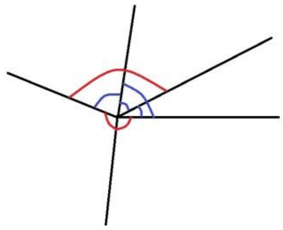
КОСМОНАВТИКА

2023

КЛАССЫ 5-7

1. Задайте 5 направлений (выходящие из одной точки) луча радара на плоскости так, чтобы среди всех возможных углов между направлениями было ровно 4 острых. Приведите хотя бы один пример (изобразите на плоскости точку, 5 исходящих из нее лучей и подпишите градусные меры углов).



Решение. Смотри рисунок. На нем острые углы показаны синим цветом, а тупые – красным.

Критерии проверки:

15 баллов – верное решение (в том числе, только верный рисунок).

5 баллов – разумная попытка решения.

0 баллов – все остальное.

2. Таблица 10×10 была заполнена числами следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Затем в таблице стерли часть чисел так, что в каждой строке и каждом столбце осталось ровно по 5 чисел. Найдите все значения, которые может принимать сумма оставшихся чисел.

Решение. Для удобства рассуждений будем воспринимать числа, кратные десяти, как числа, у которых в разряде единиц стоит «десять». То есть будем считать, что у числа 10 в разряде десятков «ноль», а в разряде единиц «десять». Аналогично у числа 20 в разряде десятков стоит «один», в разряде единиц – «десять»; у числа 30 в разряде десятков стоит «два», в разряде единиц – «десять» и так далее. Тогда числа в первой строке имеют в разряде десятков цифру «ноль». Числа во второй строке – цифру «один», и так далее. Значит, когда останется по пять чисел в каждой строке, мы получим в разряде десятков сумму цифр $0 + 1 + \cdots + 9$, умноженную на 5. Аналогичная ситуация со столбцами: числа в первом столбце имеют цифру «один» в разряде единиц, цифры во втором столбце – цифру «два», и так далее, цифры в последнем столбце имеют «цифру десять». Значит, мы получим в разделе единиц сумму $1 + 2 + \cdots + 10$, взятую 5 раз. Итого, получаем $(0 + 1 + \cdots + 9) \cdot 5 \cdot 10 + (1 + 2 + \cdots + 10) \cdot 5 = 2525$.

Ответ: 2525.

Критерии проверки:

15 баллов – верное решение, полностью обосновано.

12 баллов – верный ответ, но не обсуждается особенность последнего столбца.

10 баллов – правильная идея, но неверный ответ (например, из-за ошибки в диапазонах суммирования) или не доведено до ответа.

5 баллов – конкретный пример таблицы с правильным ответом или верные рассуждения об элементах таблицы.

2 балла – только некоторые разумные рассуждения.

0 баллов – все остальное.

3. Робот Asimo (назван в честь Айзека Азимова) имеет аккумуляторные батареи массой 6 кг и удельной энергоемкостью 120 Вт·ч/кг (1 Вт·ч = 3600 Дж). Их заряда хватает на один час демонстрационных проходок.

Александр Сергеевич Пушкин, пообедав пожарской котлетой, любил отправиться на прогулку быстрым шагом. Прогулка могла продлиться три часа. Во сколько раз увеличится время работы робота (простите за каламбур), если он сможет использовать энергию так же эффективно, как человек? Примите в расчет, что котлета весила 200 граммов, а ее калорийность составляла 260 килокалорий на 100 граммов (1 ккал = 4200 Дж). Ответ округлите до сотых.

Решение. Общая энергия, запасенная в батареях робота, равна $120 \cdot 3600 \cdot 6 = 2592000$ Дж – ее хватает на один час. Общая энергия, поглощенная Александром Сергеевичем, равна $260 \cdot 2 \cdot 4200 = 2184000$ Дж – ее хватает на три часа, то есть на час потребуется $2184000 : 3 = 728000$ Дж. Значит, робот использует в $2592000 : 728000 \approx 3{,}56$ раз больше энергии на один и тот же промежуток времени.

Ответ: В 3,56 раза.

Критерии проверки:

15 баллов – верное решение.

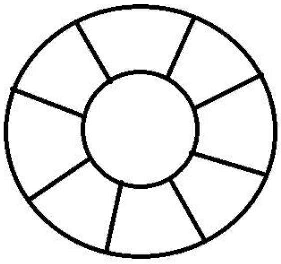
10 баллов – верная идея, но расчеты содержат арифметическую ошибку.

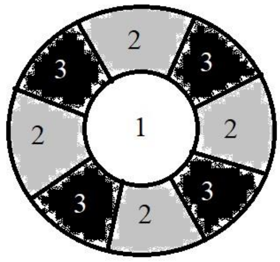
5 – есть разумные идеи и некоторый неверный подсчет, доведенный до ответа баллов.

2 балла – есть некоторые продвижения.

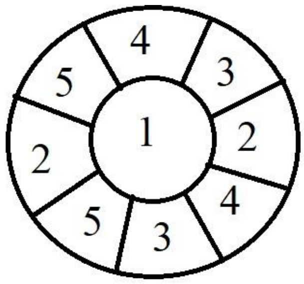
0 баллов – все остальное.

4. Земляне решили сделать общую для всех людей эмблему космонавтов. Проект эмблемы перед вами, остается его раскрасить. Каждую из девяти областей на рисунке надо раскрасить в некоторый цвет (цветов не обязательно девять, может быть и меньше), но так, чтобы каждая пара цветов имела хотя бы одну общую границу. Пример раскраски в три цвета, удовлетворяющей требованиям, приведен ниже. В какое максимальное число различных цветов можно раскрасить эмблему? Предложите свой вариант (приведите пример раскраски, удовлетворяющей условиям) и докажите, что в большое число цветов эмблему раскрасить нельзя.





Решение. Подходящая раскраска в пять цветов приведена на рисунке. Докажем, что в шесть цветов раскрасить не получится. Один цвет потребуется для раскраски центра – обозначим этот цвет цифрой 1. Пусть оставшиеся области раскрашены в другие пять цветов. Они все обязаны попарно соседствовать друг с другом. Число пар равно десяти, значит, число границ должно быть десять или больше. Но их всего восемь. Противоречие.



Ответ: в 5 цветов.

Критерии проверки:

15 баллов – верное решение с доказательством невозможности раскраски в 6 цветов.

12 баллов – пример раскраски в 5 цветов с неполным доказательством невозможности раскраски в 6 цветов.

10 баллов – только пример раскраски в 5 цветов без доказательства.

5 баллов – неверный вариант раскраски.

2 балла – есть продвижения.

0 баллов – все остальное.

5. Названия каких инструментов, приборов и механизмов можно встретить на карте звездного неба в названиях созвездий? Где можно наблюдать эти созвездия? Какие звезды в этих созвездиях вы знаете?

   Решение. Телескоп, Секстант – астрономические инструменты. Насос, Циркуль, Весы, Микроскоп, Компас, Часы – приборы и механизмы. Лира – музыкальный инструмент. Наугольник – инструмент архитектора. Октант – угломерный инструмент. Резец – инструмент гравёра, Печь (имеется в виду химическая печь) – инструмент химика.

   Телескоп – созвездие Южного полушария. Его, однако, можно наблюдать и в части Северного полушария: полностью – южнее 33 широты, а частично – начиная с 45 широты. Известных или ярких звезд в Телескопе нет.

   Секстант – небольшое экваториальное созвездие. Еще в начале 20 века Альфа Секстанта находилась к северу от небесного экватора, однако сейчас за счет смещения оси вращения Земли оказалась в южной части. Созвездие наблюдаемо везде за исключением полярных широт. Известных или ярких звезд нет.

   Насос – довольно большое созвездие Южного полушария. В России полностью наблюдается только на юге. Известных звезд нет, однако в созвездии наблюдаются две галактики – спиральная и сферическая.

   Резец – маленькое тусклое созвездие Южного полушария. В России полностью не наблюдаемо. Ярких или известных звезд нет.

   Циркуль – еще одно маленькое тусклое созвездие Южного полушария. Наблюдаемо только в нем, а также в экваториальных районах. Альфа Циркуля – достаточно яркая звезда третьей звездной величины. В системе Беты Циркуля найдена экзопланета – сверхмассивный коричневый карлик. Кроме того, в созвездии расположены галактика Циркуль и система двух звезд, одна из которых нейтронная.

