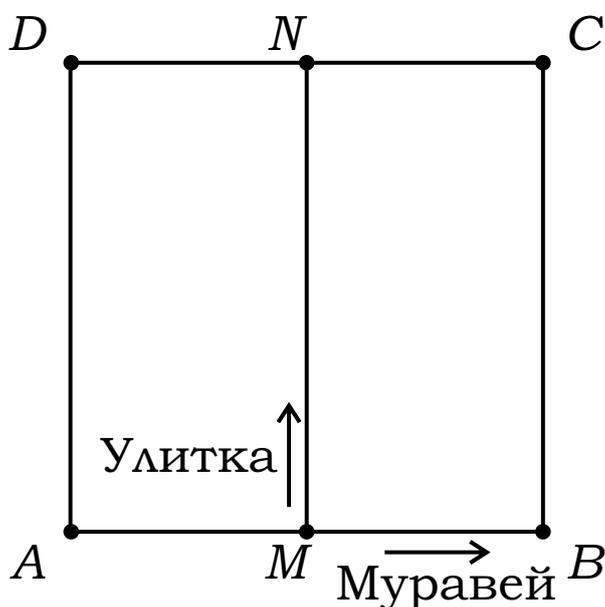


5-7 классы

Задача 1. Улитка и муравей

На полу лежит квадратная рамка $ABCD$ со стороной a . Середины противоположных сторон AB и CD соединены перемычкой MN . Улитка и Муравей одновременно начинают равномерно ползти из точки M . Улитка ползёт по перемычке MN , а Муравей движется по сторонам квадрата против часовой стрелки (по траектории $MBCDAM$). Через некоторое время они встречаются в точке N , причем Муравей за время движения Улитки успевает обежать вокруг квадрата 2,5 раза.

После встречи в точке N Муравей продолжает свое движение по квадрату в том же направлении и с той же скоростью, а Улитка движется в точку M по траектории $NCBM$ со скоростью, вдвое превышающей её первоначальную скорость.



Вопросы:

- (1) Во сколько раз скорость Муравья была больше скорости Улитки, пока она ползла из точки M в точку N по перемычке?
- (2) Сколько раз Муравей повстречает Улитку, пока она ползет из точки N в точку M по траектории $NCBM$? Встреча в точке N не считается.

Ответ: (1) 10, (2) 3.

Возможное решение

1. При движении от точки M к точке N Улитка пройдет расстояние, равное длине стороны квадрата a .

2. Муравей за это же время пробежит периметр квадрата дважды и ещё половину периметра квадрата, т.е. расстояние, равное $10a$.

3. Отношение скорости Муравья к Улитки равно отношению расстояний, пройденных ими за время движения, т.е. скорость Муравья была больше скорости Улитки в 10 раз.

4. На втором этапе движения Улитка пройдет расстояние $2a$ — сторона квадрата и две половинки стороны квадрата.

5. Скорость Улитки на втором этапе вдвое больше её первоначальной скорости, поэтому она потратит на то, чтобы вернуться в точку M , то же самое время, что и при движении на первом этапе по перемычке MN .

6. За это время Муравей, сохраняя свою первоначальную скорость, пробежит то же самое расстояние, что и на первом этапе, — $10a$, то есть обежит квадрат еще 2,5 раза и встретит улитку в точке M .

7. Получаем, что Муравей встретит улитку три раза на втором этапе движения.

Критерии

Всего — 25 баллов

0. Ответ верный, но решения нет — 5 баллов за каждый вопрос.

1. Решена первая часть задачи — 10 баллов: определён путь Улитки (3 балла), определён путь Муравья (3 балла), указано, что пути пройдены за одинаковое время (2 балла), получено отношение скоростей (2 балла).

2. Решена вторая часть задачи — 15 баллов: определён путь Улитки (3 балла), определено время движения Улитки (4 балла), определён путь Муравья (4 балла), определено число встреч без учёта встречи в точке M (2) учтена встреча в точке M (2 балла).

Задача 2. Стрекоза и машина

Стрекоза подлетает к пешеходному переходу, состоящему из чередующихся $n = 5$ белых и $n = 5$ жёлтых полос шириной $h = 40$ см каждая. Переход начинается с белой полосы. Стрекоза знает, что она делает крыльями $N = 96000$ взмахов в минуту. Стрекоза летит вдоль перехода (соблюдает правила пересечения улиц) и движется перпендикулярно полосам. Так как про метры стрекоза ничего не знает, то она считает жёлтые полосы и измеряет свою скорость в единицах полос/взмах. При этом её скорость $v_c = \frac{1}{64}$ полос/взмах. В это время вдоль улицы едет автомобиль со скоростью $v_a = 45$ км/ч. В тот момент, когда стрекоза подлетела к первой белой полосе перехода, автомобиль находился на расстоянии $l = 10$ м от перехода. На каком расстоянии от перехода может находиться автомобиль в тот момент, когда стрекоза закончит перелёт перехода?

Ответ: 7,5 м, 12,5 м.

Возможное решение

1. Переведём скорость стрекозы в метры в секунду. Так как она считает жёлтые полосы, а пройденное расстояние при этом равно сумме длин белой и жёлтых полос, то в единицах измерения скорости полос/взмах, одна полоса имеет длину $h_1 = 2h = \frac{4}{5}$ м.

