда колебаний образовавшегося тела равна $A = 5$ см? Считать, что пружины деформированы упруго, а удар грузов друг о друга центральный.



Решение.



Так как пружины деформированы упруго и стержень гладкий, то после отпускания грузы будут двигаться по закону гармоническому закону, при этом их можно считать материальными точками. Направим ось OX вдоль движения грузов, а начало координат выберем в положении равновесия. Тогда законы движения грузов запишутся в следующем виде:

$$x_1(t) = -\frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\cdot t\right);$$

$$x_2(t) = \frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot t\right)/$$

В момент столкновения координаты грузов их координаты равны
$x_1(t_0) = x_2(t_0)$.

Откуда получим:

$$\frac{L}{2}\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot t_0\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\cdot t_0\right)\right) = 0.$$

Используя известное тригонометрическое соотношение, представим это уравнение в виде:

$$2\cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} + \sqrt{\frac{2k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2}\right)\cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} - \sqrt{\frac{2k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2}\right) = 0.$$

Нам нужен наименьший положительный корень этого уравнения, следовательно,:

$\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} + \sqrt{\frac{2k}{m}}\right)\cdot\frac{t_0}{2} = \frac{\pi}{2}$. Откуда найдём время, через которое произойдёт столкновение грузов:

$$t_0 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}\ .$$

Координата места столкновения при этом равна:

$$x_0 = \frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot t_0\right) = \frac{L}{4}\ .$$

Проекции скоростей грузов на ось ОХ непосредственно перед столкновением равны:

$$\upsilon_1(t_0) = \frac{L}{2}\cdot\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\cdot t_0\right) = \frac{L\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{2k}{m}}\ ;$$

$$\upsilon_2(t_0) = -\frac{L}{2}\cdot\sqrt{\frac{k}{2m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot t_0\right) = -\frac{L\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{k}{2m}}\ .$$

По закону сохранения импульса, скорость слипшихся грузов сразу после соударения равна:

$$u = \frac{m\upsilon_1(t_0) + 2m\upsilon_2(t_0)}{3m} = 0\ .$$

Таким образом, это положение является наибольшим отклонением получившегося тела от положения равновесия. Так как положение равновесия тела совпадает с началом координат (пружины в этом положении не деформированы), то $A = x_0$. Окончательно получим:

$L = 4A = 20$ см.

Ответ: $L = 4A = 20$ см.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б;
Записаны законы движения грузов – до 5 б;
Найдено время, через которое грузы столкнутся – до 10 б;
Доказано, что это положение является положением максимального отклонения от положения равновесия – до 15 б;
Получено верное выражение для длины пружины – до 18 б;
Получен верный численный ответ – 20 б.

2.9.3. Задача. В вертикально расположенной трубе с запаянным дном и с поперечным сечением S = 100 см^2 под легко подвижным поршнем массой M находится m = 9 г воды при температуре 0°C. Вся конструкция нагревается до температуры t = 127 °C. Найти массу поршня M, если в результате повышения температуры системы он поднимется на высоту h = 0,83 м. Давление насыщенных паров воды при температуре t = 127°C равно $p_{н}$ = 2,5·10^5 Па. Атмосферное давление считать равным p_0 = 10^5 Па. Молярная масса воды μ = 18·10^{-3} кг/моль. Универсальную газовую постоянную и ускорение свободного падения принять равными соответственно R = 8,3 Дж/(моль·К) и g = 10 м/с^2. Результат выразите в килограммах.

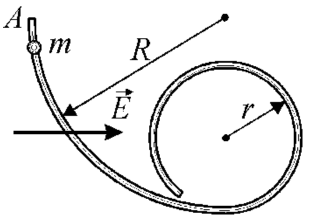
2.9.3. *Решение.* Давление насыщенного пара воды при конечной температуре системы T = t + 273К = 400К больше, чем давление за счёт веса поршня и давления внешней атмосферы равное $p = p_0 + \dfrac{Mg}{S}$ = 2·10^5 Па. Поэтому поршень будет подниматься над поверхностью воды пока вся она не превратится в ненасыщенный пар, обеспечивающий данное давление. Уравнение состояния (Клапейрона – Менделеева), записанное для такого газа имеет вид: $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$, где объём занимаемый паром равен $V = Sh$. Используя приведённые равенства, получаем ответ задачи: $M = \dfrac{mRT}{\mu hg} - \dfrac{p_0 S}{g}$ $\left(\text{или} \quad M = \dfrac{mRT - \mu h p_0 S}{\mu hg} \right)$.

