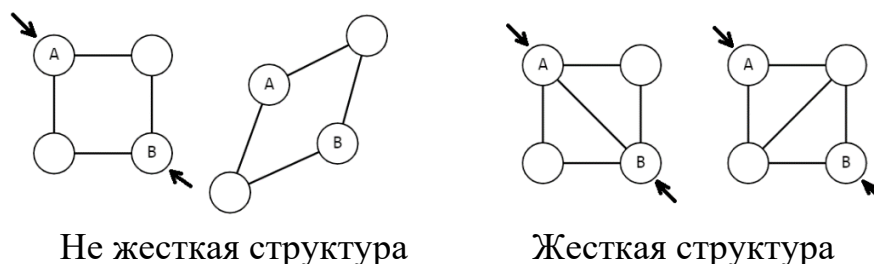


Задача №1.

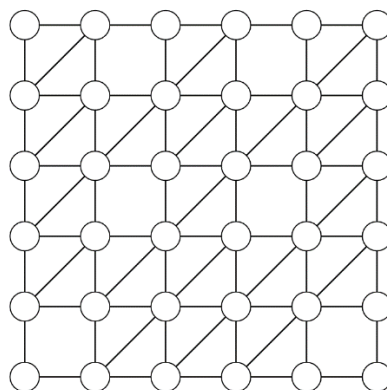
Рассмотрим структуры, построенные из стержней, скрепленных шарнирами. Все рассматриваемые нами структуры плоские и расположены на горизонтальной поверхности.

Стержни идеально жесткие и недеформируемые. Шарниры соединяют стержни вместе так, что и стержни могут образовывать любой угол. Стержень, соединяющий две несмежные вершины квадрата, называется скобой.



Если нажать на шарниры А и В, то квадрат деформируется. Значит, данная конструкция не жесткая. Чтобы сделать её жесткой, нужно добавить скобу.

Рассмотрим следующий каркас:



Данный каркас является жесткой структурой, но, данная структура не является минимальной.

А) (3 балла) Какое максимальное количество скоб можно убрать из каркаса, чтобы структура осталась жесткой?

Б) (7 баллов) Приведите пример каркаса, полученного из данного путём убирания скоб, который является жестким и содержит минимальное количество скоб, а также соответствующий ему двудольный граф.

Справочная информация

Будем называть структуру жёсткой, если при воздействии на неё сил расстояние между её отдельными узлами не меняется.

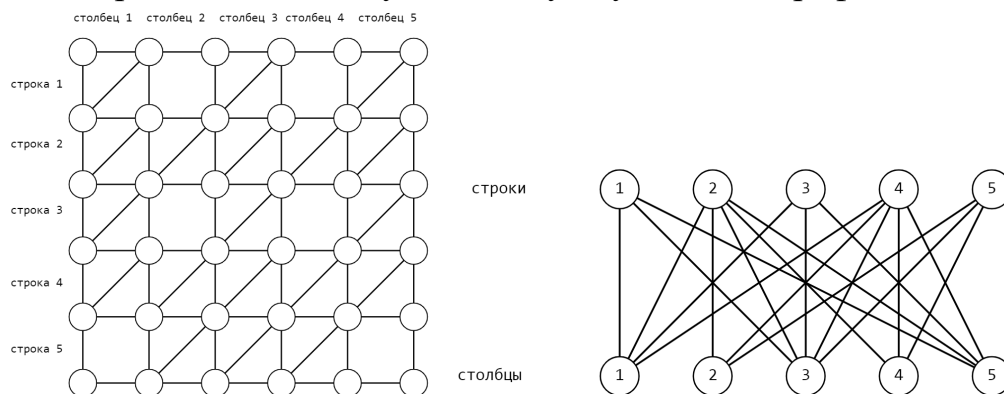
Для того, чтобы определить, является ли структура жёсткой, можно построить двудольный граф по следующим правилам:

- Вершины графа соответствуют строкам и столбцам каркаса;
- Ребра графа соединяют вершину-строку с вершиной-столбцом только тогда, когда между соответствующей строкой и столбцом в каркасе есть скоба.

