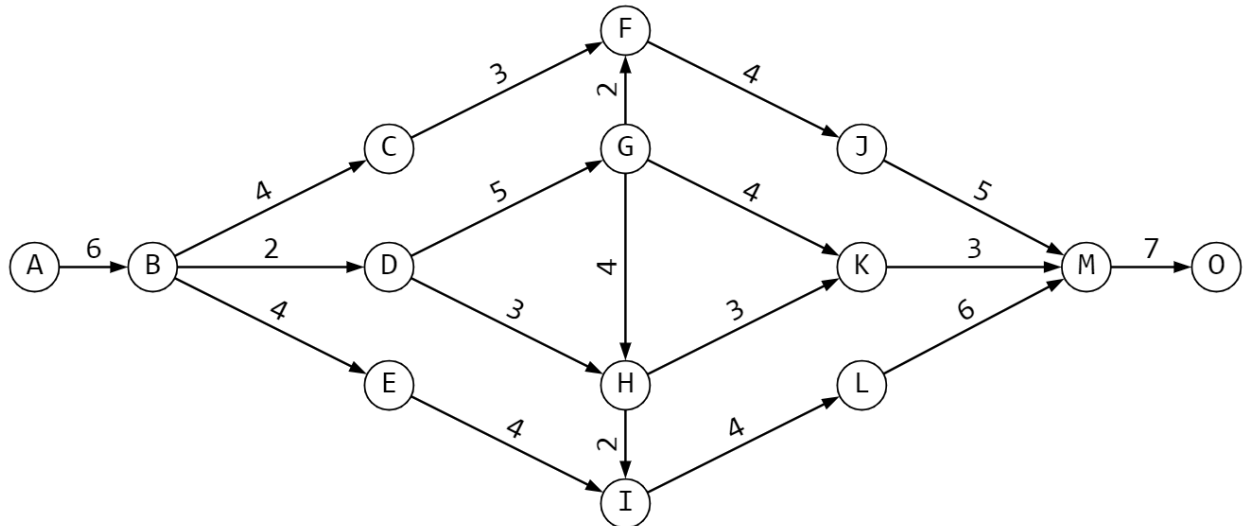


Задача №1. (10 баллов)

Робот должен проехать от старта (точка А) до финиша (точка О) по линиям, при этом он может двигаться только в направлениях, указанных стрелками на схеме (см. схему).



Схема

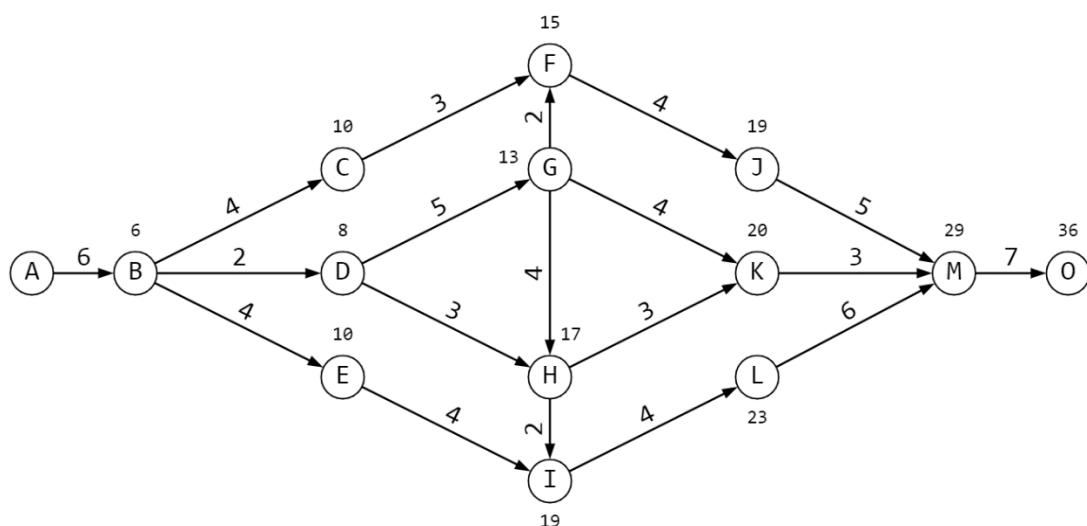
Цифрами на схеме обозначено количество секунд, которое робот потратит на проезд по данному отрезку. Менять направление движения можно только на перекрёстках, обозначенных кругами. За какое максимальное время робот может проехать от старта (точки А) до финиша (точки О)?