2. Так как один взмах стрекозы делает за $\Delta t = \frac{1}{N} = \frac{1}{1600}$ секунды, то её скорость будет равна

$$v = \frac{v_c \cdot h_1}{\Delta t} = \frac{0,8 \cdot 1600}{64} = 20 \text{ м/с.}$$

3. Найдём время, за которое стрекоза пролетит переход. Для этого поделим длину перехода на скорость стрекозы:

$$t = \frac{n \cdot h_1}{v} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \text{ с.}$$

4. За это время автомобиль пройдёт расстояние

$$S = v_a \cdot t = \frac{45}{36/10} \cdot \frac{1}{5} = 2,5 \text{ м.}$$

Тогда автомобиль может находиться расстояннии 7,5 м или 12,5 м от перехода.

Критерии

Всего — 25 баллов

1. Верно посчитано количество взмахов на полосу или переход — 3 балла.
2. Верно вычислено время пролета целого перехода — 7 балла.
3. Верно вычислено расстояние, которое преодолел автомобиль, — 5 баллов.
4. Идея решения верная — 5 баллов.
5. Ответ верный — 5 баллов.

Задача 3. Смешивание жидкостей

Опыт показывает, что при смешивании двух разных сортов нефти суммарный объём смеси V оказывается равным сумме объёмов исходных жидкостей: $V = V_1 + V_2$. Определите, какую массу будет иметь 1 литр смеси двух различных сортов нефти, если известно, что массовая доля первого сорта в смеси составляет $\alpha_1 = \frac{1}{5}$. Литр первого сорта нефти имеет массу $m_1 = 1$ кг, а литр второго сорта — $m_2 = \frac{4}{5}$ кг.

Указание. Массовой долей вещества в смеси, состоящей из двух компонент, называется отношение массы одного из веществ к массе всего раствора:

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

где m_1, m_2 — массы компонент, входящих в смесь.

Например, если растворить 100 граммов соли в 300 граммах воды, массовая доля будет вычисляться как:

$$\alpha = \frac{100}{100 + 300} = \frac{1}{4}.$$

2. Часто оказывается, что итоговый объём V раствора меньше суммы объёмов компонент, входящих в него: $V < V_1 + V_2$. Это явление называется «контракция».

Пусть в научных целях смешали $V_1 = \frac{2}{5}$ литра воды и $V_2 = \frac{3}{10}$ литра спирта. Если бы такой раствор имел объём 1 литр, то он бы имел массу $m = \frac{97}{100}$ кг.

Определите, происходит ли контракция в данном эксперименте. Если да, вычислите, на сколько объём получившегося раствора отличается от исходного суммарного объёма спирта и воды.

Литр воды имеет массу $m_1 = 1$ кг, а литр спирта имеет массу $m_2 = \frac{4}{5}$ кг.

Ответ: 1. $\frac{5}{6}$ кг, 2. контракция происходит, $\frac{39}{970}$ л.

Возможное решение

1. По условию:

$$\frac{1}{5} = \frac{m_I}{m_I + m_{II}} \Rightarrow \frac{m_{II}}{m_I} = 4.$$

Литр первого сорта нефти имеет массу в $\frac{5}{4}$ раз больше второго сорта нефти, следовательно,

$$4 = \frac{m_{II}}{m_I} = \frac{m_2 V_2}{m_1 V_1} = \frac{4 V_2}{5 V_1} \Rightarrow 5 V_1 = V_2.$$

Сумма объёмов нефти первого и второго сортов равна 1 литру, поэтому первая жидкость занимает $\frac{1}{6}$ л, а вторая — $\frac{5}{6}$ л.

Масса 1 литра смеси двух сортов нефти равна:

$$m = \frac{1}{6} \cdot m_1 + \frac{5}{6} \cdot m_2 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{6} \text{ кг.}$$

2. Определим массу получившегося раствора воды и спирта:

$$m_{\Sigma} = m_I + m_{II} = m_1 V_1 + m_2 V_2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{50} \text{ кг.}$$

Суммарный объём компонент:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \text{ л.}$$

Тогда один литр воды и спирта, взятых в нужном соотношении (но ещё не смешанных), имеет массу:

$$M = m_{\Sigma} \cdot \frac{10}{7} = \frac{32}{35} \text{ кг} < \frac{97}{100} \text{ кг.}$$

Следовательно, явление контракции происходит.

Заметим, что суммарный объём раствора относится к объёму одного литра раствора как суммарная масса раствора к массе одного литра раствора:

$$\frac{V_{\Sigma}}{1 \text{ л}} = \frac{m_{\Sigma}}{97/100 \text{ кг}}.$$

Тогда $V_{\Sigma} = \frac{1 \text{ л} \cdot m_{\Sigma}}{97/100} = \frac{64}{97}$ л. Следовательно, уменьшение объёма:

$$\Delta V = V - V_{\Sigma} = \frac{7}{10} - \frac{64}{97} = \frac{39}{970} \text{ л.}$$

Критерии

Вопрос 1 - всего 6 баллов:

1. Правильно определено отношение между массами — 2 балла.
2. Правильно определены объёмы — 2 балла.
3. Правильно определена масса смеси — 2 балл.

Вопрос 2 - всего 19 баллов:

1. Правильно посчитана масса раствора — 2 балла.
2. Правильно посчитан объём компонент — 3 балла.
3. Правильно определена масса 1 л раствора — 5 баллов.
4. Правильно сделан вывод про контракцию — 2 балла.
5. Вывод про контракцию обоснован — 3 балла.
6. Правильно рассчитано, насколько уменьшился объём — 4 балла.