   Весы – известное зодиакальное созвездие. Солнце проходит его с 31 октября по 22 ноября, соответственно, наиболее удачное время для наблюдений – апрель или май. Весы связывались с богинями Фемидой, Деметрой и Немезидой. Альфа и Бета Весов называют Северной и Южной клешнями Скорпиона.

   Микроскоп – небольшое южное созвездие. В России полностью наблюдаемо только южнее 44 градуса, частично наблюдаемо в средних широтах. Ярких или известных звезд нет.

   Компас – небольшое южное созвездие. Вместе с созвездиями Киль, Кома и Паруса входило в старое созвездие «Корабль Арго». Альфа Компаса – достаточно яркая звезда, в шесть раз больше Солнца (по радиусу), светимость превышает солнечную в десять тысяч раз. В 2011 году в созвездии найдена сверхмассивная черная дыра.

Часы – тусклое созвездие Южного полушария, в России полностью не наблюдается. Однако Альфа Часов (оранжевый гигант) можно увидеть на самом юге нашей страны летом низко над горизонтом (естественно, на юге). Одна из звезд Часов (красный карлик) находится всего в 12 световых годах от Солнца.

Лира – известное созвездие Северного полушария. На территории России видно круглый год. Альфа Лиры – самая яркая звезда нашего полушария – Вега. Именно эта звезда взята за ноль видимой звездной величины (сейчас, после уточнения данных наблюдения видимая звездная величина Веги определена как +0,03). Из всех наблюдаемых с Земли звезд только Арктур ярче Веги – его звездная величина равна -0,05. Бета Лиры – это не одна звезда, а несколько, оказавшихся на одном луче с точки зрения земного наблюдателя (на самом деле, эти звезды далеки друг от друга). Самая яркая из них – Бета Лиры А – оказалась двойной звездой (системой двух Солнц). Система вращается вокруг общего центра, причем звездное вещество постоянно перетекает с одной звезды на другую.

Наугольник – небольшое южное созвездие. В России частично наблюдаемо на юге. В созвездии находится тройная звезда Апоп и гравитационная аномалия Великий Аттрактор (скопление галактик, масса которого в сто тысяч раз превышает массу нашей галактики).

Октант – маленькое и очень тусклое южное созвездие. Знаменито тем, что в этом созвездии находится южный полюс мира. «Полярной звездой» здесь является Сигма Октанта – тусклая звезда, едва видимая невооруженным глазом.

Печь – еще одно тусклое южное созвездие, но частично наблюдаемо и в России. Альфа Печи – двойная звезда, причем этот факт был обнаружен довольно давно (1835 год, а первые наблюдения, подтвердившие существование двойных звезд – 1802 год), поскольку система находится сравнительно недалеко от нас (45 световых лет).

Критерии проверки (относительные):

6 и более верных созвездий = 18 баллов

5 верных созвездий = 15 баллов

4 верных созвездия = 12 баллов

3 верных созвездия = 10 баллов

2 верных созвездия = 8 баллов

1 верное созвездие = 4 балла

Информация о каждом созвездии = +1 балл.

Максимальное число баллов = 20.

6. Космический аппарат представляет собой сферическую металлическую оболочку заполненную водой. Внутри космического аппарата в свободном состоянии находится стальная гайка и пузырёк воздуха (смотри рисунок). Качественно опишите движение частицы и пузырька внутри космического аппарата под действием гравитационной силы. Космический аппарат находится вдали от других космических тел, и на него не действуют внешние силы.

Решение. Примем (пока без доказательства) тот факт, что гравитационный потенциал сферы и однородного шарового слоя равен нулю внутри этой сферы (соответственно, слоя). Тогда гайку притягивает только шар жидкости, выделенный на рисунке красным цветом. Этот же шар создает на глубине силу Архимеда. Таким образом, на гайку действуют две силы – тяжести (к центру) и Архимеда (от центра). Плотность гайки выше плотности воды, значит перетянет сила тяжести – гайка сдвинется в центр аппарата и там останется. В этом рассуждении мы считали, что начальная скорость гайки равна нулю. Если же она ненулевая, а точнее, имеет ненулевую проекцию на касательную плоскость к красному шару, то движение будет более сложным. Однако итог все-равно будет тем же – за счет силы трения о воду касательная составляющая скорости постепенно обнулится.

Аналогично можем рассуждать с пузырьком воздуха (силой притяжения гайки и пузырька пренебрегаем), но здесь перетянет сила Архимеда (воздух легче воды), то есть, пузырек всплывет по направлению от центра и останется под поверхностью оболочки. Касательная составляющая начальной скорости (при наличии) тоже здесь будет стремиться к нулю за счет силы трения (силы Стокса). Заметим еще, что поскольку пузырек будет сдвигаться в область все меньшего давления, то размер пузырька будет увеличиваться. Таким образом, при достижении оболочки шара пузырек расплывется в тонкий слой воздуха под оболочкой. Заполнит ли этот слой всю поверхность шара, как нарисовано на рисунке в ответе, однозначно сказать нельзя – это зависит от размера пузырька, размера шара и характера взаимодействия оболочки с водой.

Теперь докажем, что гравитационный потенциал однородной сферы внутри нее равен нулю. Возьмем произвольную точку и рассмотрим двусторонний конус с вершиной в этой точке и малым углом при вершине. Основаниями конуса возьмем точки его пересечения со сферой. При малых углах можно считать это пересечение плоским. Радиусы оснований относятся как высоты конусов, а тогда площади оснований относятся как квадраты этих высот. В силу однородности сферы, также будут относиться и массы оснований. Силы притяжения, которую индуцируют основания конуса, определяются законом Ньютона, где в числителе стоит масса, а в знаменателе квадрат расстояния (это расстояние можно считать одинаковым для всех точек основания и равным высоте). Но мы только что показали, что отношение массы и квадрата расстояния одинаково для каждого конуса. Значит, силы притяжения равны по величине. Очевидно, они направлены в разные стороны, а значит компенсируют друг друга. Поскольку это верно для любой пары конусов и любой точки внутри сферы, получаем результат – гравитационный потенциал однородной сферы внутри нее равен нулю.

Ответ: гайка сдвинется в центр, а пузырек – от центра.

Критерии проверки:

20 баллов – решение верное, полностью обосновано. Если это не так, баллы начисляются по следующим позициям:

Гайка пришла в центр = +4 балла, пузырек ушел к краям = +4 балла,
есть рассуждения о центральной силе тяжести = +4 балла,
есть рассуждения о силе Архимеда или о давлении в жидкости = +4 балла,
есть понимание о расширении пузырька = +2 балла,
есть рассуждение о трении воды = +2 балла.
Неверные, но разумные рассуждения = 3 балла (не суммируются).
0 баллов – все остальное.

Итоговая оценка равна сумме баллов за все задачи.

КОСМОНАВТИКА

2023

КЛАССЫ 8-9

1. Найдите все натуральные числа, которые имеют как минимум три различных натуральных делителя, и при этом равные сумме своих трех наименьших натуральных делителей.

   Решение. Обозначим искомое число через n, его наименьшим делителем будет, очевидно единица, а два других наименьших делителя обозначим через a и b, считая, что $1 < a < b$. По условию, $n = 1 + a + b$, а поскольку n делится на b, то получаем, что сумма $1 + a$ делится на b. Тогда $b = 1 + a$. Тогда $n = 2 + 2a$, причем эта сумма делится, по условию, на a. Значит, 2 делится на a, а поскольку $a \neq 1$, то получаем $a = 2$. Тогда $n = 6, a = 2, b = 3$.

   Ответ: 6.

   Критерии проверки: 15 баллов – ответ верный, полностью обоснован.

   5 баллов – ответ верный, обоснование неверное или отсутствует.

   2 балла – помимо верного ответа приведены еще некоторые (неверные).

   0 баллов – все остальное.

2. Гиря массой $m = 1$ кг подвешена на веревке и находится в состоянии покоя. За свободный конец веревки гирю начинают поднимать вертикально вверх. Какую работу A нужно совершить, чтобы поднять гирю на высоту $h = 2$ м за время $t = 3$ с? Считайте, что сила натяжения веревки во время подъема груза постоянна. Веревку считайте невесомой и нерастяжимой. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

   Решение. Искомая работа равна изменению полной механической энергии гири за время подъема: $A = mgh + \frac{mv^2}{2}$. Используя кинематические уравнения: $v = at,\ h = \frac{at^2}{2}$, находим скорость гири в конце подъема: $v = \frac{2h}{t}$. Ответ: $A = mgh + \frac{2mh^2}{t^2} \approx 20{,}9$ Дж.