***Ответ*:** $M = \dfrac{mRT}{\mu hg} - \dfrac{p_0 S}{g} = 100$ кг. $\left(\text{или} \quad M = \dfrac{mRT - \mu h p_0 S}{\mu hg} \right)$.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

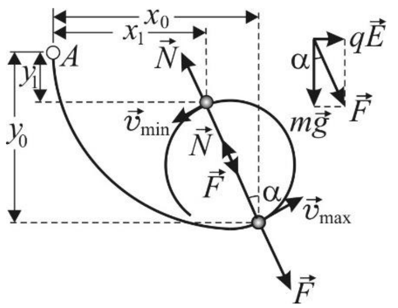
Приступил к решению задачи – 2 б.
Правильно записано выражение для давления – до 4 б.
Правильно проведен анализ состояния водяного пара в конечном состоянии – до 8 б.
Правильно записано уравнение Клапейрона – Менделеева – до 13 б.
Получено верное выражение для массы поршня – до18 б.
Получен верный численный ответ – 20 б.

3.9.3. Задача. Тонкой пластмассовой спице придали форму, изображенную на рисунке, изогнув ее в виде дуги, образующей четверть окружности радиусом $R = 1$ м, и кольцевого витка радиусом $r = 0{,}25$ м. Плоскость дуги и витка расположена вертикально. По спице



может без трения перемещаться маленькая бусинка массой $m = 1$ г, несущая заряд $q = 10^{-6}$ Кл. Вся система помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^3$ В/м, направленное горизонтально в плоскости дуги и витка. Бусинку помещают в точку *A*, в которой касательная к дуге окружности радиусом *R* вертикальна, и отпускают без начальной скорости. Чему равно отношение *n* максимальной скорости $v_{\max}$ к минимальной скорости $v_{\min}$ бусинки при ее движении по витку? Заряд бусинки при движении остается неизменным. Поляризацией пластмассы и потерями энергии на излучение можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. При решении считайте, что $r \le \dfrac{(qE+mg)R}{mg+\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}$.

Решение. Бусинка движется под действием трех сил: силы тяжести $m\vec{g}$, кулоновской силы $q\vec{E}$ и силы реакции спицы $\vec{N}$ (см. рисунок). Первые две силы образуют однородное



силовое поле, направленное под углом α к вертикали, причем $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{qE}{mg}$. Скорость бусинки принимает экстремальные значения ($v_{\max}$ и $v_{\min}$) в точках, в которых вектор скорости перпендикулярен суммарной силе, действующей на нее. Как видно из рисунка, эти точки при достаточно малых *r* лежат на пересечении прямой, проходящей через центр витка под углом α к вертикали, с окружностью радиусом r в нижней и верхней ее частях. Для нахождения экстремальных значений скорости воспользуемся законом сохранения энергии. Выберем точку *A* за точку отсчета потенциальной энергии. Тогда $\dfrac{mv_{\max}^2}{2} = qEx_0 + mgy_0$, где $x_0 = R + r\sin\alpha$, $y_0 = R - r(1-\cos\alpha)$ и $\dfrac{mv_{\min}^2}{2} = qEx_1 + mgy_1$, $x_1 = R - r\sin\alpha$, $y_1 = R - r(1+\cos\alpha)$. Отсюда

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{qE\big(R + r\sin\alpha\big) + mg\big(R - r(1-\cos\alpha)\big)}, \qquad v_{\min} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{qE\big(R - r\sin\alpha\big) + mg\big(R - r(1+\cos\alpha)\big)}.$$

Поскольку $\sin\alpha = \dfrac{qE}{\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{mg}{\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}}$, после несложных преобразований находим

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{qER + mg(R-r) + r\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}, \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{qER + mg(R-r) - r\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}.$$

Последнее решение справедливо, если выполняется неравенство $r \le \dfrac{(qE+mg)R}{mg+\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}$.

В противном случае минимальная скорость достигается в другой точке витка.

Ответ: $n = \sqrt{\dfrac{qER + mg(R-r) + r\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}{qER + mg(R-r) - r\sqrt{(qE)^2+(mg)^2}}} \approx 1{,}35$.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б.
Сделан рисунок с указанием сил, действующих на бусинку в момент достижения максимальной и минимальной скорости – до 6 б.
Правильно записано условие максимума и минимума скорости бусинки – до 10 б;
Правильно записан закон сохранения (изменения) энергии – до 15 б.
Получено верное выражение для отношения максимальной скорости бусинки к минимальной – до 18 б;
Получен верный численный ответ – до 20 б.