Задача 4. Контейнер с мячами

В очень большой прямоугольный грузовой контейнер насыпали $N = 4000$ футбольных мячей, которые заполнили его целиком. При этом центры мячей оказались расположены в ящике так, как показано на рис. 1 (то есть в вершинах кубических «ячеек»). При транспортировке из-за тряски футбольные мячи перераспределились и стали занимать лишь часть объёма контейнера. Сколько еще мячей возможно добавить в контейнер, если считать, что и лежавшие в контейнере, и добавляемые в него мячи будут уложены одинаковым образом, а их центры будут расположены так, как показано на рис. 2. Радиус мяча можно считать существенно меньшим размера контейнера. Объём куба с длиной ребра L равен $L \cdot L \cdot L$, а диагональ куба в $\frac{17}{10}$ раза больше длины его ребра. При обоих способах укладки мячи касаются друг друга. Учтите, что размеры кубических «ячеек» при разных способах укладки могут быть не одинаковыми.

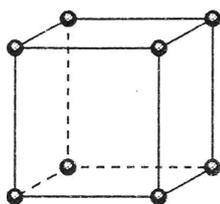


Рисунок 1

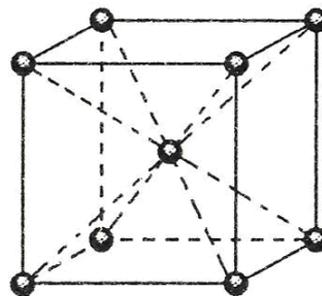


Рисунок 2

Ответ: 913 мячей.

Возможное решение

При первом способе укладки мячей на одну «ячейку» приходится в среднем один мяч (так как каждый из восьми мячей принадлежит восьми «ячейкам»). Длина ребра этой «ячейки» равна $a = 2R$. Поэтому на один мяч приходится объём контейнера $V_1 = a^3 = 8R^3$.

При втором способе укладки на одну «ячейку» приходится в среднем два мяча, а на диагонали куба должно укладываться два диаметра мяча, то есть расстояние $4R$.

Если ребро «ячейки» при втором способе укладки равно b , то

$$\frac{17}{10}b = 4R \Rightarrow b = \frac{40}{17}R.$$

Объём контейнера, приходящийся на один мяч, во втором случае равен

$$V_2 = \frac{b^3}{2} = \frac{64000}{2 \cdot 4913} \cdot R^3 = \frac{32000}{4913} \cdot R^3.$$

Если сначала в контейнер вмещалось $N = 4000$ мячей, то его объём $V_0 = V_1 N = 8R^3 N = 32000R^3$. Поэтому при новой укладке в контейнер влезет количество мячей

$$N_1 = \frac{V_0}{V_2} = \frac{32000 R^3}{32000 R^3} \cdot 4913 = 4913.$$

Получается, что можно будет добавить 913 мячей — почти 25 % от их исходного количества!

Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Правильно посчитано количество мячей на «ячейку» для случая 1 — 2 балла.
2. Правильно посчитано количество мячей на «ячейку» для случая 2 — 4 балла.
3. Правильно определено, какой объём приходится на 1 мяч для случая 1 — 6 балла.
4. Правильно рассчитано ребро «ячейки» для случая 2 — 2 балла.
5. Правильно определено, какой объём приходится на 1 мяч для случая 2 — 7 баллов.
6. Правильно определено количество добавляемых мячей — 4 балла.

8-9 классы

Задача 1. Изменение структуры вещества

При изменении температуры веществ они могут испытывать фазовые переходы. Не все фазовые переходы сопровождаются сменой агрегатного состояния, некоторые из них связаны с изменением структуры вещества. Одним из примеров такого «необычного» фазового перехода является перестроение кристаллической решётки железа при температуре $917\text{ }^\circ\text{C}$. Этот эффект можно наблюдать экспериментально, если натянуть раскалённую до $1000\text{ }^\circ\text{C}$ железную проволоку, имеющую в этом состоянии длину $l = 5\text{ м}$ и диаметр $d = 1\text{ мм}$, а затем следить за её остыванием. По мере уменьшения температуры ярко светящаяся проволока будет укорачиваться, а её свечение будет тускнеть из-за остывания. При достижении температуры $917\text{ }^\circ\text{C}$ произойдёт превращение γ -железа с гранецентрированной кубической решёткой (см. рис. 1) в α -железо с объёмноцентрированной кубической решёткой (см. рис. 2). В этот момент будет наблюдаться увеличение объёма проволоки. Одновременно с этим будет выделяться теплота фазового перехода (аналогичная теплоте кристаллизации и конденсации), которая частично пойдёт на кратковременное нагревание проволоки, из-за чего яркость её свечения на мгновение заметно увеличится.