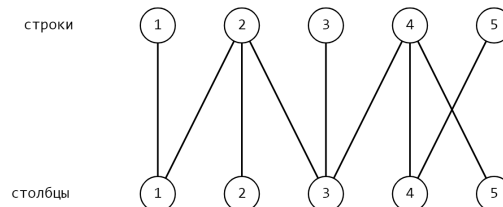
Прямоугольный каркас со скобами является жёстким тогда и только тогда, когда соответствующий двудольный граф связан. Если двудольный граф является остовным деревом, то связывание каркаса скобами является минимальным.

Решение

Построим для каркаса соответствующий ему двудольный граф:



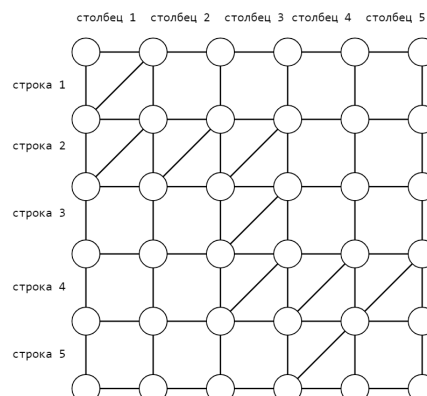
Для того, чтобы найти решение задачи, нам надо получить из данного графа остовное дерево. Для этого нам нужно удалить все циклы из соответствующего графа:



Для получения данного графа (остовного дерева) было убрано:

$$19 - 9 = 10 \text{ (скоб)}$$

По данному остовному дереву можно получить следующее расположение скоб:

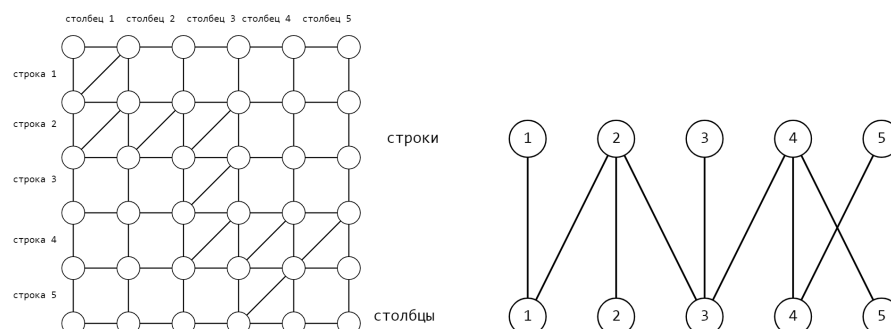


Приведённый вариант расположения скоб не является единственно возможным.

Ответ:

А) 10 скоб;

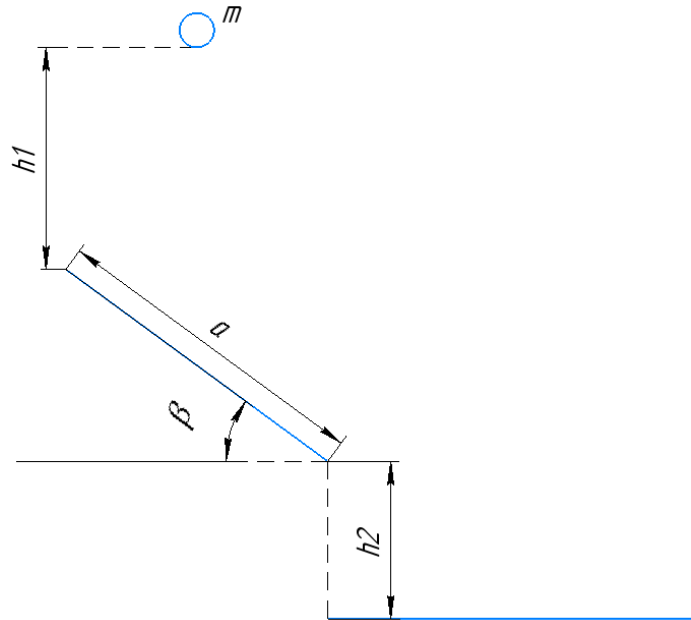
Б) Например, такой вариант:



№ п/п	Критерии	Баллы
Пункт А		
1	Верно определено количество скоб, которое надо удалить (10 штук). В решении присутствует верное обоснование того, почему нужно удалить именно 10 скоб.	3
2	Дан верный ответ (10 штук). Решение отсутствует	1
3	В остальных случаях	0
Пункт Б		
4	Приведён правильный двудольный связный граф (содержащий ровно 10 рёбер) и рисунок каркаса, содержащего 10 скоб. Скобы должны быть расположены так, что если в двудольном графе есть ребро, соединяющее вершину «номер строки» с вершиной «номер столбца», то и на пересечении соответствующей строки и столбца в каркасе должна быть скоба. Приведено подробное решение. Правильно построен граф исходного каркаса. Отсутствуют ошибки.	7
5	Приведён правильно построенный, но не минимальный двудольный связный граф (содержащий больше 10, но меньше 19 рёбер) и верный рисунок каркаса, содержащего столько же скоб. Скобы должны быть расположены так, что если в двудольном графе есть ребро, соединяющее вершину «номер строки» с вершиной «номер столбца», то и на пересечении соответствующей строки и столбца в каркасе должна быть скоба. Приведено подробное решение.	4
6	Дан верный ответ: приведён правильный двудольный связный граф (содержащий ровно 10 рёбер) и рисунок каркаса, содержащего 10 скоб. Скобы должны быть расположены так, что если в двудольном графе есть ребро, соединяющее вершину «номер строки» с вершиной «номер столбца», то и на пересечении соответствующей строки и столбца в каркасе должна быть скоба. Решение отсутствует.	2
7	В остальных случаях	0

Задача №2. (10 баллов)

Шарик массы m г находится в манипуляторе робота, на высоте $h_1=1$ м над верхним краем квадратной платформы. Сторона платформы равна $a=40$ см. Платформа закреплена под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонту. Нижний край платформы находится на высоте $h_2 = 150$ см над уровнем пола (см. рисунок).



Рисунок

Робот отпускает шарик и тот, без начальной скорости, свободно падает точно в центр платформы. После абсолютно упругого удара шарик отскакивает от платформы и падает на пол. Определите, сколько времени пройдет с момента начала свободного падения шарика (когда робот отпускает шарик) и до момента первого удара шарика об пол. Ответ дайте в **миллисекундах**, приведя его с точностью до целых. При расчетах примите $g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Сопротивлением воздуха и толщиной платформы можно пренебречь. Радиус шарика гораздо меньше длины стороны платформы.

Ответ: шарик упадет на пол через 855 мс.

Решение

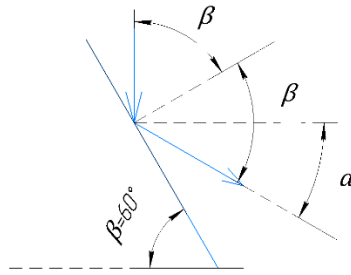
Шарик свободно падает на центр платформы, ударяется абсолютно упруго о её центр, и далее движется под углом к горизонту.

Определим высоту, с которой шарик упадет на платформу:

$$h_1 + \frac{1}{2} a \cdot \cos \beta$$

Шарик после абсолютно упругого соударения начнет двигаться под углом α к горизонту

$$\alpha = 90^\circ - 2\beta = 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = -30^\circ$$



Шарик падает на пол с высоты:

$$h_2 + \frac{1}{2} a \cdot \cos \beta =$$

Будем считать, что вертикальная ось ОУ направлена вертикально вниз и точка О расположена в точке, откуда шарик начал движение.

Определим скорость шарика в момент соприкосновения с платформой:

$$h_1 + \frac{1}{2} a \cdot \cos \beta = \frac{V^2 - 0}{2g}$$

$$V = \sqrt{(2 \cdot h_1 + a \cdot \cos \beta)g} = \sqrt{(2 \cdot h_1 + a \cdot 0,5)g} = \sqrt{(2 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,5)g} = \sqrt{2,2g}$$

На преодоление данного расстояния у шарика уйдет:

$$h_1 + \frac{1}{2} a \cdot \cos \beta = 0 + 0 + \frac{gt_0^2}{2}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_1 + a \cdot \cos \beta}{g}} = \sqrt{\frac{2h_1 + a \cdot 0,5}{g}} = \sqrt{\frac{2,2}{g}}$$

После абсолютно упругого удара модуль скорости шарика сохранится, а направление движения сменится на движение под углом α к горизонту.

Будем считать, что вертикальная ось ОУ направлена вниз, и точка О расположена в точке удара шарика о платформу.