Ответ: 36 с.

Решение

На схеме представлен направленный граф. Нам надо найти максимальный путь из вершины А в вершину О. Следует учитывать, что может существовать более одного пути с максимальной длиной (в нашем случае – максимальным временем движения) и что нас устроит любой из них.

Будем перемещаться по графу слева направо, помечая каждую вершину числом, которое указывает максимальное время от точки старта А до текущей вершины. Пройдя таким образом по всем вершинам графа и пометив все вершины, мы получим в качестве метки для вершины О максимальное время, которое нужно, чтобы добраться из вершины А в вершину О.



Таким образом, можно узнать, что максимальное время, за которое робот доедет от старта (вершина А) до финиша (вершины О) за 36 секунд.

Ответ: 36 секунд.

№ п/п	Критерии	Баллы
1	Верно определено минимальное время проезда робота по трассе (36 с). В решении присутствует верный подсчет времени проезда	10
2	Дан верный ответ (36 с). Решение отсутствует.	2
3	В остальных случаях	0

Задача №2. (10 баллов)

Роботы «Альфа», «Бета» и «Гамма» участвуют в гонках по прямолинейной трассе. «Альфа» проехал трассу на 10 секунд быстрее, чем робот «Бета» и на 30 секунд быстрее чем «Гамма».

Перед второй попыткой длину трассы увеличили в 2 раза, скорость робота «Бета» увеличили на 2 см/с, а скорость робота «Гамма» увеличили на 4 см/с. После этого робот «Альфа» прошел увеличенную трассу на 10 секунд быстрее, чем робот «Бета» и на 20 секунд быстрее чем робот «Гамма».

Определите длину трассы и скорости каждого из роботов на первой попытке. В ответе длину трассы укажите в сантиметрах, скорости роботов – в сантиметрах в секунду.

Ответ: на первой попытке скорость робота «Альфа» равна 15 см/с, скорость робота «Бета» равна 10 см/с, скорость робота «Гамма» равна 6 см/с, а длина трассы на первой попытке равна 300 см.

Решение

Обозначим за x – скорость робота «Альфа», за y – скорость робота «Бета», за z – скорость робота «Гамма» и за s - длину трассы на первой попытке. Тогда мы можем составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{s}{x} + 10 = \frac{s}{y} \\ \frac{s}{x} + 30 = \frac{s}{z} \\ \frac{2s}{x} + 10 = \frac{2s}{y+2} \\ \frac{2s}{x} + 20 = \frac{2s}{z+4} \end{cases}$$

Решив данную систему, мы получим, что:

$$x = 15 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad y = 10 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad z = 6 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad s = 300 \text{ см.}$$

Ответ: на первой попытке скорость робота «Альфа» равна 15 см/с, скорость робота «Бета» равна 10 см/с, скорость робота «Гамма» равна 6 см/с, а длина трассы на первой попытке равна 300 см.

№ п/п	Критерии	Баллы
1.1	Верно определена скорость робота «Альфа» (15 см/с). Присутствует верное решение.	+3
1.2	Верно определена скорость робота «Бета» (10 см/с). Присутствует верное решение.	+3
1.3	Верно определена скорость робота «Гамма» (6 см/с). Присутствует верное решение.	+3
1.4	Верно определена длина трассы на первой попытке (300 см). Присутствует верное решение.	+1
2.1	Дан верный ответ скорость робота «Альфа» (15 см/с). Решение отсутствует.	+1
2.2	Дан верный ответ скорость робота «Бета» (10 см/с). Решение отсутствует.	+1
2.3	Дан верный ответ скорость робота «Гамма» (6 см/с). Решение отсутствует.	+1
2.4	Дан верный ответ длина трассы на первой попытке (300 см). Решение отсутствует.	+1

Задача №3. (10 баллов)

Робот оснащён двумя управляемыми колёсами, подключёнными к моторам А и В через одноступенчатую передачу. Лёвым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. На оси мотора А стоит шестерня с 24 зубьями, на оси мотора В – шестерня с 8 зубьями. На оси колеса А находится шестерня с 40 зубьями, на оси колеса В – шестерня с 40 зубами. Диаметры колёс робота одинаковы и равны 8 см. Ширина колеи робота равна 30 см. Робот должен совершить поворот вокруг колеса В (мотор В выключен и зафиксирован) на 120°. Определите, на сколько градусов должна повернуться ось мотора А. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Ответ приведите с точностью до целых. Для получения более точного ответа, округление стоит производить только при получении финального результата.