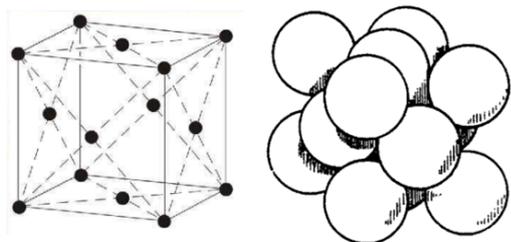


Рисунок 3. Гранецентрированная кубическая решётка (соответствует γ -состоянию)

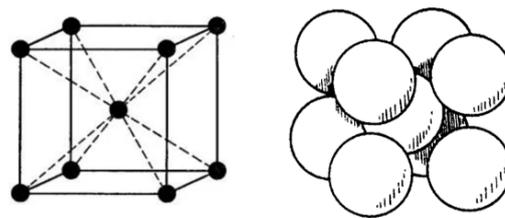


Рисунок 4. Объёмноцентрированная кубическая решётка (соответствует α -состоянию)

1. Оцените диаметр D атома железа, если известно, что при комнатной температуре металл, находящийся в α -состоянии, имеет плотность $\rho_\alpha = 7800\text{ кг/м}^3$, а масса атома железа равна $m_A = 56\text{ а.е.м} = 9,2 \cdot 10^{-23}\text{ г}$. При расчётах тепловым расширением железа можно пренебречь.

2. Оцените плотность проволоки в γ -состоянии и величину изменения её объёма при переходе в α -состояние.

3. Оцените, на сколько градусов должна была нагреться проволока, если бы всё выделившееся при фазовом переходе количество теплоты пошло на её нагревание. Удельная теплота данного фазового перехода равна $q = 16\text{ Дж/г}$. Считайте, что теплоёмкость одного моля всех металлических твёрдых тел равна $C_V = 25\text{ Дж/К}$ и не зависит от температуры и от структуры кристаллической решётки.

Ответ: 1. $D \approx 2,5\text{ \AA}$, 2. $\rho_\gamma \approx 8,5\text{ г/см}^3$, $\Delta V \approx 0,35\text{ см}^3$, 3. $\Delta T \approx 36\text{ }^\circ\text{C}$.

Возможное решение

1. Можно заметить, что на одну ячейку в α -состоянии приходится 2 атома, $2D = \sqrt{3}a$, где a — размер ячейки кристаллической решётки.

Выражение для плотности:

$$\rho_\alpha = \frac{2 \cdot m_A}{a^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{2m_A}{\rho_\alpha}} \approx 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Диаметр атома равен:

$$D = \frac{\sqrt{3}}{2}a \approx 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2,5 \text{ \AA}.$$

2. Можно заметить, что на одну ячейку в γ -состоянии приходится 4 атома, $2D = \sqrt{2}b$, где b — размер ячейки. Выражение для плотности:

$$\rho_\gamma = \frac{4m_A}{b^3} = \frac{4m_A}{(\sqrt{2}D)^3} \approx 8,5 \text{ г/см}^3.$$

Масса проволоки:

$$m = \rho_\gamma V_\gamma = \rho_\gamma l \cdot \frac{\pi d^2}{4} \approx 33,4 \text{ г.}$$

$$\Delta V = \frac{m}{\rho_\alpha} - \frac{m}{\rho_\gamma} \approx 0,35 \text{ см}^3.$$

3. Уравнение теплового баланса:

$$Q = q \cdot m = C_\nu \nu \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{q \cdot m}{C_\nu \nu} = \frac{q \cdot m}{C_\nu \cdot m / \mu} = \frac{q \cdot \mu}{C_\nu} \approx 36 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Есть обоснованная оценка для диаметра атома железа — 15 баллов.
2. Есть оценка плотности проволоки и изменения объёма — 5 баллов.
3. Есть оценка температуры нагревания — 5 баллов.

Задача 2. Шаловливые студенты

В один прекрасный солнечный день студенты остались в лабораторном практикуме без преподавателя, устроились поудобнее у окна и начали смешивать попавшиеся под руку реактивы. В тот день им под руку попались разбавленные водные растворы бромиды и гидроксида калия, а также нитрата серебра. Напишите реакции, которые могут привести к получению новых веществ в ходе такого неосмотрительного времяпровождения в лаборатории? Рассчитайте массу вещества, содержащего бром в максимальной степени окисления, которую студенты могут теоретически получить исходя из $V = 10$ мл раствора нитрата серебра концентрации $C = 0,05$ М и неограниченного количества двух других реагентов.

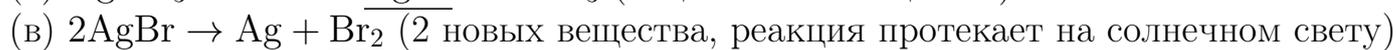
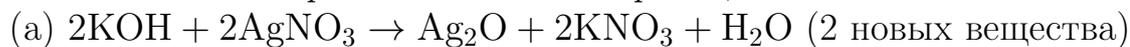
Требования к ответу

Ответ выразите в миллиграммах и запишите в виде числа, округлив десятых, без указания единиц измерения.

Ответ: 33,8.

Возможное решение

1. Запишем перечень возможных реакций:



2. Таким образом, максимальная степень окисления брома среди всех полученных веществ — Br (+5) наблюдается в бромате калия, $\underline{\text{KBrO}_3}$.

3. Суммируя реакции (б) – (г), получаем формальную реакцию, отражающую тот факт, что количество образующегося бромата калия в шесть раз меньше, чем количество нитрата серебра:



$$n(\text{KBrO}_3) = n(\text{AgNO}_3)/6, M(\text{KBrO}_3) = 167\text{г/моль},$$

$$m(\text{KBrO}_3) = (10\text{мл} \cdot 0,05 \cdot 167\text{г/моль})/6 = 13,9\text{мг}$$

Критерии

Всего — 25 баллов.