Тогда в момент удара шарика о землю его координата по оси ОУ будет равна

$$h_2 + \frac{1}{2} a \cdot \cos \beta$$

Запишем уравнение движения шарика после соударения с платформой:

$$y = 0 - Vt \cdot \sin \alpha + \frac{gt^2}{2}$$

Тогда в момент удара шарика о землю уравнение примет вид:

$$h_2 + \frac{1}{2} a \cdot \cos \beta = -Vt \cdot \sin \alpha + \frac{gt^2}{2}$$

$$\frac{gt^2}{2} - Vt \cdot \sin \alpha - \left(h_2 + \frac{1}{2} a \cdot \cos \beta \right) = 0$$

$$D = V^2 (\sin \alpha)^2 + 4 \cdot \frac{g}{2} \left(h_2 + \frac{1}{2} a \cdot \cos \beta \right) = V^2 (\sin \alpha)^2 + g(2h_2 + a \cdot \cos \beta)$$

$$t_1 = \frac{V \cdot \sin \alpha - \sqrt{V^2 (\sin \alpha)^2 + g(2h_2 + a \cdot \cos \beta)}}{g} < 0 \text{ не подходит}$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= \frac{V \cdot \sin \alpha + \sqrt{V^2 (\sin \alpha)^2 + g(2h_2 + a \cdot \cos \beta)}}{g} = \\
 &= \frac{\sqrt{(2 \cdot h_1 + a \cdot \cos \beta) \cdot \sin \alpha} + \sqrt{(2 \cdot h_1 + a \cdot \cos \beta) (\sin \alpha)^2 + (2h_2 + a \cdot \cos \beta)}}{\sqrt{g}} = \\
 &= \frac{\sqrt{2,2} \cdot (-0,5) + \sqrt{2,2 \cdot 0,25 + 2 \cdot 1,5 + 0,4 \cdot 0,5}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{2,2}}{2\sqrt{g}}
 \end{aligned}$$

Соответственно, полное время, за которое шарик проделает путь от момента начала падения до первого касания пола равно:

$$\begin{aligned}
 t &= t_0 + t_2 = \\
 &= \sqrt{\frac{2h_1 + a \cdot \cos \beta}{g}} + \\
 &+ \frac{V \cdot \sin(90^\circ - 2\beta) + \sqrt{V^2 (\sin(90^\circ - 2\beta))^2 + g(2h_2 + a \cdot \cos \beta)}}{g}
 \end{aligned}$$

Посчитаем значение этого выражения:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\sqrt{2,2}}{\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{2,2}}{2\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{2,2}}{2\sqrt{g}} \approx \frac{\sqrt{15} + \sqrt{2,2}}{2 \cdot \sqrt{9,8}} = 0,85549 \dots \text{с} \\
 0,85549 \dots \text{с} &= 855,49 \text{ мс} \approx 855 \text{ мс}
 \end{aligned}$$

Ответ: шарик упадет на пол через 855 мс.

№ п/п	Критерии	Баллы
1	Верно определено время падения шарика (855 мс). Присутствует верное решение.	10
2	Решение содержит вычислительные ошибки, однако в общем виде решение проведено верное. Приведено полное верное решение в общем виде.	9
3	Верно определено время свободного падения шарика на платформу, но допущена ошибка при расчете времени падения шарика с платформы на пол. Приведено неполное решение или решение содержит ошибки.	5
4	Дан верный ответ. Решение отсутствует/	2
5	В остальных случаях	0

Задача №3. (10 баллов)

Робот оснащён двумя управляемыми колёсами, подключёнными к моторам А и В через одноступенчатую передачу. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. На осях моторов стоят шестерни с 8 зубьями, на осях колёс – шестерни с 40 зубами. Радиусы колёс робота одинаковы и равны 6 см. Ширина колеи робота 24 см. Ось мотора А повернулась на 3000° , ось мотора В повернулась на 4000° . Определите, на сколько градусов повернулся робот. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Ответ приведите с точностью до целых. Для получения более точного ответа, округление стоит производить только при получении финального результата.

Ответ: робот повернулся на 50° .

Решение

Так как колёса подсоединены к моторам не напрямую, а через передачу, то колёса повернуться на угол, который в $\frac{40}{8} = 5$ раз меньше, чем углы поворота моторов.