   Критерии проверки: 15 баллов – ответ верный, полностью обоснован.

   11 баллов – найдена (и записана в качестве ответа) только кинетическая энергия.

   7 баллов – найдена (и записана в качестве ответа) только кинетическая энергия.

   3 балла – найдена только потенциальная энергия, причем решение содержит грубые ошибки.

   0 баллов – все остальное.

3. Назовем момент времени на часах удивительным, если запись в формате ЧЧ:ММ:СС образует палиндром (прочтение строки слева направо совпадает с прочтением справа налево). Например, 04:22:40 – удивительный момент времени.

На планете Шелезяка сутки длятся N часов, $0 < N < 100$, в каждом часе 60 минут, в каждой минуте 60 секунд, отсчет часов, минут и секунд начинается с '00'. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая находит количество удивительных моментов в сутках.

Входные данные

Вводится одно натуральное число N.

Выходные данные

Одно число – количество удивительных моментов в сутках.

Пример

Ввод:

1

Вывод:

6

Комментарий: удивительные моменты здесь 00:00:00, 00:11:00, 00:22:00, 00:33:00, 00:44:00 и 00:55:00.

Критерии проверки: 15 баллов – алгоритм реализован верно.

14 баллов – программа содержит опечатки.

10 баллов – алгоритм или программа содержат принципиальные ошибки.

5 баллов – есть решение только для частного случая.

4. Решите систему $\begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \frac{2y^2}{1+y^2} = z, \\ \frac{2z^2}{1+z^2} = x. \end{cases}$

Решение. Если одна из переменных равна нулю, то обнулятся и две остальные – получаем решение $x = y = z = 0$. Пусть теперь все переменные нулю не равны. Тогда можем перевернуть дроби – получим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}, \\ \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{z}, \\ \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения системы – получим равенство

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}=0\,.$$

Домножим на 2 и получим сумму трех полных квадратов

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=0\,.$$

Отсюда видим еще одно решение $x=y=z=1$, а также, что других решений нет.

Ответ: $x=y=z=0$ и $x=y=z=1$.

Критерии проверки: 15 баллов – решение верное, полностью обосновано.
10 баллов – ответ верный, обоснование содержит существенные пробелы
5 баллов – приведен один или оба верных ответа, обоснование отсутствует или неверное (например, из симметричности системы сразу делается вывод о том, что все неизвестные равны друг другу).
0 баллов – все остальное.

5. Параллакс Веги равен 0,12 секунд, а звездная величина – 0m. На каком расстоянии от Солнца на прямой Солнце – Вега должен находиться наблюдатель, чтобы эти две звезды были одинаково яркими? Видимая звездная величина Солнца равна –26.8m.

Решение: Расстояние до Веги равно $D=\frac{1}{0{,}12''}=8{,}3$ парсека или $1{,}7\cdot10^6$ а. е. Это расстояние в $1{,}7\cdot10^6$ а. е. раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца. Солнце, находясь на таком расстоянии, выглядело бы слабее, чем с Земли в

$$\left(\frac{D}{1}\right)^2=2{,}9\cdot10^{12}$$

раз и имело бы звездную величину $-26{,}74^m+2{,}5\cdot\lg(2{,}954\cdot10^{12})=4{,}436^m$. Вега имеет видимую звездную величину 0^m. Пользуемся соотношением между звездной величиной и светимостью

$$m_1-m_2=-2{,}5\cdot\lg\frac{L_1}{L_2}$$

и получаем, что Вега светит приблизительно в $10^{4{,}436/2{,}5}\approx59{,}5$ раз ярче Солнца. Учитывая, что яркость звезды падает обратно пропорционально квадрату расстояния, получаем, для определения точки наблюдения систему (мы обозначили через x расстояние от точки наблюдения до Солнца, а через $y -$ расстояние до Веги):

$$\begin{cases} x + y = 8{,}3\,, \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{1}{59{,}5}\,. \end{cases}$$

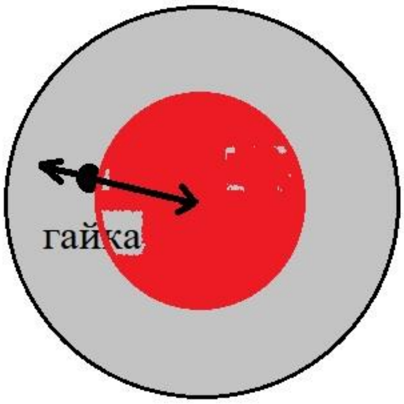
Получаем два варианта $x = \frac{8{,}3}{1 \pm \sqrt{59{,}5}}$, то есть точка наблюдения находится на расстоянии 0,95 пк от Солнца по направлению к Веге или 1,24 пк по направлению от Веги. В последнем случае, правда, наблюдению за Вегой будет мешать Солнце, закрывающее ее диск.

Ответ: на расстоянии 0,95 пк по направлению к Веге или 1,24 пк по направлению от Веги.

Критерии проверки: 20 баллов – ответ верный, полностью обоснован.
10 баллов – логика решения верная, есть ошибка в применении формул, приведшая к неверному ответу.
5 баллов – верно выписаны формулы для расстояния от Солнца до Веги, соотношения светимостей и звездных величин. Ответ неверный вследствие неверной логики дальнейших рассуждений или отсутствует.
0 баллов – все остальное.

6. Космический аппарат представляет собой сферическую металлическую оболочку заполненную водой. Внутри космического аппарата в свободном состоянии находится стальная гайка и пузырёк воздуха (смотри рисунок). Качественно опишите движение частицы и пузырька внутри космического аппарата под действием гравитационной силы. Поясните свои выводы с использованием законов физики. Космический аппарат находится вдали от других космических тел, и на него не действуют внешние силы.

Решение. Примем (пока без доказательства) тот факт, что гравитационный потенциал сферы и однородного шарового слоя равен нулю внутри этой сферы (соответственно, слоя). Тогда гайку притягивает только шар жидкости, выделенный на рисунке красным цветом. Этот же шар создает на глубине силу Архимеда. Таким образом, на гайку действуют две силы – тяжести (к центру) и Архимеда (от центра). Плотность гайки выше плотности воды, значит перетянет сила тяжести – гайка сдвинется в центр аппарата и там останется. В этом рассуждении мы считали, что начальная скорость гайки равна нулю. Если же она ненулевая, а точнее, имеет ненулевую проекцию на касательную плоскость к красному шару, то движение будет более сложным. Однако итог все равно будет тем же – за счет силы трения о воду касательная составляющая скорости постепенно обнулится.



Аналогично можем рассуждать с пузырьком воздуха (силой притяжения гайки и пузырька пренебрегаем), но здесь перетянет сила Архимеда (воздух легче воды), то есть, пузырек всплывет по направлению от центра и останется под поверхностью оболочки. Касательная составляющая начальной скорости (при наличии) тоже здесь будет стремиться к нулю за счет силы трения (силы Стокса). Заметим еще, что поскольку пузырек будет сдвигаться в область все меньшего давления, то размер пузырька будет увеличиваться. Таким образом, при достижении оболочки шара пузырек расплывется в тонкий слой воздуха под оболочкой. Заполнит ли этот слой всю поверхность шара, как нарисовано на рисунке в ответе, однозначно сказать нельзя – это зависит от размера пузырька, размера шара и характера взаимодействия оболочки водой.

Теперь докажем, что гравитационный потенциал однородной сферы внутри нее равен нулю. Возьмем произвольную точку и рассмотрим двусторонний конус с вершиной в этой точке и малым углом при вершине. Основаниями конуса возьмем точки его пересечения со сферой. При малых углах можно считать это пересечение плоским. Радиусы оснований относятся как высоты конусов, а тогда площади оснований относятся как квадраты этих высот. В силу однородности сферы, также будут относиться и массы оснований. Силы притяжения, которую индуцируют основания конуса, определяются законом Ньютона, где в числителе стоит масса, а в знаменателе квадрат расстояния (это расстояние можно считать одинаковым для всех точек основания и равным высоте). Но мы только что показали, что отношение массы и квадрата расстояния одинаково для каждого конуса. Значит, силы притяжения равны по величине. Очевидно, они направлены в разные стороны, а значит компенсируют друг друга. Поскольку это верно для любой пары конусов и любой точки внутри сферы, получаем результат – гравитационный потенциал однородной сферы внутри нее равен нулю.