1. За реакции (а) и (б) — по 2 балла. 2. За реакцию (в) — 4 балла. 3. За реакцию (г) и (д) — по 5 баллов. 4. Рассчитана масса бромата калия — 7 баллов.

Задача 3. Неизвестная жидкость

В глубокую цилиндрическую мензурку с площадью дна S_M налита неизвестная жидкость. Опущенная в неё пустая тонкостенная цилиндрическая пробирка с площадью дна S_{II} плавает вертикально, погружившись в жидкость на глубину $h = 5$ см. В пробирку аккуратно положили кубик массой $m = 240$ г и объёмом $V_K = 125$ см³. Оказалось, что после этого уровень жидкости в мензурке понизился на $\Delta h = 1,25$ см. Известно, что рычажные весы уравниваются, если поместить на их левую чашу тот же кубик, а на правую — ту же пробирку, в которую налита эта же неизвестная жидкость объёмом $V = 50$ см³. Найдите плотность жидкости, если $\frac{S_M}{S_{II}} = 2$.

Ответ: $\rho = 0,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Возможное решение

Запишем условие равновесия плавающей пробирки:

$$S_{\text{п}} h \rho g = m_{\text{п}} g.$$

Согласно условию, после того, как в пробирку положили кубик, уровень жидкости в мензурке понизился. Из этого следует, что пробирка утонула, и жидкость залилась в часть пробирки, не занятую кубиком. Тогда изменение объёма жидкости в мензурке равно:

$$\Delta h = \frac{S_{\text{п}} h - V_{\text{к}}}{S_{\text{м}}}.$$

Условие равновесия весов имеет вид:

$$V \rho + m_{\text{п}} = m.$$

Решив систему из этих уравнений с учетом того, что $\frac{S_{\text{м}}}{S_{\text{п}}} = 2$, найдём плотность жидкости:

$$\rho = m \frac{(h - 2\Delta h)}{hV_{\text{к}} + V(h - 2\Delta h)} = 0,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Критерии

Всего — 25 баллов

1. Записано уравнение для условия равновесия плавающей пробирки — 5 баллов.
2. Записано уравнение равновесия для рычажных весов — 5 баллов.
3. Записано уравнение для понижения уровня жидкости в мензурке — 5 баллов.
4. Записано итоговое уравнение для плотности неизвестной жидкости — 5 баллов.
5. Правильно рассчитана плотность неизвестной жидкости — 5 баллов.

Задача 4. Муравьи и соломинка

Через камешек с острым краем перекинута прочная прямая однородная соломинка массой M . На соломинке находятся муравьи с одинаковыми массами m . На левом конце соломинки сидят пять муравьев, а на другом её конце — один муравей. При этом соломинка расположена горизонтально и опирается только на край камня. Трое из пятерки начинают идти по соломинке со скоростью v . Одновременно с ними муравей, сидевший на противоположном конце, начинает идти им на встречу со скоростью $3v$. Встретившись, муравьи останавливаются. При этом соломинка всё время остается в горизонтальном положении. Найдите отношение масс $\frac{M}{m}$ соломинки и одного муравья.

Ответ: $\frac{M}{m} = 2$.

Возможное решение

Пусть l_1 — длина левого плеча рычага, l_2 — длина правого плеча рычага. Так как соломинка однородная, положение её центра масс (относительно левого конца) можно найти следующим образом:

$$l_c = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

До начала движения соломинка была неподвижна, следовательно можно записать условие её равновесия:

$$5 \cdot mg \cdot l_1 = Mg \cdot (l_c - l_1) + mg \cdot l_2.$$

Так как соломинка всё время находится в равновесии, то муравьи встретились в точке опоры рычага. Тогда из соотношения скоростей получим $3l_1 = l_2$.

Подставляя все необходимые величины в уравнение моментов, получим:

$$5ml_1 = M \left(\frac{l_1 + l_2}{2} - l_1 \right) + ml_2 = M \left(\frac{l_1 + 3l_1}{2} - l_1 \right) + 3ml_1 = Ml_1 + 3ml_1.$$

Сокращая на l_1 получим:

$$5m = M + 3m \Rightarrow 2m = M \Rightarrow \frac{M}{m} = 2.$$

Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Есть рисунок (или словесное описание) для двух случаев — 5 баллов.
2. Есть условие равновесия системы до начала движения муравьев — 5 баллов.
3. Рассчитано положение центра масс — 5 баллов.
4. Получено и решено уравнение моментов — 10 баллов.

10-11 классы

Задача 1. Диссоциация

В комнате на столе стоит вертикальный цилиндр с теплопроводящими стенками. Он закрыт тонким невесомым горизонтальным поршнем, который может скользить без трения. В цилиндре находится газовая смесь молекулярного кислорода с озоном (O_3), причем озон составляет $n = 40\%$ от общего количества вещества. Температура в комнате равна $T_0 = 273$ К, расстояние от дна цилиндра до поршня равно $H_0 = 21$ см.

На каком расстоянии от дна цилиндра окажется поршень после того, как весь озон за достаточно большое время самопроизвольно превратится в молекулярный кислород, а окружающий воздух в комнате прогреется от печи до температуры $T = 286$ К?