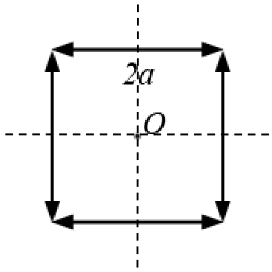
4.5.3. Задача. Тонкая собирающая линза с оптической силой $D = 5$ дптр дает на экране, расположенном на расстоянии L = 1 м от предмета, его увеличенное изображение. Каково увеличение Γ, даваемое линзой?

4.5.3. Решение. По формуле тонкой линзы $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, где a и b – расстояния от предмета до линзы и от линзы да изображения. По условию задачи $\frac{b}{a} = \Gamma$, $a + b = L$. Отсюда $a = \frac{L}{\Gamma + 1}$, $b = \frac{\Gamma L}{\Gamma + 1}$. Из записанных выражений получаем квадратное уравнение относительно Г, а именно, $\Gamma^2 - (DL - 2)\Gamma + 1 = 0$. Условию задачи удовлетворяет бóльший по величине корень $\Gamma = \left(\frac{DL}{2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{DL}{2} - 1\right)^2 - 1}$. **Ответ:** $\Gamma = \left(\frac{DL}{2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{DL}{2} - 1\right)^2 - 1} \approx 2{,}62$.

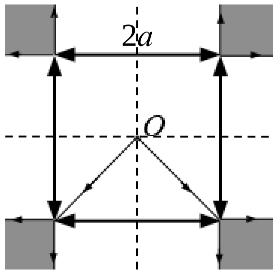
Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б;
Правильно записана формула тонкой линзы – до 6 б;
Правильно записано выражение для увеличения линзы – до 12 б;
В результате решения системы уравнений получено правильное выражение для увеличения, даваемого линзой, и произведен отбор корня – до 18б;
Получено верное численное значение увеличения, даваемого линзой оптической – 20 б.

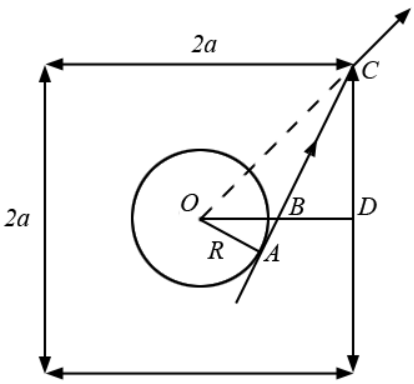
5.3.3. Задача. Оптическая система состоит из четырёх одинаковых тонких собирающих линз диаметром $2a = 9$ см, расположенных как показано на рисунке. Оптические оси всех линз находятся в одной плоскости и пересекаются в точке O, которая совпадает с фокусом каждой линзы. Если в центр системы (точка O) поместить точечный источник света, то в плоскости рисунка образуются области, в которые не будет попадать свет (выделены на рисунке серым цветом). Точечный источник заменяют на источник сферической формы. Определите, при каких значениях радиуса сферического источника R такие области не исчезнут полностью. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.



5.3.3. ***Решение.*** Как сказано в условии задачи, точка O является фокусом линз. Поэтому, если поместить в неё точечный источник света, то, как видно из рисунка, свет не будет проходить в области, закрашенные серым цветом. Однако если вместо точечного источника взять источник сферической формы, то при достаточных его размерах свет будет попадать и в эти области, распространяясь по всем возможным направлениям.



Поскольку система симметричная, достаточно рассмотреть ход луча – например, AC, идущего от одной из крайних точек сферического источника света (см. рисунок). Чтобы оптическая система могла излучать свет по всем направлениям в плоскости рисунка достаточно, чтобы этот луч выходил под углом 45° к плоскости расположения правой линзы. Тогда продолжение этого луча пройдёт через точку O. Из подобия треугольников AOB и BCD можно записать: $\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{BD}{CD}$, где $OA = R$, $CD = a$. Получим: $R \cdot BD = a \cdot AB$. Длину отрезка BD можно найти, используя формулу тонкой линзы (имея в виду виртуальный источник, расположенный в точке «B»): $\dfrac{1}{BD} - \dfrac{1}{OD} = \dfrac{1}{F}$. Поскольку $OD = F = a$, получим: $BD = \dfrac{a}{2}$. Длину отрезка AB найдём, используя теорему Пифагора: $AB = \sqrt{OB^2 - R^2}$. Учитывая, что $OB = OD - BD = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$, получим $AB = \sqrt{\dfrac{a}{4}^2 - R^2}$. Подставляем выражения для BD и AB в полученное ранее соотношение: $R \cdot \dfrac{a}{2} = a \cdot \sqrt{\dfrac{a}{4}^2 - R^2}$.