Ответ: гайка сдвинется в центр, а пузырек – от центра.

Критерии проверки:

20 баллов – решение верное, полностью обосновано. Если это не так, то баллы начисляются по следующим позициям (см. таблицу ниже)

Есть понимание о правильной гравитации =+ 3 балла
Есть понимание о силе Архимеда или о давлении в жидкости =+ 3 балла
Явно ни то, ни то не выражено, но рассуждения в стиле "тяжелее/легче" =+ 3 балла
Есть понимание о силе трения =+ 3 балла
Гайка вышла на орбиту =+ 2 балла
Гайка пришла в центр =+ 5 баллов
Пузырь вышел на орбиту =+ 2 балла
Пузырь ушел к оболочке =+ 5 баллов
Пузырь ушел к оболочке и растекся =+ 1 балл
Иные разумные, но неверные рассуждения =+ 3 балла (последний пункт не суммируется с другими, т.е. за неверные рассуждения даются баллы, только если верных нет).

Итоговая оценка равна сумме баллов за все задачи плюс 5 баллов.

КОСМОНАВТИКА

2023

КЛАССЫ 10-11

Вариант 3

1. Найдите сумму всех корней уравнения $x + \sqrt[3]{1 - x^3} = \frac{2023}{2022}$

Решение. Обозначим $\frac{2023}{2022} = b$, перенесем x в правую часть и возведем в куб:

$$1 - x^3 = b^3 - 3b^2x + 3bx^2 - x^3 \iff 3bx^2 - 3b^2x + b^3 - 1 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{3b^2 \pm \sqrt{D}}{6b},$$

где $D = 12b - 3b^4 > 0$, так как $b < \sqrt[3]{4}$. Получили два корня, складывая которые, находим ответ: $x_1 + x_2 = b$.

Ответ: $\frac{2023}{2022}$

Критерии проверки:

15 баллов – ответ верный, решение полностью обосновано.

14 баллов – ответ верный, но не доказано, что корни существуют.

10 баллов – ответ неверный вследствие ошибки в формуле корней или в теореме Виета.

0 баллов – все остальное.

2. У жителей двумерной вселенной возникло предположение, что их вселенная представляет собой не плоскость, как им долго казалось, а сферу, вложенную в трехмерное пространство. Они пока не могут ни проникнуть в трехмерный мир, ни облететь свою вселенную кругом, но заметили, что только на сравнительно малых масштабах длина окружности соответствует известной формуле $L = 2\pi r$, где $\pi = 3{,}1415926535$ ... У очень больших окружностей реальная длина меньше расчетной. Например, если радиус окружности r равен одному миллиарду метров (по удивительному совпадению у них тоже есть такая мера длины), то длина окружности составляет $0{,}9999$ расчетной. Если предположение о том, что упомянутая вселенная является сферой, верно, какой должна бы длина пути между двумя ее максимально удаленными точками (путь проходит по поверхности сферы)?

Решение. Пусть на сфере диаметра $D = 2R$ дана окружность радиуса ρ. Эта окружность видна из центра сферы под линейным углом $\alpha = 2\arcsin\frac{\rho}{R}$. Этот угол стягивает на сфере дугу длины $R\alpha$, которую жители двумерный вселенной воспринимают как диаметр своей окружности. Итак, получаем соотношения $r = R \cdot \arcsin\frac{\rho}{R}$, $L = 2\pi\rho$, то есть отношение $\frac{L}{2r}$, которое жители сферы называют числом π, действительно не постоянно и равно $\pi\frac{\rho}{R\cdot\arcsin\rho/R}$. Выразим $\rho = R\cdot\sin\frac{r}{R}$ и получим, что $\frac{L}{2r} = \pi\frac{R}{r}\sin\frac{r}{R}$. Действительно, при малых $r \ll R$ синус почти равен своему аргументы и отношение примерно равно числу π, но для больших r разница становится все более заметной. По условию, при $r = 10^9$ поправочный коэффициент равен $\frac{R}{r}\sin\frac{r}{R} = 0{,}9999$. Обозначим $x = \frac{r}{R}$ и найдем корень уравнения $\frac{\sin x}{x} = 0{,}9999$ подбором:

x	0,1	0,01	0,05	0,025	0,024	0,0245
$\sin x/x$	0,998334	0,999983	0,999583	0,999896	0,999904	0,999900

Отсюда $R = \frac{r}{x} = \frac{10^9}{0{,}00245} = 4{,}08\cdot 10^{10}$, а искомое расстояние – длина большой полуокружности – равно πR.

Ответ: $1{,}3\cdot 10^{11}$м.

Критерии проверки:

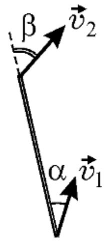
15 баллов – решение верное (даже если единственность корня уравнения $\sin x/x = 0.9999$ не доказано строго).

10 баллов – необоснованно предъявлено некоторое приблизительное значение корня уравнения.

4 балла – получены некоторые верные соотношения между углом, радиусом сферы, радиусом окружности и длиной дуги, далее верных продвижений нет.

0 баллов – все остальное.

3. Однородный стержень скользит по инерции по гладкому горизонтальному столу (см. рисунок). В некоторый момент времени в неподвижной системе отсчета скорости концов стержня составляют с направлением стержня углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Какой угол γ образует со стержнем в этот момент скорость его центра?



Решение. Скорость движения любой точки стержня есть сумма двух скоростей – скорости движения центра масс стержня и скорости вращения стержня относительно этого центра масс. Стержень однороден, то есть, его центр масс совпадает с серединой стержня. Обозначим длину стержня $2l$, вектор скорости центра v, а угловую скорость вращения ω. Тогда скорость вращения точки стержня, находящейся на расстоянии x от центра, равна по модулю $x\omega$ и направлена перпендикулярно стержню. Введем систему координат, направив ось Oy вдоль стержня (направление вверх на рисунке), а ось Ox перпендикулярно стержню (направление вправо на рисунке).

Проектируя векторы v_1 и v_2 на оси координат, получим систему равенств (через v_x и v_y обозначены проекции вектора v)

$$\begin{cases} v_1 \sin\alpha = v_x - l\omega \\ v_1 \cos\alpha = v_y \\ v_2 \sin\beta = v_x + l\omega \\ v_2 \cos\beta = v_y \end{cases} \Rightarrow \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta}{2v_y} = \frac{v_1 \sin\alpha}{2v_1 \cos\alpha} + \frac{v_2 \sin\beta}{2v_2 \cos\beta}$$

Пусть γ – искомый угол, тогда $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}789.$

Ответ: $\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2}\right) \approx 38^{\circ}$

Критерии проверки:

15 баллов – решение верное, полностью обосновано.

7 баллов – удалось верно выразить угол через модули v_1 и v_2, но не удалось найти связь между v_1 и v_2.

5 баллов – критерий тот же, что для семи баллов, но скорость v взята как сумма векторов v_1 и v_2, а не как среднее арифметическое.

2 балла – построен чертеж для мгновенного центра вращения (по сути задача сведена к геометрической), дальше продвижений нет.

0 баллов – все остальное.

4. Карта поверхности Шелезяки разбита на квадраты. Вся карта имеет размер $M \times N$. Каждый квадрат может быть либо пригоден для строительства, либо не пригоден (ржавчина, болота, нехватка машинного масла) – на карте такие квадраты маркируются либо 1, либо 0. Необходимо построить базу космического флота, которая имеет форму прямоугольника. Найдите наибольшую площадь базы, которую можно построить на Шелезяке. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая принимает на вход два натуральных числа M и N и таблицу $M \times N$ из 0 и 1 – карту Шелезяки. Вывод вашей программы – площадь максимальной прямоугольной подтаблицы из одних единиц в этой таблице.

Входные данные

В первой строке вводятся два натуральных числа M (число строк таблицы) и N (число столбцов) в диапазоне от 1 до 256 каждое. Затем вводятся M строк из N символов каждая (символ в строке может быть 0 или 1, строка вводится без пробелов).

Выходные данные

Одно число – площадь базы (посчитанная в клетках).