Обозначим угол, на который повернётся робот как α .

Так как угол, на который повернется колесо А меньше угла, на который повернется колесо В, то колесо А будет двигаться по дуге меньшего радиуса, чем радиус дуги, по которой будет двигаться колесо В. Если колесо А будет двигаться по дуге окружности радиуса R_a , то колесо В будет двигаться по дуге окружности радиуса R_b , при этом

$$R_b = R_a + L, \text{ где } L - \text{ ширина колеи}$$

Мы можем записать для колеса А:

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\varphi_A}{360^\circ} = 2 \cdot \pi \cdot R_a \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Где φ_A - это угол поворота колеса А.

Сократим и получим:

$$\begin{aligned} r \cdot \varphi_A &= R_a \cdot \alpha (1) \\ \alpha &= \frac{r \cdot \varphi_A}{R_a} \end{aligned}$$

Аналогично можно записать и для колеса В:

$$r \cdot \varphi_B = R_b \cdot \alpha (2)$$

Поделим (2) на (1) и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_B}{\varphi_A} &= \frac{R_b}{R_a} \\ \varphi_A \cdot R_b &= \varphi_B \cdot R_a \end{aligned}$$

Так как $R_b = R_a + L$, то

$$\varphi_A \cdot (R_a + L) = \varphi_B \cdot R_a$$

$$Ra = \frac{\varphi_A \cdot L}{(\varphi_B - \varphi_A)}$$

Подставим полученное выражение в уравнение (1) и получим:

$$\alpha = \frac{r}{L} \cdot (\varphi_B - \varphi_A)$$

Определим градусную меру угла, на который повернулся робот, учтя, что колёса повернулись на угол в 5 раз меньший, чем оси моторов:

$$\alpha = \frac{r}{L} \cdot \left(\varphi_B \cdot \frac{8}{40} - \varphi_A \cdot \frac{8}{40} \right) = \frac{r}{5L} \cdot (\varphi_B - \varphi_A) = \frac{6}{5 \cdot 24} \cdot (4000^\circ - 3000^\circ) = 50^\circ$$

Ответ: робот повернулся на 50° .

№ п/п	Критерии	Баллы
1	Верно определён угол поворота робота (50°). Приведено верное решение	10
2	Дан верный ответ 50° . Решение отсутствует	2
3	В остальных случаях	0

Задача №4. (10 баллов)

Для того, чтобы автоматизировать движение тележки, собрали следующее устройство (см. схему №1 и схему №2). Тележка имеет четыре колеса, диаметр каждого из которых равен 8 см.