Откуда получаем, что области, в которые не проникает свет от источника, останутся, если его радиус меньше чем: $R = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. ***Ответ*:** $R < \dfrac{a}{\sqrt{5}} = 2{,}01$ см ≈ 2 см.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):

Приступил к решению задачи – 2 б;
Правильно изображена оптическая схема с указанием хода лучей – до 7б.
Правильно записана формула тонкой линзы – до 10 б.
Правильно записаны геометрические соотношения, необходимые для нахождения минимального радиуса источника – до 13 б.
Получено верное выражение для радиуса источника света – до 18 б.
Получено верное численное значение радиуса источника света – 20 б.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада «Ломоносов 2022/2023» по физике
Заключительный этап для 7-х – 9-х классов

1.1. Задача. Шуховская телебашня в Москве имеет высоту H = 148,5 м и массу M = 240 т. Какую массу m будет иметь точная копия этой башни, если ее изготовить из материала, плотность которого ρ_2 в 3 раза меньше плотности материала ρ_1 оригинальной конструкции: $\rho_2 = \rho_1/3$. Высота копии башни h = 50 см. Ответ выразить в граммах и округлить до целых.

1.1. Решение. Отношение линейных размеров башни и ее копии: $\frac{H}{h} = \alpha$. Тогда отношение объемов конструкций башни и ее копии: $\frac{V_{\text{башни}}}{V_{\text{копии}}} = \alpha^3 = \left(\frac{H}{h}\right)^3$. Плотности материалов оригинальной конструкции и копии равны соответственно $\rho_1 = \frac{M}{V_{\text{башни}}}$ и $\rho_2 = \frac{m}{V_{\text{копии}}}$. Следовательно, $m = \frac{M}{3}\left(\frac{h}{H}\right)^3 = 3\text{г}$.

Ответ: $m = \frac{M}{3}\left(\frac{h}{H}\right)^3 = 3\text{г}$.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):
Записано отношение линейных размеров башни и ее копии – 3б;
Найдено отношение объемов конструкций башни и ее копии – 5б;
Правильно учтено определение плотности материалов оригинальной конструкции и копии– 5б;
Найдено общее выражение для массы башни – 5б;
Получен верный численный ответ – 2б.

2.1. Задача. Горячий чай наливают до краев в большую кружку цилиндрической формы. В результате теплообмена с окружающей средой чай охлаждается на Δt = 1°C за время τ_1 = 1 мин. За какое время τ_2 охладится на Δt = 1°C тот же чай, если его разлить на восемь одинаковых маленьких кружек, наполнив их до краев? Считайте, что большая и маленькая кружки подобны друг другу. Теплоемкостью кружек пренебречь.

2.1. Решение. Масса m_1 и объем чая V_1 в большой кружке и масса m_2 и объем чая V_2 в маленькой кружке различаются в восемь раз: $m_1 = 8m_2$, $V_1 = 8V_2$.Объем каждой чашки пропорционален кубу характерного размера чашки, а площадь поверхности – квадрату характерного объема. Следовательно, площади поверхностей S_1 и S_2 различаются в четыре раза. Тогда можно записать:

$$cm_1\Delta t = kS_1(t_0 - t)\tau_1, \quad cm_2\Delta t = kS_2(t_0 - t)\tau_2 .$$

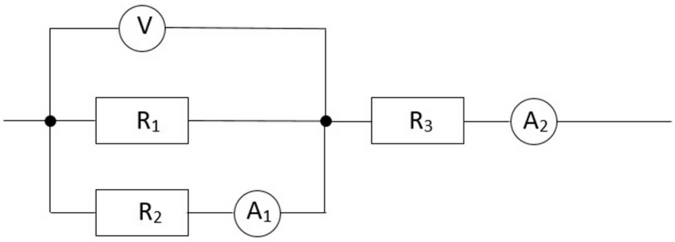
Здесь c – удельная теплоемкость, t_0 – температура окружающей среды.
Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{2} = 0,5\,\text{мин} .$$

Ответ: $\tau_2 = \frac{\tau_1}{2} = 0,5\,\text{мин}$.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):
Правильно записана формула для количества теплоты Q=cmt – 3б;
Записана связь скорости остывания от площади поверхности – 5б;
Записаны уравнения теплового балланса – 5б;
Получено решение в общем случае – 5б;
Получен верный численный ответ – 2б

3.1. Задача. На рисунке приведен участок цепи постоянного тока. Сопротивления резисторов $R_1 = R_3$. Показания амперметров A_1 и A_2 равны $I_1 = 0{,}2$ А и $I_2 = 1{,}2$ А соответственно. Показание идеального вольтметра V равно $U = 12$ В. Определите мощность P_3, выделяющуюся на резисторе R_3. Сопротивлением подводящих проводов и обоих амперметров пренебречь.