Пример

Ввод:

4 5

11011

10101

1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0
1	1	1	0	1

11110
11101
Вывод:
6
Пояснение: Наибольший по площади прямоугольник имеет стороны 2 и 3.
Критерии проверки:
15 баллов – алгоритм реализован верно.
10 баллов – алгоритм содержит недочеты, или в принципе верный, но реализован с ошибками.
5 баллов – задача не доделана, или есть только текстовое описание, или алгоритм/программа содержат принципиальные ошибки.

5. Спутнику Земли, находящемуся на орбите, близкой к геостационарной, необходимо определить параметры своей орбиты, не подавая радиосигналов. С этой целью спутник направляет на Луну звездный датчик (фотокамеру с ПЗС-матрицей размера 200×200 пикселей). В результате съемки получены координаты засвеченных пикселей ПЗС-матрицы. Необходимо найти координаты пикселя – центра Луны. Считаем, что освещенная Солнцем в момент съемки часть Луны полностью попала на снимок, съемка производится не в момент новолуния, т.е. снимок Луны не является пустым, а само Солнце и Земля не находятся в поле съемки.

а) Опишите алгоритм, позволяющий по списку координат засвеченных пикселей найти координаты центра изображения Луны и ее угловой размер. Входные данные: натуральное число N, список из N пар чисел (x и y координаты пикселей). Выходные данные: три числа – координаты пикселя центра и диаметр изображения Луны (в пикселях). Учтите, что в список координат попали также координаты некоторых звезд, заснятых датчиком. Будем считать, что каждая такая звезда добавляет к списку одну пару координат (то есть звезда засвечивает один пиксель), а число заснятых звезд не превосходит 200. Предположим для простоты, что никакие две звезды не засветили соседние пиксели.

б) Составьте программу на любимом языке программирования, реализующую ваш алгоритм.

Решение пункта а). Вначале надо «погасить» звезды на снимке. Для этого проходим в цикле все пиксели из списка и проверяем их на условие «пиксель изолированный». Это можно сделать поиском соседей нашего пикселя в нашем списке (двойной цикл). Если пиксель оказался изолированным, то удаляем его из списка. При этом, однако, в списке могут оказаться пиксели, засвеченные звездами, примыкающими на фотографии к диску Луны – будем считать это допустимой погрешностью.

Теперь проходим еще раз по списку и для каждого пикселя находим наиболее далекий к нему пиксель (двойной цикл). Полученная пара пикселей покажет нам «полюсы» Луны. Действительно, лунный серп на снимке является областью с границей из двух кривых – полуокружности и половины эллипса. Чтобы это доказать, представим себе вначале полностью освещенный шар – его параллельная проекция на произвольную плоскость (нас интересует плоскость снимка) является кругом. Теперь представим шар, освещенный точечным источником – получим полусферу. Линия смены света и тени (терминатор) является окружностью. Снимок же является параллельной проекцией этой окружности на некоторую плоскость, т.е. эллипсом. Для того, чтобы найти на снимке центр Луны теперь достаточно взять полусумму координат «полюсов». Диаметр Луны на снимке равен расстоянию между «полюсами».

Критерии проверки:

20 баллов – алгоритм верный, реализован верно.

19 баллов – верные алгоритм и программа, не найден диаметр.

10 баллов – верно описан алгоритм нахождения центра и алгоритм отделения звезд, пункт б) не решен.

5 баллов – прописан только алгоритм отделения звезд, либо прописан верный алгоритм нахождения центра с учетом ошибки со звездами и, возможно, других ошибок; пункт б) не решен.

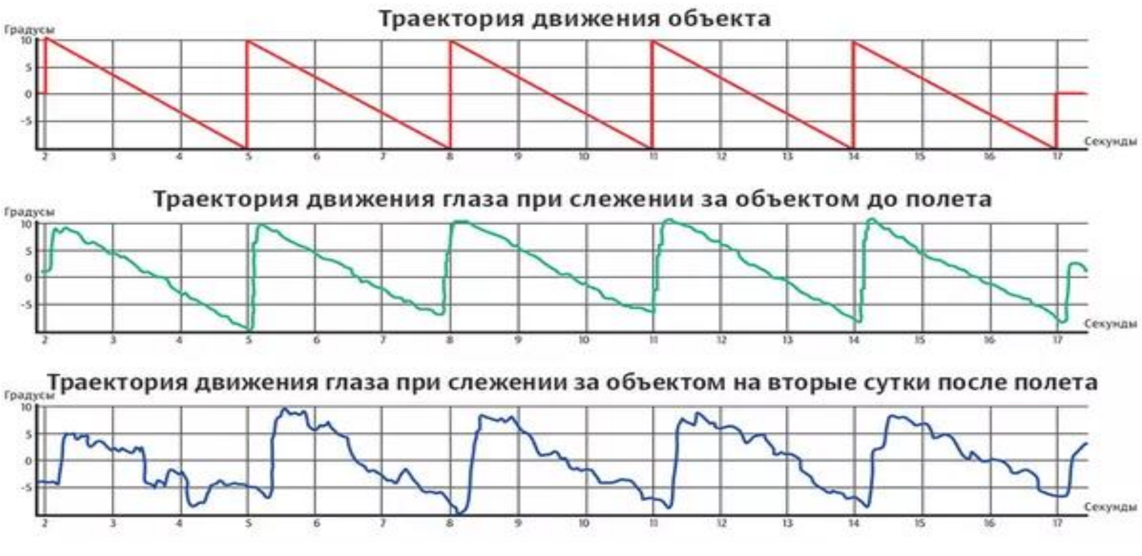
0 баллов – все остальное.

6. При стыковке к космической станции одного из летательных аппаратов (стыковка проводилась в ручном режиме) произошла авария – космонавт, управлявший стыковкой «протаранил» станцию. Расследование показало, что авария произошла не из-за ошибки оператора, а из-за отставания фиксации взора космонавта при поворотах головы. Найденный эффект был затем многократно подтвержден и исследован. Предложите свое объяснение – почему в невесомости фиксация взора происходит с задержкой? Предложите методы уменьшения негативных последствий этого эффекта.

Решение. За восприятие перемещений в пространстве в организме человека отвечает вестибулярный аппарат. Он находится во внутреннем ухе, там же, где и слуховой аппарат, прямо за барабанной перепонкой. Вестибулярный аппарат состоит из двух частей: полукружных каналов, которые воспринимают угловое ускорение, и отолитовых органов, которые воспринимают линейное ускорение, в том числе ускорение свободного падения. За способность их чувствовать мы обязаны волосковым клеткам, которые находятся внутри вестибулярного аппарата. В каждой из его частей, на самом деле, целое скопление этих клеток, десятки тысяч в каждом органе. Эти клетки имеют выросты, называемые волосками. Волоски в свою очередь погружены в желеобразную массу. Эта масса очень чувствительна к нашим движениям, и в ответ на них, по инерции смещается в противоположную сторону, увлекая за собой погруженные в неё волоски. Когда волоски вместе с желе отклоняются, клетки начинают вырабатывать электрический ток и посылать в нервную систему сигнал о том, что началось движение. Так устроены полукружные каналы. В отолитовых органах всё работает точно также, но дополнительно сверху на желе лежит отолитовая мембрана — это плотный слой кристаллов карбоната кальция. Мембрана выполняет роль дополнительного утяжелителя, она придавливает желе к клеткам под действием силы тяжести, для того чтобы мы могли лучше чувствовать линейные перемещения и наклоны головы.

Благодаря вестибулярному аппарату мы можем ориентироваться в пространстве, воспринимать положение своего тела и скоординировано перемещаться. А еще вестибулярный аппарат отвечает за стабилизацию наших глаз. Например, при беге мы продолжаем видеть мир чётко, несмотря на то, что голова постоянно движется. Так происходит потому, что глаза компенсируют движения головы. Такая компенсация возможна как раз благодаря обмену информацией о движении головы между вестибулярным аппаратом и глазодвигательными мышцами.

Однако наш вестибулярный аппарат приспособлен к жизни на Земле, в условиях постоянной гравитации. А вот космический полёт превращается для человека и его вестибулярного аппарата в настоящее испытание. Оказалось, что в этом непривычном для человеческого организма состоянии проявляются ориентационные, зрительные и проприоцептивные (ощущение собственного тела) иллюзии. В первую очередь у космонавтов возникает космическая болезнь движения — аналог морской болезни, только из-за



воздействия невесомости. Так же космонавтам трудно ориентироваться, правильно оценить расстояние и направление до цели.