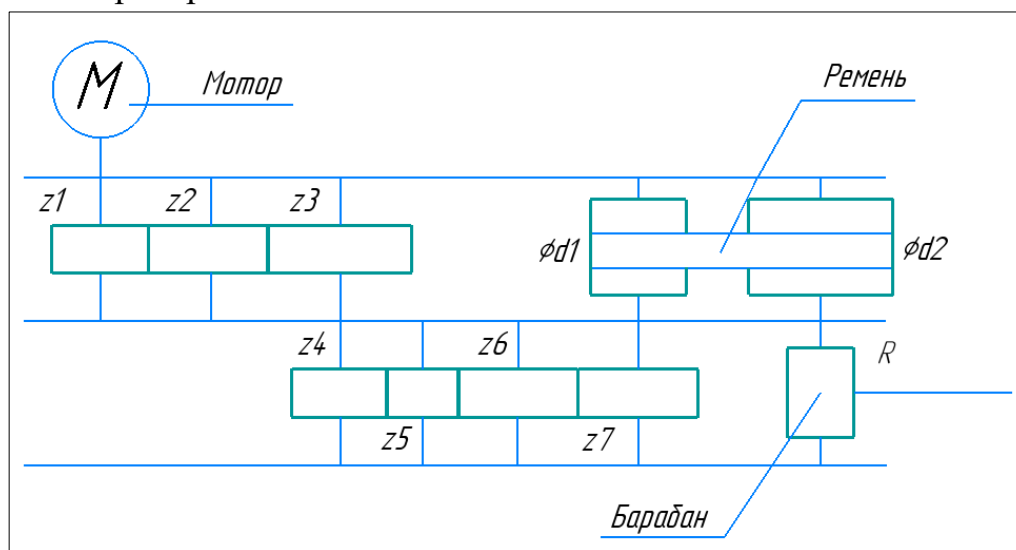


Схема №1

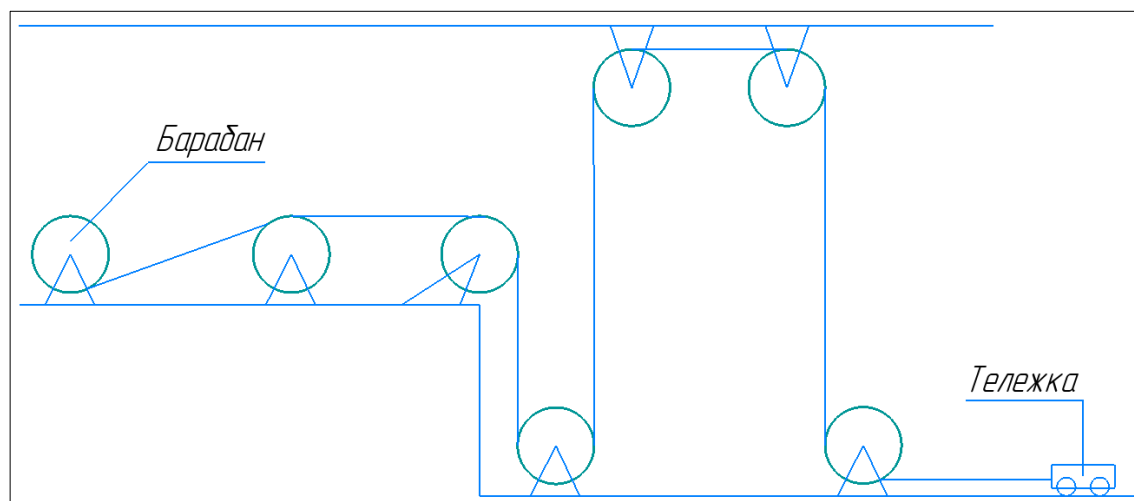


Схема №2

К тележке прикрепили длинную, тонкую, невесомую, нерастяжимую нить. Другой конец нити перекинули через систему блоков (см. схему №2) и привязали к барабану радиуса $R = 7,5$ см. Если потянуть за нить тележка поедет равномерно и прямолинейно. Массами блоков, трением в осях блоков можно пренебречь.

Барабан R через трехступенчатую передачу присоединили к электрическому мотору (см. схему №1). Передача содержит двухступенчатую зубчатую передачу и одну ступень ременной передачи.

Параметры передачи можно посмотреть в таблице №1.

Обозначение на схеме	Число зубьев (для зубчатых колёс)	Диаметр (для шкивов (см))
z1	20	-

z2	25	-
z3	30	-
z4	20	-
z5	15	-
z6	25	-
z7	25	-
d1	-	20
d2	-	30

Таблица №1

Колёса тележки имеют плоскую боковую поверхность и покрашены в белый цвет. На переднем правом колесе тележки через каждые 60° по радиусам нарисовали чёрные полосы. На тележку поставили датчик цвета так, чтобы он мог считывать показания цвета с правого переднего колеса. В начальный момент времени колесо повернули так, что одна черная полоска находится прямо перед датчиком цвета, по середине одного из радиусов.

После включения мотор работал 3 минуты, совершая по 12 оборотов за четверть минуты. Определите, сколько раз датчик цвета зафиксировал черный цвет. При расчетах примите $\pi \approx 3,14$. Частота измерений датчика настроена так, что каждое появление черного цвета детектируются ровно 1 раз. Ответ дайте в виде натурального числа. Для получения более точного ответа, округление стоит производить только при получении финального результата.

Ответ: датчик зафиксировал чёрный цвет 576 раз.

Решение

Определим, сколько чёрных линий нарисовали на колесе. Так как черные полосы по радиусам рисовали через каждые 60° , то получилось 6 полос.

Чтобы ответить на вопрос, поставленный в задаче, нам нужно определить, сколько оборотов сделает каждое из колёс тележки, после чего умножить его на 6.

Для определения числа оборотов колеса надо разделить пройденный тележкой путь на длину окружности колеса.