Ответ: ось мотора А повернется на 1500°.

Решение

Определим длину окружности колеса:

$$\pi \cdot 8 = 8\pi \text{ (см)}$$

Так как робот совершает поворот вокруг колеса В, то колесо, подсоединенное к мотору А, будет двигаться по окружности, радиус которой равен ширине колеи.

Определим длину дуги окружности, по которой должно проехать колесо А:

$$2 \cdot \pi \cdot 30 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = 20\pi$$

Так как на оси мотора А стоит шестерня с 24 зубьями, а на оси колеса А находится шестерня с 40 зубьями, то, чтобы колесо проделало путь требуемой длины, мотор должен повернуться на угол в $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$ раз больше, чем в том случае, если бы этих шестерёнок не было:

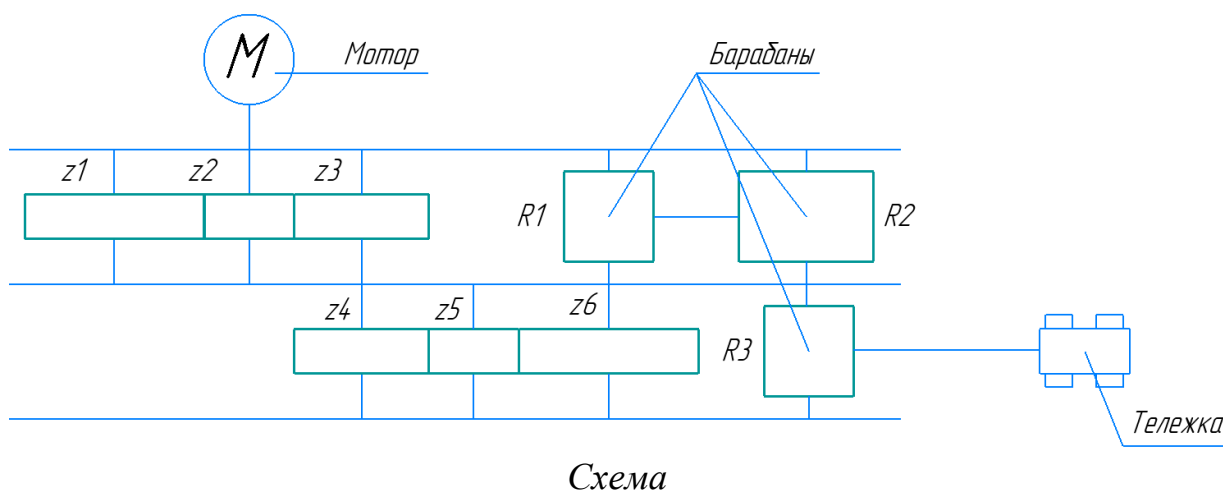
$$\frac{20\pi}{8\pi} \cdot 360^\circ \cdot \frac{40}{24} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 360^\circ = 1500^\circ$$

Ответ: ось мотора А повернется на 1500° .

№ п/п	Критерии	Баллы
1	Верно определён угол поворота оси мотора А (1500°). Приведено верное решение	10
2	Дан верный ответ 1500° . Решение отсутствует	2
3	В остальных случаях	0

Задача №4. (10 баллов)

Для того, чтобы автоматизировать движение тележки, собрали следующее устройство (см. схему). Тележка имеет четыре колеса, радиус каждого из которых равен 5 см.



К тележке прикрепили длинную, тонкую, невесомую, нерастяжимую нить. Другой конец нити привязали к барабану радиуса $R3 = 10$ см. Если барабан начнет равномерно вращаться, то нитка будет наматываться на барабан и тележка поедет равномерно и прямолинейно.

Барабан R3 через трехступенчатую передачу присоединили к электрическому мотору. Передача содержит двухступенчатую зубчатую передачу и одну ступень, собранную из барабанов разного радиуса. Нить, намотанная на барабан R2, может перематываться на барабан R1, при этом барабан R1 будет приводить во вращение барабан R2. Шестерня z6 и барабан R1 закреплены на одной оси, барабаны R2 и R3 закреплены на одной оси. Считайте, что нить на барабанах R1 и R2 очень тонкая, нерастяжимая и невесомая. Параметры передачи можно посмотреть в таблице №1.

