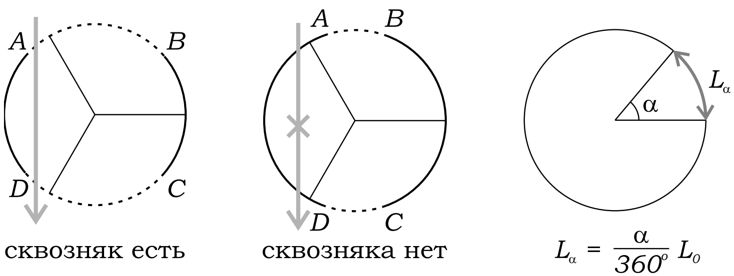
5-7 классы

1. Вход в торговый центр

Часто в торговых центрах на входе устанавливают дверь-вертушку. Дверные проёмы, показанные пунктиром, имеют одинаковую длину. Глухие стенки, показанные сплошной линией, также одинаковы. Чтобы уменьшить потери тепла в холодное время года, двери проектируют так, чтобы воздух не мог напрямую проходить через такую дверь и создавать сквозняк (см. рис.).

В торговом центре планируется установить дверь-вертушку с тремя перегородками так, чтобы ширина дверных проёмов была максимальна. Определите, во сколько раз для такой двери-вертушки общая длина дверных проёмов $L_{\text{проёмы}}$ (общая длина участков AB и CD, отмеченных пунктиром) меньше общей длины глухих стенок $L_{\text{стенки}}$ (общей длины участков BC и AD, отмеченных сплошной линией).



Справочные данные

- Полный угол поворота двери вокруг своей оси равен 360°.
- Длина части окружности с углом α (см. рис.) выражается через длину всей окружности:

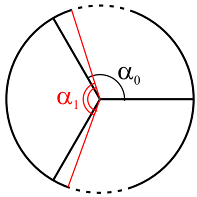
$$L_\alpha = \frac{\alpha}{360^\circ} L_0,$$

где α измеряется в градусах, а L_0 — длина всей окружности.

Требования к ответу
В поле ответа введите отношение общей длины глухих стенок к общей длине дверных проёмов $\frac{L_{\text{стенки}}}{L_{\text{проёмы}}}$ в виде числа, округлив до целых, а в решении покажите, что для выбранного типа двери общая длина дверных проёмов максимальна.

Возможное решение

1. Введём обозначения, показанные на рисунке.



2. Определим угол между перегородками в двери-вертушке:

$$\alpha_0 = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

3. Сквозняка не будет, если длина глухой стенки не меньше длины части окружности с углом α_0, т.е.

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_0.$$

4. Глухие стенки, как и дверные проёмы, одинаковы, поэтому общая длина одной глухой стенки и одного дверного проёма равна половине длины всей окружности:

$$\frac{L_{\text{проёмы}}}{2} + \frac{L_{\text{стенки}}}{2} = \frac{L_0}{2}.$$

Чтобы длина дверных проёмов была максимальна, длина глухих стенок должна быть минимальна.

5. Чтобы длина глухих стенок была минимальна, угол α_1 должен совпадать с углом α_0. Получаем, что общая длина глухих стенок равна:

$$L_{\text{стенки}} = \frac{2\alpha_0}{360^\circ} L_0 = \frac{2}{3} L_0.$$

6. Для дверных проёмов остаётся:

$$L_{\text{проёмы}} = L_0 - L_{\text{стенки}} = \frac{1}{3} L_0.$$

7. Получаем искомое отношение:

$$\frac{L_{\text{стенки}}}{L_{\text{проёмы}}} = \frac{2L_0/3}{L_0/3} = 2.$$

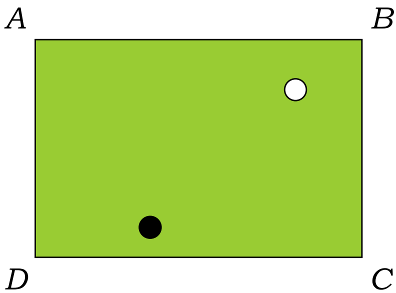
Ответ: 2.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 5 баллов.
2. Определён угол между перегородками — 5 баллов.
3. Определены возможные значения угла α_1 или длина одной глухой стенки — 6 баллов.
4. Определено условие максимальности $L_{\text{проёмы}}$ — 9 баллов.
5. Получен верный ответ — 5 баллов.

2. Бильярд

На бильярде установлены два шара: белый и черный. Требуется так ударить по чёрному шару, чтобы он, отразившись от борта AB, а затем от борта BC попал в белый шар. Определить направление, в котором необходимо наносить удар по чёрному шару для достижения этой цели.



Требования к решению

В решении приведите рисунок с указанием, как должен двигаться чёрный шар, и обоснуйте этот рисунок.