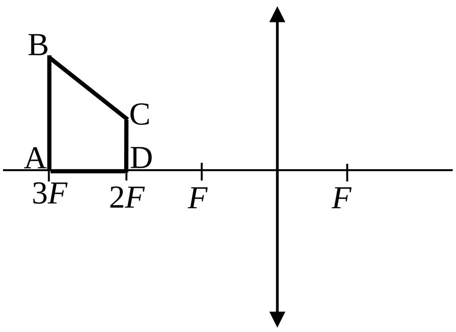
3.1. Решение. Сила тока через резистор R_1 равна $I = \frac{U}{R_1}$. Так как сопротивление вольтметра велико, то $I + I_1 = I_2$. Преобразуя записанные соотношения, получаем выражение для сопротивления первого резистора $R_1 = \frac{U}{I_2 - I_1}$.

Следовательно, искомая мощность равна $P_3 = I_2^2 R_3 = I_2^2 R_1 = \frac{UI_2^2}{I_2 - I_1} = 17{,}28\,\text{Вт}$.

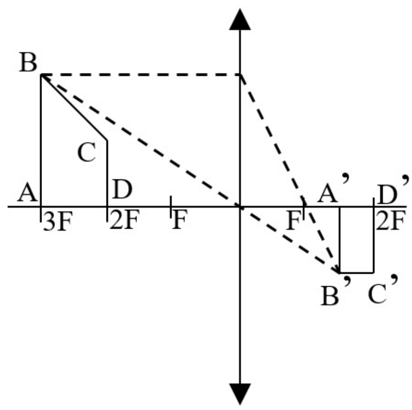
Ответ: $P_3 = \frac{UI_2^2}{I_2 - I_1} = 17{,}28\,\text{Вт}$.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):
Правильно записан закон Ома для сопротивления R_1 – 3б;
Записана связь токов протекающих через сопротивления – 5б;
Правильно записана формула для мощности тока на участках цепи – 5б;
Получено решение в общем случае – 5б;
Получен верный численный ответ – 2б

4.1. Задача. Прямоугольная трапеция ABCD расположена перед тонкой линзой с фокусным расстоянием $F = 20$ см так, как показано на рисунке (<u>*рисунок сделан не в масштабе!*</u>). Определите площадь изображения этой трапеции. Стороны AB и CD трапеции перпендикулярны главной оптической оси линзы. AB = 0,2 F, CD = 0,1 F, AD = F. Ответ приведите в см^2.



4.1. Решение. Построим изображение трапеции (<u>*рисунок сделан не в масштабе!*</u>):

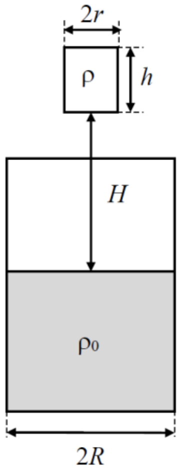


Получим прямоугольник со сторонами 0,1 F и F/2. Следовательно, площадь изображения равна $S = \dfrac{0{,}1F^2}{2} = 20\,\text{см}^2$.

Ответ: $S = \dfrac{0{,}1F^2}{2} = 20\,\text{см}^2$.