Обозначение на схеме	Число зубьев (для зубчатых колёс)	Диаметр (для цилиндрических барабанов (в см))
z1	40	-
z2	20	-
z3	30	-
z4	30	-
z5	20	-
z6	40	-
R1	-	20
R2	-	30
R3	-	20

Таблица №1

Колёса тележки имеют плоскую боковую поверхность и покрашены в белый цвет. На переднем правом колесе тележки нарисовали яркую черную полосу, проходящую по диаметру колеса. На тележку поставили датчик цвета так, чтобы он мог считывать показания цвета с правого переднего колеса. В начальный момент времени колесо повернули так, что черная полоска находится прямо перед датчиком цвета, по середине одного из радиусов.

После включения мотор работал пол минуты, совершая по 5 оборотов в секунду. Определите, сколько раз датчик цвета зафиксировал черный цвет. При расчетах примите $\pi \approx 3,14$. Частота измерений датчика настроена так, что каждое появление черного цвета детектируются ровно 1 раз. Ответ дайте в виде натурального числа. Для получения более точного ответа, округление стоит производить только при получении финального результата.

Ответ: датчик зафиксировал чёрный цвет 200 раз.

Решение

Чтобы ответить на вопрос, поставленный в задаче, нам нужно определить, сколько оборотов сделает каждое из колёс тележки, после чего умножить его на 2.

Для определения числа оборотов колеса надо разделить пройденный тележкой путь на длину окружности колеса.

Длина окружности колеса тележки:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi \text{ (см)}$$

Определим путь, пройденный тележкой. Он будет равен длине нити, которая наматывается на барабан R3.

Для этого, нужно определить, сколько оборотов сделала барабан R3 и умножить число оборотов барабана на длину окружности барабана R3. Определим длину окружности барабана R3:

$$C_6 = \pi \cdot 20 = 20\pi \text{ (см)}$$

Определим число оборотов, которые сделает ось мотора:

$$5 \cdot 30 = 150 \text{ (об.)}$$

Определим число оборотов, которое сделает барабан:

$$150 \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{30}{40} \cdot \frac{\pi \cdot 20}{\pi \cdot 30} = 150 \cdot \frac{1}{3} = 50 \text{ (об.)}$$

Определим число оборотов, которое сделает каждое из колёс тележки:

$$50 \cdot \frac{20\pi}{10\pi} = 100 \text{ (об.)}$$

Определим число срабатываний датчика цвета:

$$2 \cdot 100 = 200 \text{ (раз)}$$

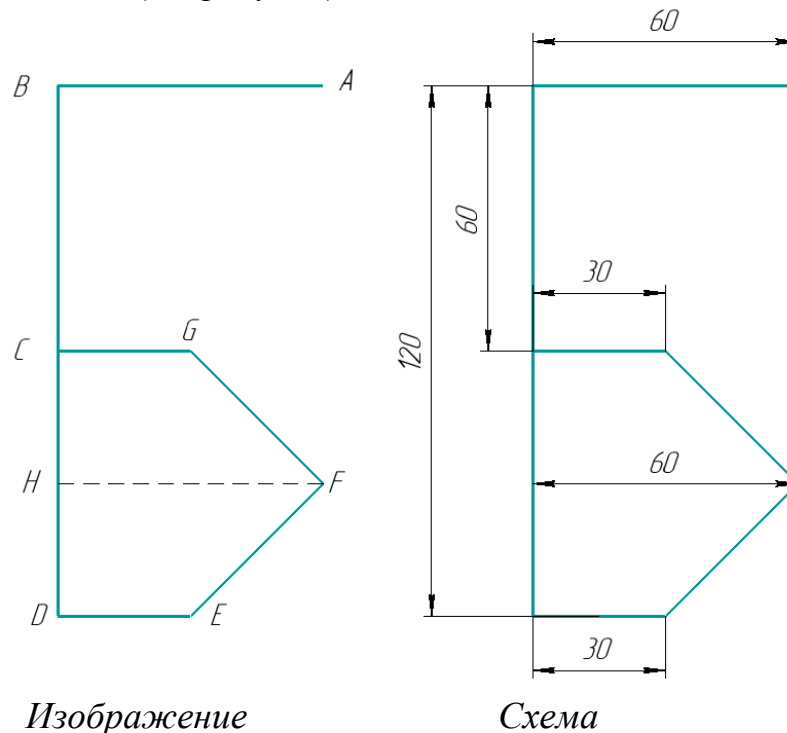
Ответ: датчик зафиксировал чёрный цвет 200 раз.