Наряду с иллюзорными реакциями у 72% космонавтов возникали затруднения при слежении за движущейся целью и фиксации на ней взора, отмечались и промашки при попытках схватить предмет, удары головой о панели при "плавании" внутри станции. Анализ с использованием записи глаз и математических методов выявил связь между развитием ориентационных иллюзий и обнаруженными нарушениями глазодвигательных реакций. Такие нетипичные реакции возникают из-за того, что вестибулярный аппарат не может работать также, как на Земле. Отолитовая мембрана больше не создаёт давления на желе и не отклоняет волоски при наклонах головы. Зато в невесомости возникает огромное количество вращений тела из-за свободного плавания, к чему наш организм тоже не приспособлен. Всё это ведёт к неправильному восприятию организмом информации о перемещениях в пространстве, что и приводит к разным нарушениям и иллюзиям.

Эффект задержки слежения был впервые обнаружен в результате расследования аварии на станции «МИР» 25 июня 1997 года. В тот день при попытке ручной стыковки транспортного грузового корабля «Прогресс М-34» со станцией «МИР» произошло столкновение, что привело к разгерметизации модуля «Спектр». Изначально вина за аварию была возложена на экипаж, однако на их защиту встали сотрудники института медико-биологических процессов и доказали, что причиной случившегося может быть запаздывание взора, а не ошибка экипажа. Эти нарушения в невесомости, приводящие к визуальной дезориентации в пространстве, привели к необходимости тренировок членов экипажа перед полётом на МКС.

Для того чтобы подготовиться к жизни в невесомости и уменьшить негативные последствия, космонавты проходят длительную подготовку на тренажерах: вращения на центрифуге, вестибулярные тесты на вращающемся кресле, полёты с кратковременной невесомостью на самолёте ИЛ-76. Всё это помогает «научить» вестибулярный аппарат работать в необычных условиях и приспосабливаться к ним. Это, однако, не гарантирует отсутствие проблем – возникновение эффекта запаздывания установления взора индивидуально. Поэтому все космонавту имеют инструкцию – находясь на орбите, делать все движения медленно, сопровождая их паузами. Управление модулем при стыковке сейчас скорректировано так, чтобы оператору не надо было поворачивать голову.

Критерии проверки:

20 баллов – дано полное и достаточное подробное объяснение произошедшего (в том числе, идет речь о вестибулярном аппарате человека); предложены верные пути решения проблемы.
12 баллов – есть как верная идея по поводу причины, так и верное предложение по устранению последствий, подробного объяснения эффекта нет.
7 баллов – есть только одна верная идея (либо по поводу причины, либо по поводу последствий), второй пункт объясняется неверно или не объясняется. Подробного объяснения эффекта нет.
2 балла – есть только некоторые разумные, но неверный соображения.
0 баллов – все остальное.

Вариант 4

1. Известно, что число x_0 является корнем уравнения $x+\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}=2023$. Образуем последовательность по правилу $x_1=\frac{x_0}{\sqrt[3]{(x_0)^3-1}}$, $x_2=\frac{x_1}{\sqrt[3]{(x_1)^3-1}}$, и так далее. Найдите сумму
$$x_0+x_1+\cdots+x_{2023}.$$

Решение. Заметим, что
$$x_2=\frac{x_1}{\sqrt[3]{(x_1)^3-1}}=\frac{\frac{x_0}{\sqrt[3]{(x_0)^3-1}}}{\sqrt[3]{\frac{(x_0)^3}{(x_0)^3-1}-1}}=x_0$$
Продолжая процесс, видим, что все числа x_n с четными номерами совпадают с x_0, а все числа с нечетными номерами совпадают с x_1. Тогда искомую сумму разобьем на пары и увидим, что она равна
$$1012(x_0+x_1)=1012\left(x_0+\frac{x_0}{\sqrt[3]{(x_0)^3-1}}\right)=1012\cdot 2023=2\,047\,276\,.$$

Ответ: 2047276.

Критерии проверки:

15 баллов – ответ верный, полностью обоснован.

10 баллов – верно доказан факт, что $x_{2n}=x_0$, но не удалось довести до ответа (не использовано начальное условие на x_0).

5 баллов – факт $x_n+x_{n+1}=2023$ используется без доказательства.

0 баллов – все остальное.

2. Жители двумерной вселенной обнаружили, что их вселенная представляет собой не плоскость, как им долго казалось, а сферу, вложенную в трехмерное пространство. Жители пока не могут ни проникнуть в трехмерный мир, ни облететь свою вселенную кругом, но догадались о ее сферичности, заметив, что число π совпадает с $\pi_0=3{,}1415926535$ ... только на сравнительно малых масштабах. Длина очень больших окружностей оказывается меньше, чем вычисленная по известной формуле $L=2\pi r$. Математики двумерной вселенной решили, что число π – не константа, а зависит от радиуса окружности r. Найдите эту зависимость (то есть выразите π через π_0, r и D, где D – максимальное расстояние между двумя точками сферической вселенной, взятое по поверхности сферы).

Решение. Пусть на сфере диаметра $d=2R$ дана окружность радиуса ρ. Эта окружность видна из центра сферы под линейным углом $\alpha=2\arcsin\frac{\rho}{R}$. Этот угол стягивает на сфере дугу длины $R\alpha$, которую жители двумерный вселенной воспринимают как диаметр своей окружности. Итак, получаем соотношения $r = R \cdot \arcsin\frac{\rho}{R}$, $L = 2\pi_0\rho$, то есть, отношение $\frac{L}{2r}$, которое жители сферы называют числом π, действительно не постоянно и равно $\pi_0 \frac{\rho}{R \cdot \arcsin \rho/R}$. Выразим $\rho = R \cdot \sin\frac{r}{R}$ и получим, что $\pi = \frac{L}{2r} = \pi_0 \frac{d}{2r} \sin\frac{2r}{d}$. Действительно, при малых $r \ll R$ синус почти равен своему аргументы и отношение примерно равно числу π, но для больших r разница становится все более заметной. Для ответа выразим D через радиус сферы. Максимальное расстояние между точками сферы – это длина большой полуокружности, то есть, $D = \pi_0 R$, откуда $d = \frac{2D}{\pi_0}$.

Ответ: $\frac{D}{r} \sin\frac{\pi_0 r}{D}$.

Критерии проверки:

15 баллов – решение полностью верное (или верное, но для D – диаметра, а не половины длины окружности).

4 балла – получены некоторые верные соотношения между углом, радиусом сферы, радиусом окружности и длиной дуги; дальше верных продвижений нет.

0 баллов – все остальное.

3. Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 250$ км над поверхностью Земли. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, высота которой больше первой на $\Delta h = 25$ км. На какую величину η изменилась при этом кинетическая энергия спутника по отношению к ее первоначальному значению? Радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2}$, где G – гравитационная постоянная, M – масса Земли. Тогда

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2(R+h)}, \ \eta = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{E_2}{E_1} - 1 = \frac{R + h_1}{R + h_2} - 1 = \frac{6650}{6675} - 1 = \\ = -0{,}00375$$

Ответ: на $-0{,}00375$.

Критерии проверки:

15 баллов – решение верное, полностью обосновано.

7 баллов – верно найдено соотношение между силами, но неверно сведено к отношению между энергиями, или наоборот.

2 балла – выписаны некоторые верные соотношения, дальше продвижений нет.

0 баллов – все остальное.

4. Передающее устройство отправило строку из символов русского алфавита. Передача была прервана, и устройство передало две строки – первую, до

разрыва связи, и вторую, после разрыва. При этом (для страховки от потерь данных) передающее устройство могло начать передачу второй строки не с точки разрыва, а с некоторой предыдущей точки. Таким образом, несколько букв в конце первой строки могут совпадать с буквами в начале второй. Вам необходимо написать программу, которая склеивает строки, удаляя повтор (самую длинную часть в конце первой строки, которая одновременно является началом второй). Например, ЛОДКА + КАТЕР = ЛОДКАТЕР. Если общей пары «префикс-постфикс» у слагаемых нет, то просто склеиваем слова: КИТ + КОТ = КИТКОТ.

Входные данные

Вводятся две строки длины не более 100 символов каждая из букв русского алфавита. Строки разделяются пробелом.