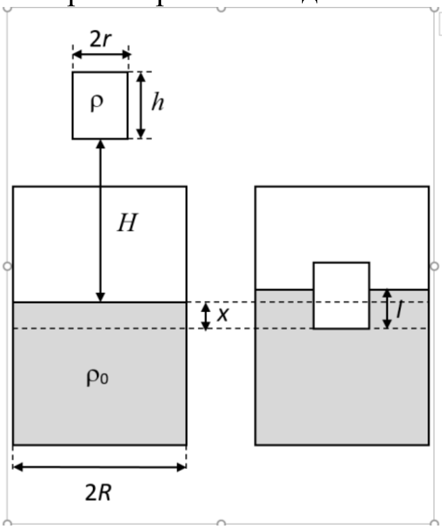
Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):
Правильно построено изображение хотя бы одной точки трапеции – 3б;
Правильно построено полное изображение всей трапеции – 5б;
Выражены геометрические размеры изображения через фокусное расстояние линзы – 5б;
Получено решение в общем случае – 5б;
Получен верный численный ответ – 2б

1.10.1. Задача. Пробка, имеющая цилиндрическую форму радиусом $r = 5$ см и высотой $h = 2$ см, без начальной скорости падает в сосуд, который заполнен водой частично, поэтому при падении пробки вода из сосуда не выливается. Сосуд также имеет форму цилиндра радиусом $R = 50$ см. До падения высота нижнего торца пробки над уровнем воды была равна $H = 20$ см. Плотность материала, из которого сделана пробка, равна $\rho = 400$ кг/м^3, плотность воды – $\rho_o = 1000$ кг/м^3. Какое количество теплоты выделится после того, как движение пробки и воды прекратится?



1.10.1. Решение.

После того, как движение пробки и воды прекратится, изменение кинетической энергии воды и пробки равно нулю, поэтому выделившееся количество теплоты будет равно изменению потенциальной энергии пробки и воды.



Определим глубину погружения пробки в жидкость:

$$\rho g h \pi r^2 = \rho_0 g l \pi r^2,$$

$$l = \frac{\rho h}{\rho_0}.$$

Уменьшение потенциальной энергии пробки равно $mg\left(H + x\right)$, где $m = \rho h \pi r^2$ Увеличение потенциальной энергии жидкости равно $\Delta m g \dfrac{l - x}{2}$, где Δm – масса жидкости, потенциальная энергия которой увеличилась.

Поскольку

$$\pi R^2 \cdot x = \pi\left(R^2 - r^2\right) \cdot l,$$

$$x = \frac{R^2 - r^2}{R^2} l = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) l.$$

Определим массу жидкости Δm:

$$\Delta m = \rho_0 \pi R^2 x = \rho_0 \pi R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) l = \rho_0 \pi R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\rho h}{\rho_0} = \rho h \pi \left(R^2 - r^2\right)$$

В соответствие с законом сохранения механической энергии запишем

$$Q = mg\left(H + x\right) - \Delta m g \frac{l - x}{2}.$$

Подставив в формулу для определения количества теплоты выражения для m, Δm, x, и l, получим:

$$Q = \rho h\pi r^2 g\left(H + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\rho h}{\rho_0}\right) - \rho h\pi\left(R^2 - r^2\right)g\,\frac{1 - \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}{2}\,\frac{\rho h}{\rho_0} =$$

$$= \rho h\pi r^2 g\left(H + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\rho h}{\rho_0}\right) - \rho h\pi\left(R^2 - r^2\right)g\,\frac{r^2}{2R^2}\,\frac{\rho h}{\rho_0} = \rho h\pi r^2 g\left(H + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\rho h}{\rho_0} - \frac{\left(R^2 - r^2\right)}{2R^2}\,\frac{\rho h}{\rho_0}\right) =$$

$$= \rho h\pi r^2 g\left(H + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\rho h}{\rho_0} - \frac{\left(R^2 - r^2\right)}{2R^2}\,\frac{\rho h}{\rho_0}\right) = \rho h\pi r^2 g\left(H + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\rho h}{\rho_0} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\rho h}{\rho_0}\right) =$$

$$= \rho h\pi r^2 g\left(H + \frac{\rho h}{2\rho_0}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right) = 400\cdot 0,02\cdot 3,14\cdot 0,05^2\cdot 10\cdot\left(0,2 + \frac{400\cdot 0,02}{2\cdot 1000}\left(1 - \frac{0,05^2}{0,5^2}\right)\right) \approx 128\ \text{мДж.}$$

Ответ: $Q = \rho h\pi r^2 g\left(H + \dfrac{\rho h}{2\rho_0}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)\right) \approx 128$ мДж.

Критерии оценки задачи (всего 20 баллов):
Определены глубину погружения пробки в жидкость – 2б;
Определена высота x слоя жидкости, которая участвует в изменении потенциальной энергии жидкости – 4б;
Определена масса слоя жидкости, которая участвует в изменении потенциальной энергии жидкости – 4б;
Верно записан закон изменения механической энергии – 4б;
Получено выражение для выделившегося количества теплоты– 4б;
Получен верный численный ответ – 2б.