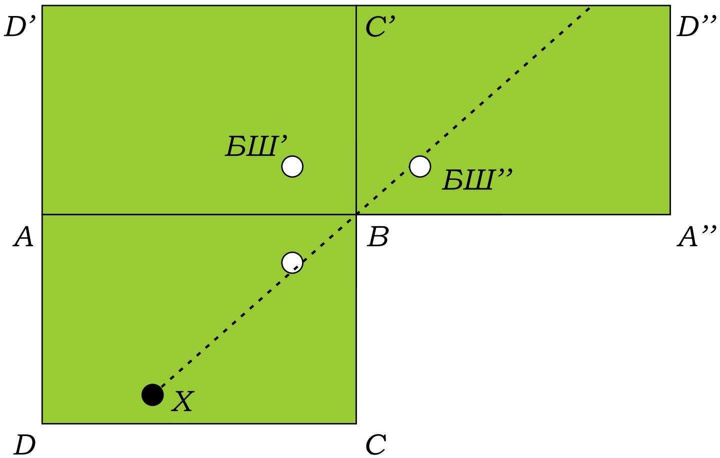
Решение может быть создано с помощью текстового редактора или разборчиво написано от руки и отсканировано с разрешением не менее 300 DPI. Решение (в том числе чертежи и рисунки) должно быть выполнено шрифтами черного или синего цвета или ручкой синего или черного цвета. Решения принимаются в файлах форматов PDF, JPEG. Нельзя указывать в решении фамилию, имя, отчество участника. Нельзя делать в решении пометки, не относящиеся к заданию Олимпиады.

Возможное решение

1. При решении этой задачи мы будем рассматривать самое простое движение шара (т.е. не будем учитывать трение, вращение и т.п. явления). В этом случае движение шара после соударения с бортом

можно рассматривать как зеркальное отражение: угол отражения равен углу падения.

2. Представим, что вместо бортов стола AB и BC стоят плоские зеркала. Тогда движение шара в зеркале после удара о борт (зеркало) будет продолжением прямолинейного движения шара до удара.



3. Если решение существует, то прямая соединяющая черный шар и образ белого шара *БШ"* должна проходить через AB, а потом BC', т.е проходить левее прямой XB (где X — это черный шар).

4. Так как белый шар находится левее прямой XB, то на втором образе, образ белого шара *БШ"* будет правее, а значит нельзя провести прямую через чёрный шар и образ белого шара *БШ"* так, чтобы она проходила левее прямой XB.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет или построение не аргументировано (не построена модель) — 5 баллов.

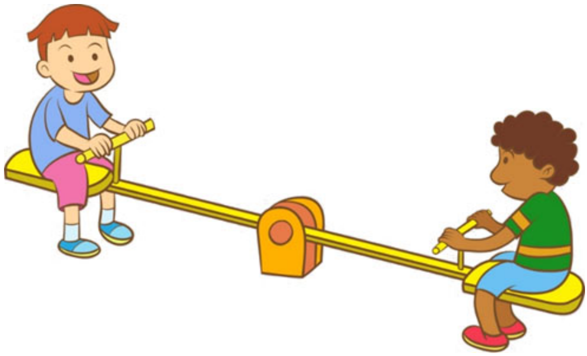
2. Приведена аналогия с отражением света или есть ссылка на свойства упругого удара — 5 баллов.

3. Выполнено построение изображения белого шара в бортах стола или аналогичное построение для чёрного шара — 10 баллов (по 5 баллов на построение каждого изображения).

4. Проведена прямая XB или аналогичная прямая — 5 балла.

3. Качели

На сиденьях качелей сидят дети — Лёша и Ваня (см. рис.). Масса Вани — 40 кг, а Лёша в полтора раза тяжелее Вани. Общая длина качелей 4 м. Где находится точка опоры, если качели находятся в состоянии равновесия? Массой качелей можно пренебречь.



Требования к ответу
Определите расстояние от края качели, на котором сидит Ваня, до точки опоры в метрах и запишите в виде числа, округлив до десятых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Пусть плечи рычага — L_1 и L_2, а длина всего рычага — L.

2. Согласно правилу рычага (правило моментов) для положения равновесия можно записать:

$$F_1 \cdot L_1 = F_2 \cdot L_2.$$

3. Кроме того, очевидно, что $L_1 + L_2 = L$.

4. Выражаем длину одного плеча качелей через длину другого плеча и подставляем в правило рычага:

$$L_1 = L - L_2 \Rightarrow F_1 (L - L_2) = F_2 L_2 \Rightarrow L_2 = \frac{F_1}{F_1 + F_2} L.$$

5. Учитывая, что силы тяжести $F_1 = m_1 g$, $F_2 = m_2 g$, где m_1 и m_2 — массы детей, а g —величина ускорения свободного падения, запишем:

$$L_2 = L\frac{m_1 g}{(m_1 + m_2)\, g} = L\frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1{,}6 \text{ м}.$$

6. Определяем второе плечо рычага: $L_1 = L - L_2 = 2{,}4$ м.