Выходные данные

Одна строка – результат «склейки»

Пример

Ввод:

КОШКА КАРАСЬ

Вывод:

КОШКАРАСЬ

Критерии проверки:

15 баллов – алгоритм реализован верно.

10 баллов – алгоритм содержит недочеты, или в принципе верный, но реализован с ошибками.

5 баллов – задача не доделана, или есть только текстовое описание, или алгоритм/программа содержат принципиальные ошибки.

5. Найдена экзопланета, очень похожая на Землю – совпадают масса планет $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг, радиус $R = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ м, период вращения вокруг своей оси $T = 82400$ с. Есть и различия. Во-первых, планета является практически однородным твердым идеальным шаром. Во-вторых, вся поверхность планеты покрыта водой, уровень которой над поверхностью твердого шара составляет около 1 км. Автоматический спутник провел зондирование одного из меридианов планеты, замеряя на каждой широте уровень воды. Данные зондирования (широта – в градусах и уровень воды над поверхностью – в метрах) приведены в таблице ниже. Предполагается, что где-то на дне океана находятся залежи тяжелых металлов.

а) Найдите место залегания металлов. Подтвердите свои предположения на качественном уровне.

б) В предположении, что месторождение металлов представляет собой идеальный однородный шар небольшого радиуса, касающийся поверхности твердого шара планеты (точка касания и центр шара лежат в точности на исследуемом меридиане), найдите размер месторождения (диаметр шара) и плотность металла.

Широта	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
Уровень воды	1000,02	1000,08	1000,14	1000,20	1000,26	1000,32	1000,38	1000,44	1000,50	1000,56
Широта	80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
Уровень воды	1000,61	1000,67	1000,73	1000,79	1000,85	1000,91	1000,97	1001,02	1001,08	1001,14
Широта	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
Уровень воды	1001,19	1001,25	1001,31	1001,36	1001,42	1001,47	1001,53	1001,58	1001,63	1001,69
Широта	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
Уровень воды	1001,74	1001,79	1001,84	1001,90	1001,94	1001,99	1002,04	1002,09	1002,14	1002,18
Широта	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
Уровень воды	1002,23	1002,28	1002,32	1002,37	1002,41	1002,45	1002,50	1002,54	1002,58	1002,62
Широта	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
Уровень воды	1002,66	1002,70	1002,73	1002,77	1002,81	1002,84	1002,88	1002,91	1002,94	1002,97
Широта	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
Уровень воды	1003,00	1003,03	1003,06	1003,09	1003,12	1003,14	1003,17	1003,19	1003,22	1003,24
Широта	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
Уровень воды	1003,26	1003,28	1003,30	1003,32	1003,34	1003,35	1003,37	1003,39	1003,40	1003,41
Широта	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Уровень воды	1003,42	1003,43	1003,44	1003,45	1003,46	1003,46	1003,47	1003,47	1003,47	1003,48
Широта	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Уровень воды	1003,48	1003,48	1003,48	1003,47	1003,47	1003,47	1003,46	1003,46	1003,45	1003,44
Широта	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17	-18	-19
Уровень воды	1003,43	1003,42	1003,41	1003,40	1003,38	1003,37	1003,36	1003,34	1003,32	1003,30
Широта	-20	-21	-22	-23	-24	-25	-26	-27	-28	-29
Уровень воды	1003,29	1003,27	1003,24	1003,22	1003,20	1003,18	1003,15	1003,13	1003,10	1003,08
Широта	-30	-31	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38	-39
Уровень воды	1003,05	1003,02	1002,99	1002,96	1002,93	1002,90	1002,87	1002,84	1002,80	1002,77
Широта	-40	-41	-42	-43	-44	-45	-46	-47	-48	-49
Уровень воды	1002,74	1002,70	1002,67	1002,64	1002,60	1002,57	1002,53	1002,50	1002,47	1002,44
Широта	-50	-51	-52	-53	-54	-55	-56	-57	-58	-59
Уровень воды	1002,41	1002,39	1002,37	1002,36	1002,36	1002,38	1002,43	1002,56	1002,85	1003,81
Широта	-60	-61	-62	-63	-64	-65	-66	-67	-68	-69

Уровень воды	1022,41	1003,71	1002,64	1002,24	1002,02	1001,86	1001,74	1001,64	1001,54	1001,46	
Широта	-70	-71	-72	-73	-74	-75	-76	-77	-78	-79	
Уровень воды	1001,38	1001,30	1001,23	1001,16	1001,09	1001,03	1000,96	1000,89	1000,83	1000,76	
Широта	-80	-81	-82	-83	-84	-85	-86	-87	-88	-89	-90
Уровень воды	1000,70	1000,64	1000,57	1000,51	1000,45	1000,38	1000,32	1000,26	1000,19	1000,13	1000,07

Решение. а) Для неподвижной планеты уровень воды показывает эквипотенциальную линию – линию на которой гравитационный потенциал планеты равен константе. Этот потенциал складывается из потенциала большого шара (всей планеты, где месторождение заменено на вещество с плотностью $\rho_0 = \frac{M}{4/3\pi R^3}$) и малого шара (собственно, месторождения). Считая оба этих шара однородными, можем заменить их потенциалы на потенциалы двух точечных масс, сосредоточенных в центрах шаров. Эти потенциалы, как известно, равны $-\frac{GM}{R}$ и $-\frac{Gm}{d}$ соответственно (мы обозначили через m суммарную массу месторождения за вычетом массы такого же шара при условии однородности планеты, а через d – расстояние до центра месторождения). Видим, что возмущение, вносимое вторым потенциалом тем больше, чем ближе к месторождению мы находимся. Согласно данным зондирования, наибольший подъем уровня океана наблюдается на 60 градусе южной широты, значит, именно там находится центр месторождения.

б) Для точных вычислений надо учесть коррекцию силы тяжести за счет вращения планеты (центробежная сила снижает силу тяжести вблизи экватора). Для этого сравним уровень воды на 60 градусе южной и 60 градусе северной широты, где центробежная сила одинакова. Разность между уровнями покажет нам величину гравитационного потенциала (здесь мы приближенно считаем, что этот потенциал равен нулю на 60 градусе северной широты). Обозначим r радиус месторождения в метрах. Тогда

$$E_{\text{сев}} = \frac{GM}{R + 1001{,}74} = E_{\text{южн}} = \frac{GM}{R + 1022{,}41} + \frac{Gm}{r + 1022{,}41}$$

$$\frac{m}{r + 1022{,}41} = \frac{M(1022{,}41 - 1001{,}74)}{6371002 \cdot 6371022} \approx 3{,}04 \cdot 10^{12}$$

Одного уравнения недостаточно, чтобы определить два параметра r и m. Посмотрим на данные зондирования для 59 и 61 градусов южной широты – усредним их, чтобы снизить погрешность, которую дает вращение планеты. Теперь сравним эти значения со средним для 59 и 61 градусов северной широты. Получим второе уравнение

$$E_{\text{сев}} = \frac{GM}{R + 1001{,}74} = E_{\text{южн}} = \frac{GM}{R + 1003{,}76} + \frac{Gm}{x}$$

$$\frac{m}{x} = \frac{M(1003{,}76 - 1001{,}74)}{6371002 \cdot 6371004} = 2{,}97 \cdot 10^{11} \Rightarrow \frac{x}{r + 1022{,}41} \approx 10{,}23$$

Расстояние x найдем из геометрических соображений. Пренебрегая кривизной планеты на расстоянии в 1 градус широты, составим прямоугольный треугольник с катетами $\mathrm{r} + 1022$ и $\frac{\pi \mathrm{R}}{180} \approx 111195$ (длина одного градуса широты на поверхности планеты). Отсюда

$$\sqrt{(r + 1022)^2 + 111195^2} = 10{,}23(r + 1022) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{111195^2}{10{,}5^2 - 1}} - 1022$$

$$\approx 9900 \text{ м} \Rightarrow$$

$$m = 3{,}04 \cdot 10^{12}(r + 1022{,}41) \approx 3{,}323 \cdot 10^{16} \text{кг} \Rightarrow \rho \approx \frac{m}{4/3\pi r^3}$$

$$\approx 8176 \text{ кг/м}^3$$

Найденная плотность – это искомая добавка к средней плотности планеты. Итак, радиус месторождения около 10 км, а плотность около 13700 кг/м^3.