Длина окружности колеса тележки:

$$\pi \cdot 8 = 8\pi \text{ (см)}$$

Определим путь, пройденный тележкой. Так как в представленной схеме №2 все блоки неподвижные, то вся структура, изображенная на схеме 2 только меняет направление нити, но не дает выигрыша в силе, а, следовательно, и не приводит к проигрышу в расстоянии. Поэтому путь, пройденный тележкой, будет равен длине нити, которая наматывается на барабан R.

Для этого, нужно определить, сколько оборотов сделал барабан R и умножить число оборотов барабана на длину окружности барабана R. Определим длину окружности барабана R:

$$C_6 = 2 \cdot \pi \cdot 7,5 = 15\pi \text{ (см)}$$

Определим число оборотов, которые сделает ось мотора за 5 минут:

$$3 \cdot 60 \cdot \frac{12}{0,25 \cdot 60} = 3 \cdot 60 \cdot \frac{12}{15} = 144 \text{ (об.)}$$

Определим число оборотов, которое сделает барабан:

$$144 \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{20}{25} \cdot \frac{20}{30} = 144 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = 51,2 \text{ (об.)}$$

Определим число оборотов, которое сделает каждое из колёс тележки:

$$51,2 \cdot \frac{15\pi}{8\pi} = 96 \text{ (об.)}$$

Определим число срабатываний датчика цвета:

$$6 \cdot 96 = 576 \text{ (раз)}$$

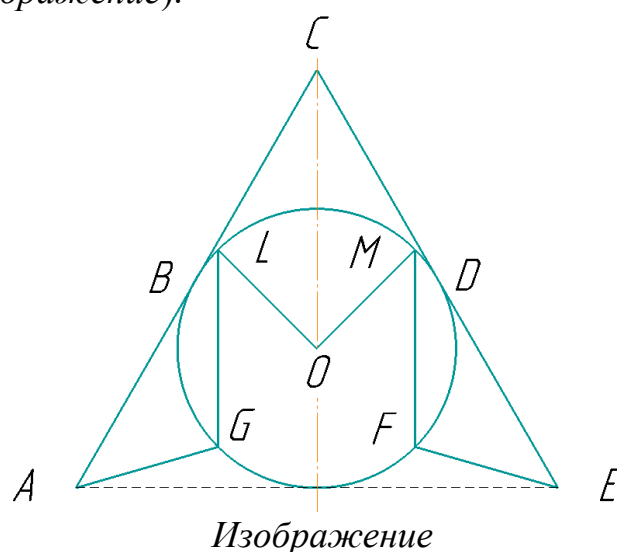
Ответ: датчик зафиксировал чёрный цвет 576 раз.

№ п/п	Критерии	Баллы
1	Дан верный ответ (576 раз). Приведено верное решение	10
2	Дан верный ответ (576 раз). Решение отсутствует	2
3	В остальных случаях	0

Задача №5. (10 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиус каждого из колёс робота равен 5 см. Левым колесом управляет мотор *A*, правым колесом управляет мотор *B*. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Ширина колеи робота равна 20 см.

Робот с помощью маркера, закреплённого по середине между колёс, наносит изображение (см. *изображение*).



Изображение представляет собой самопересекающуюся кривую, составленную из окружности с центром в точке *O* и радиусом $OL=OM=R=60$ см, а также отрезков. Данное изображение симметрично относительно вертикальной оси *CO*. Прямая *AC*

касается окружности в точке В, прямая СЕ касается окружности в точке D. Прямая АЕ является касательной к окружности. Угол $MOL = \alpha = 90^\circ$, угол $ACE = \beta = 60^\circ$, $LG \parallel MF$.

Определите, чему равна длина кривой. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Ответ дайте в сантиметрах, округлив результат до целого. Чтобы получить более точный результат, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 1210 см.

Решение

Кривая составлена из окружности и нескольких отрезков.

Определим длину окружности:

$$2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 120\pi \text{ (см)}$$

Если достроить радиусы $OG=OF$, то можно показать, что углы LOG , MOF , GOF равны по 90° .

Тогда длины отрезков $LG=MF$ будут равны:

$$LG = MF = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} = 60\sqrt{2} \text{ (см)}$$

Так как стороны треугольника ACE касаются окружности, то окружность вписана в треугольник ACE .

Проведём радиус OB , тогда OB перпендикулярно AC .