Возможное решение

1. Пусть первоначальное количество вещества кислорода в цилиндре ν_1 , а количество вещества озона ν_2 . Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси газов в цилиндре и такое же уравнение, но только для озона в цилиндре в начальный момент времени (до превращения его в кислород):

$$p_0 V_0 = (\nu_1 + \nu_2) RT \quad (1)$$

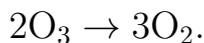
$$p_0 \alpha V_0 = \nu_2 RT \quad (2)$$

Здесь $\alpha = 0,4$ — это объёмная доля озона, а V_0 — первоначальный объём, занимаемый смесью газов; он равен $V_0 = SH_0$ (S — площадь поршня).

2. Поделив уравнение (2) на уравнение (1), выразим ν_2 через α и ν_1 :

$$\nu_2 = \frac{\alpha \nu_1}{1 - \alpha}. \quad (3)$$

3. Запишем уравнение химической реакции превращения озона в кислород:



4. После превращения всего озона O_3 в кислород O_2 количество вещества новообразованного кислорода станет:

$$\nu_2' = \frac{3}{2} \nu_2.$$

5. После превращения всего озона в кислород и повышения температуры уравнение Менделеева–Клапейрона для всего газа в цилиндре будет иметь вид:

$$p_0 V = \left(\nu_1 + \frac{3}{2} \nu_2 \right) RT, \quad (4)$$

где T — температура воздуха в комнате после прогрева, V — новый объём, занимаемый кислородом, он равен $V = SH$. Здесь H — новое расстояние от дна цилиндра до поршня.

6. Поделим уравнение (6) на уравнение (1):

$$\frac{V}{V_0} = \frac{SH}{SH_0} = \frac{\nu_1 + \frac{3}{2}\nu_2 T}{\nu_1 + \nu_2 T_0}. \quad (5)$$

7. Далее, воспользовавшись соотношением (3), получим:

$$H = H_0 \frac{\nu_1 + \frac{3}{2}\nu_2 T}{\nu_1 + \frac{3}{2}\nu_2 T_0} = H_0 \frac{\nu_1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha\nu_1}{1-\alpha} T}{\nu_1 + \frac{\alpha\nu_1}{1-\alpha} T_0}. \quad (6)$$

8. Подставляя численные данные, окончательно получаем:

$$H = H_0 \left(\frac{2 + \alpha}{2} \right) \frac{T}{T_0} = 0,21 \cdot \left(\frac{2 + 0,40}{2} \right) \frac{286}{273} = 0,21 \cdot 1,2 \cdot \frac{13 \cdot 22}{13 \cdot 21} = 26,4 \text{ см}$$

Ответ: $H = 26,4 \text{ см}$.

Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Есть правильно применённое уравнение состояния — 10 баллов.
2. Правильно учтена реакция диссоциации озона — 10 баллов.
3. Правильные выкладки при решении — 5 баллов.
4. Арифметическая ошибка — снимается 3 балла.

Задача 2. Стабилитрон

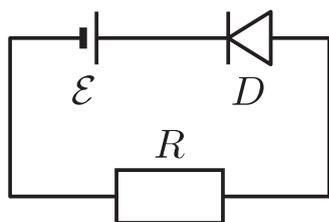


Рисунок 1

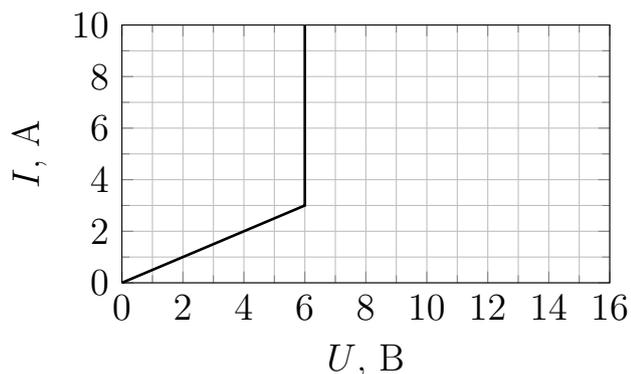


Рисунок 2

В электрическую цепь, схема которой представлена на рисунке 1, включены резистор сопротивлением $R = 1,5 \text{ Ом}$, идеальная батарейка с ЭДС $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$ и нелинейный элемент — стабилитрон — вольт-амперная характеристика которого показана на рисунке 2. Какая мощность будет выделяться в стабилитроне в установившемся режиме?

Возможное решение

1. Закон Ома для полной цепи:

$$\mathcal{E} = IR + U_C, \quad (7)$$

где U_C — напряжение на стабилитроне.

2. Отсюда ток в цепи равен:

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_C}{R}. \quad (8)$$

3. Построим график зависимости $I(U_C)$ (см. рис. 3). Точка пересечения этой линейной зависимости с ВАХ стабилитрона даст нам силу тока в цепи (и в стабилитроне) и напряжение на стабилитроне.

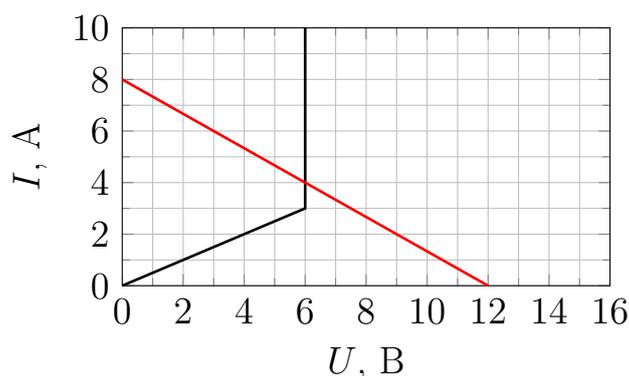


Рисунок 3

4. Так как ЭДС батарейки $\mathcal{E} = 12$ В, а $R = 1,5$ Ом, то согласно графику (рис. 3):

$$I_C = 4 \text{ А}; \quad U_C = 6 \text{ В}$$

5. Следовательно, выделяющаяся в стабилитроне мощность

$$P_C = I_C U_C = 4 \text{ А} \cdot 6 \text{ В} = 24 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P_C = 24$ Вт.

Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Правильно записан закон Ома для полной цепи — 5 баллов.
2. Доказано, что напряжение на стабилитроне равно 6В — 15 баллов.
3. Правильно вычислена мощность, выделяемая на стабилитроне — 5 баллов.

Задача 3. Фосфат церия

Фосфат церия получали взаимодействием $(\text{NH}_4)_2[\text{Ce}(\text{NO}_3)_6]$ и H_3PO_4 . За счет наличия HPO_4^{2-} групп продукт $(\text{Ce}(\text{PO}_4)_x(\text{HPO}_4)_y \cdot n\text{H}_2\text{O})$ обладает катионообменными свойствами. Данные титрования говорят о наличии в структуре вещества кислых протонов, способных к ионному обмену. По данным элементного анализа соотношение атомов церия к атомам фосфора для образца фосфата церия составило 1:1,33. Его ионообменная ёмкость составила 1,4 ммоль/г. По данным термогравиметрии потеря массы протекает в две стадии. На первой из них при нагревании до 300 °С она составляет 10%.

Учитывая протекание в ходе синтеза окислительно-восстановительных процессов укажите химический состав продукта, объясните почему он обладает ионообменной ёмкостью и что происходит в процессе нагревания фосфата церия на первой и на второй стадиях.

Возможное решение

Для установления состава фосфата церия стоит данные задачи представить в виде системы уравнений и аккуратно её решить. Из условия видно, что

$$x + y = 1,33$$

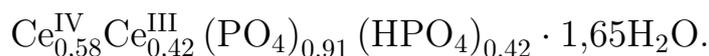
То есть валовый состав напоминает фосфат четырёхвалентного церия $\text{Ce}_3(\text{PO}_4)_4$. Но часть фосфатных групп в нем протонированы и находятся в форме HPO_4^{2-} (они есть и в условии) $(\text{Ce}_3(\text{PO}_4)_{4-x}(\text{HPO}_4)_x)$. Понятно, что к ионному обмену способны только они.

Далее может быть 2 решения.

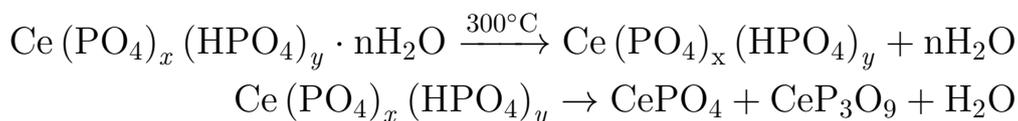
1. Атомные массы PO_4 и HPO_4 групп составляют 95 и 96. Разница между ними мала. Можно сказать, что молекулярная масса безводного фосфата церия $(\text{Ce}(\text{PO}_4)_x(\text{HPO}_4)_y)$ составит $140 + 95 \cdot 1,33 \approx 266,35$. До 300 °С очевидно теряется вода, которая составляет 10% массы. Значит, с учетом воды она составит 295,95. А величина n составляет $1,64 ((295,95 - 266,35)/18 = 1,64)$ Значит 1 моль содержит $295,95 \cdot 1,4/1000 = 0,414$ HPO_4 групп (это и есть y). То есть итоговая формула $\text{Ce}(\text{PO}_4)_{0,92}(\text{HPO}_4)_{0,41} \cdot 1,64\text{H}_2\text{O}$. Можно уточнить массу, тогда цифры чуть подрастут до 0,415 и 1,65. Но это — не принципиально.

Отрицательный заряд анионов равен 3,575. То есть фосфат содержит 57,5% четырёхвалентного и 42,5% трёхвалентного церия.

Тогда полная формула фосфата церия имеет вид:



Полученный фосфат церия обладает ионообменной ёмкостью из-за наличия HPO_4^{2-} групп, а схемы процессов происходящих при нагревании фосфата церия можно записать следующим образом:

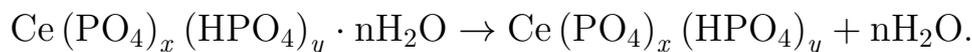


2. Запишем выражение для молярной массы нашего фосфата:

$$M = 140 + 95x + 96y + 18n,$$

$$1,4 \cdot 10^{-3} \cdot (140 + 95x + 96y + 18n) = y.$$

Исходя из молекулярной формулы фосфата, очевидно, что в первый этап нагревания фосфата от него отрываются молекулы воды:



Тогда на основе данных термогравиметрического анализа имеем следующее уравнение:

$$(140 + 95x + 96y + 18n) \cdot 0,1 = n \cdot 18.$$

Теперь имеем итоговую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1,33 \\ 1,4 \cdot 10^{-3} \cdot (140 + 95x + 96y + 18n) = y \\ (140 + 95x + 96y + 18n) \cdot 0,1 = n \cdot 18 \end{cases}$$