Ответ: радиус месторождения около 10 км, а плотность около 13700 кг/м^3.

Критерии проверки:

20 баллов – задача решена полностью верно.

15 баллов – обоснованно верно найден центр, и есть продвижения в нахождении плотности (возможно, с дополнительными предположениями о радиусе).

10 баллов – обоснованно верно найден центр, или есть пробелы в обосновании нахождения центра, но есть продвижения в нахождении плотности (возможно, с дополнительными предположениями о радиусе).

5 баллов – верно найден центр без обоснования.

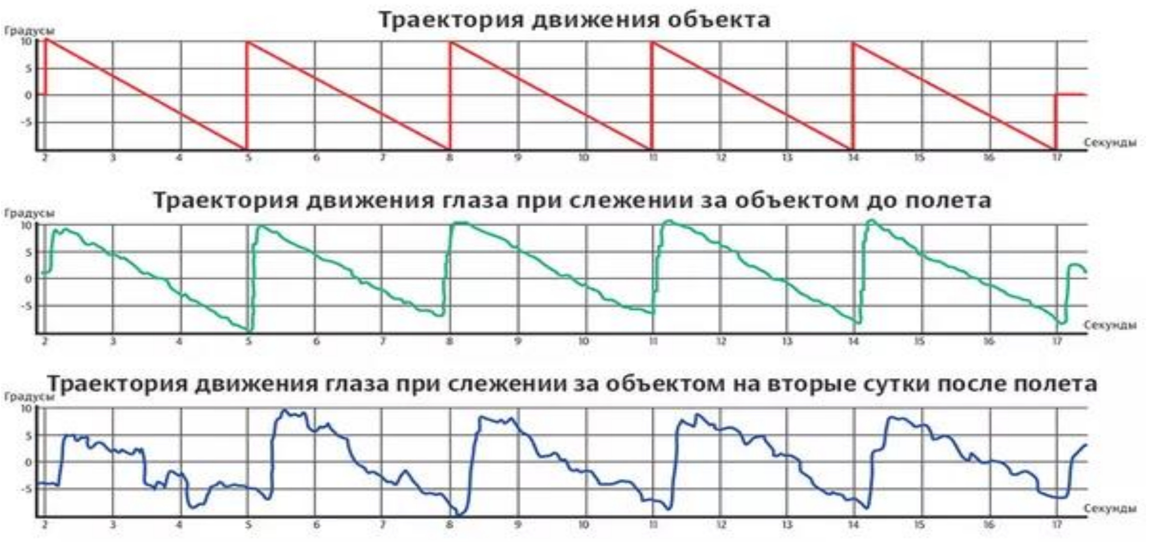
0 баллов – все остальное.

6. При стыковке к космической станции одного из летательных аппаратов (стыковка проводилась в ручном режиме) произошла авария – космонавт, управлявший стыковкой «протаранил» станцию. Расследование показало, что авария произошла не из-за ошибки оператора, а из-за отставания фиксации взора космонавта при поворотах головы. Найденный эффект был затем многократно подтвержден и исследован. Предложите свое объяснение –

почему в невесомости фиксация взора происходит с задержкой? Предложите методы уменьшения негативных последствий этого эффекта.

Решение. За восприятие перемещений в пространстве в организме человека отвечает вестибулярный аппарат. Он находится во внутреннем ухе, там же, где и слуховой аппарат, прямо за барабанной перепонкой. Вестибулярный аппарат состоит из двух частей: полукружных каналов, которые воспринимают угловое ускорение, и отолитовых органов, которые воспринимают линейное ускорение, в том числе ускорение свободного падения. За способность их чувствовать мы обязаны волосковым клеткам, которые находятся внутри вестибулярного аппарата. В каждой из его частей, на самом деле, целое скопление этих клеток, десятки тысяч в каждом органе. Эти клетки имеют выросты, называемые волосками. Волоски в свою очередь погружены в железобразную массу. Эта масса очень чувствительна к нашим движениям, и в ответ на них, по инерции смещается в противоположную сторону, увлекая за собой погруженные в неё волоски. Когда волоски вместе с желе отклоняются, клетки начинают вырабатывать электрический ток и посылать в нервную систему сигнал о том, что началось движение. Так устроены полукружные каналы. В отолитовых органах всё работает точно также, но дополнительно сверху на желе лежит отолитовая мембрана — это плотный слой кристаллов карбоната кальция. Мембрана выполняет роль дополнительного утяжелителя, она придавливает желе к клеткам под действием силы тяжести, для того чтобы мы могли лучше чувствовать линейные перемещения и наклоны головы.

Благодаря вестибулярному аппарату мы можем ориентироваться в пространстве, воспринимать положение своего тела и скоординировано перемещаться. А еще вестибулярный аппарат отвечает за стабилизацию наших глаз. Например, при беге мы продолжаем видеть мир чётко, не смотря



на то, что голова постоянно движется. Так происходит потому, что глаза компенсируют движения головы. Такая компенсация возможна как раз благодаря обмену информацией о движении головы между вестибулярным аппаратом и глазодвигательными мышцами.

Однако наш вестибулярный аппарат приспособлен к жизни на Земле, в условиях постоянной гравитации. А вот космический полёт превращается для человека и его вестибулярного аппарата в настоящее испытание. Оказалось, что в этом непривычном для человеческого организма состоянии проявляются ориентационные, зрительные и проприоцептивные (ощущение собственного тела) иллюзии. В первую очередь у космонавтов возникает космическая болезнь движения — аналог морской болезни, только из-за воздействия невесомости. Так же космонавтам трудно ориентироваться, правильно оценить расстояние и направление до цели.

Наряду с иллюзорными реакциями у 72% космонавтов возникали затруднения при слежении за движущейся целью и фиксации на ней взора, отмечались и промашки при попытках схватить предмет, удары головой о панели при "плавании" внутри станции. Анализ с использованием записи глаз и математических методов выявил связь между развитием ориентационных иллюзий и обнаруженными нарушениями глазодвигательных реакций. Такие нетипичные реакции возникают из-за того, что вестибулярный аппарат не может работать также, как на Земле. Отолитовая мембрана больше не создаёт давления на желе и не отклоняет волоски при наклонах головы. Зато в невесомости возникает огромное количество вращений тела из-за свободного плавания, к чему наш организм тоже не приспособлен. Всё это ведёт к неправильному восприятию организмом информации о перемещениях в пространстве, что и приводит к разным нарушениям и иллюзиям.

Эффект задержки слежения был впервые обнаружен в результате расследования аварии на станции «МИР» 25 июня 1997 года. В тот день при попытке ручной стыковки транспортного грузового корабля «Прогресс М-34» со станцией «МИР» произошло столкновение, что привело к разгерметизации модуля «Спектр». Изначально вина за аварию была возложена на экипаж, однако на их защиту встали сотрудники института медико-биологических процессов и доказали, что причиной случившегося может быть запаздывание взора, а не ошибка экипажа. Эти нарушения в невесомости, приводящие к визуальной дезориентации в пространстве, привели к необходимости тренировок членов экипажа перед полётом на МКС.

Для того чтобы подготовиться к жизни в невесомости и уменьшить негативные последствия, космонавты проходят длительную подготовку на тренажерах: вращения на центрифуге, вестибулярные тесты на вращающемся кресле, полёты с кратковременной невесомостью на самолёте ИЛ-76. Всё это помогает «научить» вестибулярный аппарат работать в необычных условиях и приспосабливаться к ним. Это однако не гарантирует отсутствие проблем – возникновение эффекта запаздывания установления взора индивидуально. Поэтому все космонавту имеют инструкцию – находясь на орбите, делать все движения медленно, сопровождая их паузами. Управление модулем при стыковке сейчас скорректировано так, чтобы оператору не надо было поворачивать голову.

Критерии проверки:

20 баллов – дано полное и достаточное подробное объяснение произошедшего (в том числе, идет речь о вестибулярном аппарате человека); предложены верные пути решения проблемы.

12 баллов – есть как верная идея по поводу причины, так и верное предложение по устранению последствий, подробного объяснения эффекта нет.

7 баллов – есть только одна верная идея (либо по поводу причины, либо по поводу последствий), второй пункт объясняется неверно или не объясняется. Подробного объяснения эффекта нет.

2 балла – есть только некоторые разумные, но неверный соображения.

0 баллов – все остальное.

Итоговая оценка равна сумме баллов за все задачи.