Из-за симметрии фигуры, CO – это биссектриса угла ACE , тогда угол ACO равен 30° . Тогда угол BOC равен

$$90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Можно показать, что треугольник ACE – равносторонний.

Тогда длину отрезка OC можно определить из треугольника OCB :

$$OC = R \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = R\sqrt{3} = 60\sqrt{3} \text{ (см)}$$

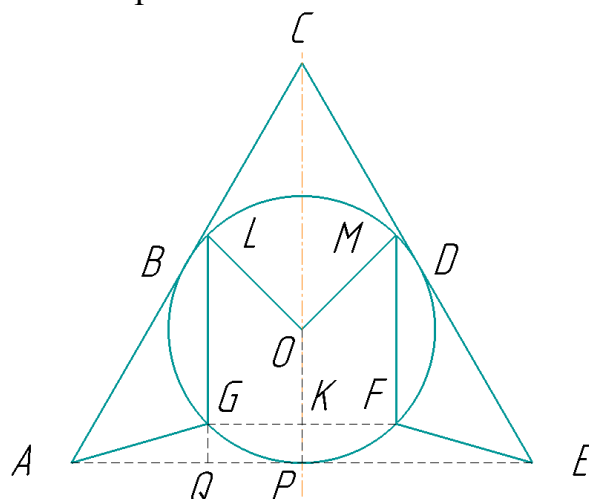
Тогда длина отрезка $AC=CE$ будет равна:

$$AC = 2 OC = 2\sqrt{3}R = 120\sqrt{3} \text{ (см)}$$

Нам осталось определить длины отрезков $AG=FE$.

Отрезок $GF = LG = R\sqrt{2}$.

Сделаем дополнительные построения:



Проведем радиус ОР, который будет перпендикулярен стороне АЕ, точка Р – середина АЕ. Опустим перпендикуляр GQ на АЕ. Из симметрии изображения можно показать, что GF||АЕ, AGFE – равнобедренная трапеция.

Тогда отрезок АР будет равен:

$$AQ = \frac{1}{2}(AE - GF) = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}R - R\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}R = 30(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ (см)}$$

Отрезки GQ=КР. Длина отрезка КР равна:

$$GQ = R - R \cdot \sin 45^\circ = R \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30(2 - \sqrt{2}) \text{ (см)}$$

Тогда длина отрезка AG=FE будет равна:

$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{AQ^2 + GQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + R^2 \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{R}{2} \sqrt{12 - 4\sqrt{6} + 2 + 4 - 4\sqrt{2} + 2} = \frac{R}{2} \sqrt{20 - 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \\ &= R\sqrt{5 - \sqrt{6} - \sqrt{2}} = 60\sqrt{5 - \sqrt{6} - \sqrt{2}} \text{ (см)} \end{aligned}$$

Посчитаем длину траектории:

$$\begin{aligned} &2\pi R + 2 \cdot R + 2 \cdot R\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{3}R + 2 \cdot R\sqrt{5 - \sqrt{6} - \sqrt{2}} = \\ &= 2R \left(\pi + 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5 - \sqrt{6} - \sqrt{2}} \right) = \\ &\approx 2 \cdot 60 \cdot \left(3,14 + 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5 - \sqrt{6} - \sqrt{2}} \right) = 1210,11 \dots \approx 1210 \text{ (см)} \end{aligned}$$

Ответ: 1210 см.

№ п/п	Критерии	Баллы
1	Дан верный ответ (1210 см). Приведено верное решение	10
2	Задача верно решена в общем виде, но совершены вычислительные ошибки при подстановке. Приведено полное верное решение в общем виде. Вместо рекомендованного $\pi \approx 3,14$ использовано для вычислений другая точность.	9
Частичное решение		
3.1	Верно определена и посчитана длина окружности (376,8 см)	+2
3.2	Верно определена и посчитана длина отрезков LG=MF ($\approx 84,9$ см)	+2
3.3	Верно определена и посчитана длина отрезков AC=CE ($\approx 207,8$ см)	+2
3.4	Верно определена и посчитана длина отрезков AG=FE ($\approx 64,0$ см)	+2
3.5	Верно определена и посчитана длина кривой (≈ 1210 см)	+2
3.6	Записан верный ответ (1210 см) или представлен только правильный ответ без решения (1210 см)	+2
4	В остальных случаях	0