Решим её:

$$\begin{cases} x = 1,33 - y \\ (140 + 95x + 96y + 18n) = \frac{y}{\frac{1,4 \cdot 10^{-3}}{n \cdot 18}} \\ (140 + 95x + 96y + 18n) = \frac{y}{0,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0,252n \\ x = 1,33 - 0,252n \\ 140 + 95(1,33 - 0,252n) + 96 \cdot 0,252n + 18n = 180n \end{cases}$$

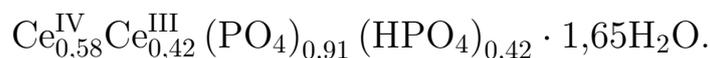
$$\begin{cases} n \approx 1,65 \\ y \approx 0,42 \\ x \approx 0,91 \end{cases}$$

Тогда фосфат церия имеет формулу: $\text{Ce}(\text{PO}_4)_{0,91} (\text{HPO}_4)_{0,42} \cdot 1,65\text{H}_2\text{O}$. В исходных реагентах степень окисления церия была +4, также в условии задачи сказано, что в ходе синтеза фосфата церия протекает окислительно-восстановительная реакция, значит, в полученном фосфате есть как Ce (IV), так и Ce (III), его соотношение можно определить из условия электронейтральности:

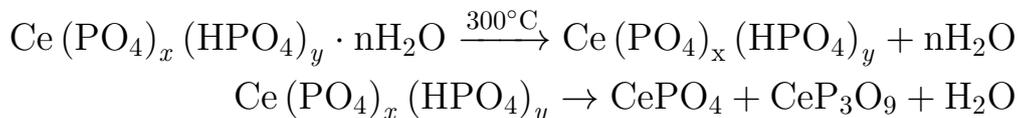
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x + 3y = 0,91 \cdot 3 + 0,42 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,57 \\ y = 0,43 \end{cases}$$

Тогда полная формула фосфата церия имеет вид:



Полученный фосфат церия обладает ионообменной ёмкостью из-за наличия HPO_4^{2-} групп, а схемы процессов происходящих при нагревании фосфата церия можно записать следующим образом:



Критерии

1. Полный балл ставится, если была правильно составлена система уравнений и установлена формула фосфата церия (с учётом соотношения между Ce (IV) и Ce (III)) и верно написаны схемы термического разложения фосфата церия.

2. Половина баллов ставится за расчёт формулы гидратированного фосфата.

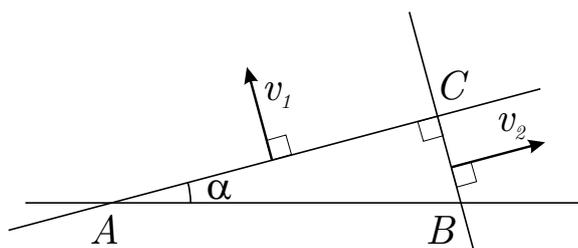
Задача 4. Площадь треугольника в движущихся прямых

Прямоугольный треугольник с углом α образован тремя прямыми. В некоторой системе отсчёта прямые, отрезки которых образуют катеты, движутся со скоростями v_1 и v_2 , направленными перпендикулярно этим прямым. Прямая, отрезок которой образует гипотенузу, покоится в этой системе отсчёта.

(1) Определить скорость изменения длины гипотенузы треугольника.

(2) Определить скорость удаления точки A от точки B .

(3) Определить, чему равна площадь треугольника ΔABC через время τ после начала движения, если известно, что в начале движения все прямые пересекались в одной точке.



Возможное решение

Вопрос 1.

1. Длина гипотенузы изменяется за счёт перемещения точки A и точки B со скоростями:

$$v_A = \frac{v_1}{\sin \alpha}, \quad v_B = \frac{v_2}{\cos \alpha}.$$

2. Длина гипотенузы зависит от времени как:

$$AB = \tau (v_A + v_B) = \tau \left(\frac{v_1}{\sin \alpha} + \frac{v_2}{\cos \alpha} \right).$$

Вопрос 2.

1. Точки A и точки B движутся со скоростями в противоположные стороны:

$$v_A = \frac{v_1}{\sin \alpha}, \quad v_B = \frac{v_2}{\cos \alpha}.$$

2. Скорость точки A относительно точки B равна:

$$v_A^{(отн)} = v_A + v_B = \frac{v_1}{\sin \alpha} + \frac{v_2}{\cos \alpha}.$$

Вопрос 3.

1. Длины катетов зависят от времени:

$$AC = \frac{v_1 \tau}{\operatorname{tg} \alpha} + v_2 \tau, \quad BC = v_2 \tau \operatorname{tg} \alpha + v_1 \tau.$$

2. Площадь треугольника выражается через произведение его катетов:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{\tau^2}{2} (v_1 \operatorname{ctg} \alpha + v_2) (v_2 \operatorname{tg} \alpha + v_1) = \\ &= \frac{\tau^2}{2} (2v_1 v_2 + v_1^2 \operatorname{ctg} \alpha + v_2^2 \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned}$$

Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Правильно определено изменение длины катетов — 4 + 4 балла.
2. Правильно определена площадь — 1 балл.
3. Правильно определена скорость точек A и B — 4 + 4 балла.
4. Правильно определена относительная скорость — 4 балла.
5. Правильно определено изменение длины гипотенузы — 4 балла