№ п/п	Критерии	Баллы
1	Дан верный ответ (200 раз). Приведено верное решение	10
2	Дан верный ответ (200 раз). Решение отсутствует	2
3	В остальных случаях	0

Задача №5. (10 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, диаметр каждого из колёс робота равен 5 см. Левым колесом управляет мотор A , правым колесом управляет мотор B . Колёса напрямую подсоединены к моторам. Ширина колеи робота равна 30 см.

Робот с помощью маркера, закреплённого по середине между колёс, наносит изображение буквы «Б» (см. рисунок).



Робот должен нарисовать букву «Б» - ломаную $ABCDEFGC$ – отмеченную на рисунке толстой линией. Изображения составлены из отрезков. На схеме размеры даны в сантиметрах. Известно, что $AB \parallel CG \parallel DE \parallel HF$, AB перпендикулярно BC , точка H – середина отрезка CD .

Определите, за какое минимальное время робот сможет начертить заданную букву полностью. Все повороты робот совершает на месте, вращая колёса в противоположных направлениях. Максимальная частота вращения моторов робота – 4 оборота в секунду. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Ответ дайте в секундах, округлив результат до целого. Чтобы получить более точный результат, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 7 с.

Решение

Для того, чтобы определить, какое минимальное время робот потратит для изображения буквы «Б», нам нужно понять, сколько времени робот потратит на повороты на месте и сколько времени робот потратит на проезд по прямолинейным участкам.

Определим, какая максимальная скорость робота при проезде по прямолинейным участкам:

$$v = \pi \cdot 5 \cdot 4 = 20\pi \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right)$$

Определим суммарную длину прямолинейных участков траектории:

$$s = AB + BD + DE + EF + FG + GC$$

Можно показать, что длина отрезков $GF = EF$ можно найти следующим образом:

$$GF = EF = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2} \text{ (см)}$$

Тогда суммарная длина прямых участков траектории равна:

$$60 + 120 + 30 \cdot 2 + 30\sqrt{2} \cdot 2 = 240 + 60\sqrt{2} \text{ (см)}$$

Тогда на то, чтобы проехать по прямолинейным участкам траектории робот потратит не менее:

$$t_1 = \frac{240 + 60\sqrt{2}}{20\pi} = \frac{12 + 3\sqrt{2}}{\pi} \text{ (с)}$$

Минимальный угол поворота робота равен:

$$(180^\circ - 90^\circ) + (180^\circ - 90^\circ) + (180^\circ - 135^\circ) + (180^\circ - 90^\circ) + (180^\circ - 135^\circ) = \\ = 90^\circ + 90^\circ + 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 360^\circ$$

Определим за какое время робот повернётся на данный угол:

$$t_2 = \frac{\pi \cdot 30 \cdot \frac{360^\circ}{360^\circ}}{20\pi} = 1,5 \text{ (с)}$$

Соответственно, минимальное время, которое потребуется роботу на проезд по данной траектории, будет равно:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{12 + 3\sqrt{2}}{\pi} + 1,5 \approx \frac{12 + 3\sqrt{2}}{3,14} + 1,5 = 6,67 \dots \approx 7 \text{ (с)}$$

Ответ: 7 с.

№ п/п	Критерии	Баллы
1	Дан верный ответ (≈ 7 с). Приведено верное решение	10
2	Задача верно решена в общем виде, но совершены вычислительные ошибки при подстановке. Приведено полное верное решение в общем виде. Вместо рекомендованного $\pi \approx 3,14$ использовано для вычислений другая точность.	8
Частичное решение		
3.1	Верно определена и посчитана длина кривой ($\approx 324,9$ см)	+2
3.2	Верно определен и посчитан минимальный угол поворота робота (360°)	+2
3.3	Верно определено время проезда по прямым участкам ($\approx 5,2$ с)	+2
3.4	Верно определено время, затраченное роботом на поворот (1,5 с).	+2
3.5	Верно определено общее время проезда робота по траектории (≈ 7 с)	+1
3.6	Записан верный ответ (≈ 7 см) или представлен только правильный ответ без решения (≈ 7 см)	+2
4	В остальных случаях	0