Ответ: 2,4.

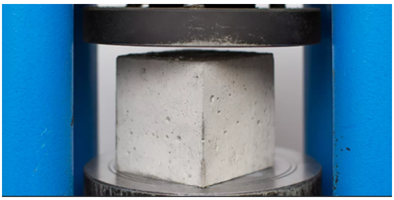
Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 5 баллов.
2. В решении приведено правило рычага (правило моментов) — 10 баллов.
3. В решении указана связь между плечами рычага — 5 баллов.
4. В решении определено расстояние от Вани до точки опоры рычага — 10 баллов.

4. Испытания прочности бетона

Прочность бетона является важнейшей характеристикой этого строительного материала. Её необходимо учитывать при проектировании конструкций зданий, эстакад или путепроводов. Для испытания бетона на прочность из него изготавливают кубики размером 20 см $\times$ 20 см $\times$ 20 см. Затем кубики помещают под пресс и постепенно увеличивают силу, действующую на кубик. При определённой величине прикладываемой силы кубик начинает разрушаться. Далее, определяется минимальное давление, при котором кубик начинает разрушаться.

Известно, что при сжатии под прессом кубик некоторой марки бетона начал разрушаться при действии на него силы 400 кН. Определите минимальное давление, при котором бетон этой марки начнет разрушаться. При решении считайте, что площадь поверхности кубика меньше площади пластины пресса (см. рис.).



Образец до испытания

Образец после испытания

Справочные данные

• Давлением называется физическая величина, равная отношению силы, действующей под прямым углом на участок поверхности, к площади этого участка поверхности.

• Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.

• Для удобства часто используются приставки, обозначающие степени десяти: для 1000 единиц используют приставку «кило» (в 1 килограмме — 1000 граммов), для 1000000 единиц — приставку «мега». Приставка «кило» обозначается маленькой буквой «к», а приставка «мега» — большой буквой «М».

Требования к ответу

Определите величину минимального давления в мегапаскалях (МПа), при котором бетон данной марки начнет разрушаться, и запишите в виде числа, округлив до целых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Сторона кубика равна $a = 0{,}2$ м. Минимальная сила, под действием которой кубик начинает разрушаться, $F = 400$ кН.

2. Давление, оказываемое на кубик, можно вычислить так:

$$P = \frac{F}{S},$$

где $S = a \cdot a = 0{,}04$ м^2 — площадь стороны кубика, к которой прикладывается сила F.

3. Давление будет минимальным, если сила, при которой разрушается кубик будет минимальной. Для величины давления получаем:

$$P = \frac{F}{a^2} = \frac{400000}{0{,}04} = 10000000 = 10^7\text{Па} = 10\text{МПа}.$$

Ответ: 10.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 5 баллов.

2. В решении указана величина силы, действующей на грань кубика — 5 баллов.

3. В решении указана площадь грани кубика — 5 баллов.

4. В решении указано условие, при котором давление минимально — 5 баллов.

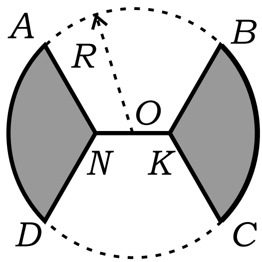
5. В решении определена величина давления в паскалях (5 баллов) и верно переведена в мегапаскали (5 баллов).

8-9 классы

1. Вход в торговый центр

Часто в торговых центрах на входе устанавливают дверь-вертушку. Чтобы минимизировать потери тепла в холодное время хода, двери проектируют таким образом, чтобы воздух не мог напрямую проходить через такую дверь и создавать сквозняк.

В торговом центре планируется установить симметричную дверь-вертушку, схематично показанную на рисунке (вид сверху). Угол $\angle AON = 45°$, а угол $\angle AND = 120°$. Внутренний радиус кругового пространства равен $R = 2$ метра. На участке NK планируется разместить рекламный плакат. Определите, его максимальную ширину.



Требования к ответу

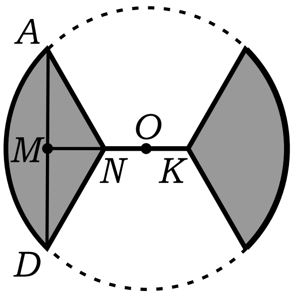
Определите максимальное значение ширины плаката в метрах и запишите ответ в виде числа, округлив до сотых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Из симметрии двери относительно прямой NK следует, что $\angle AOD = 90°$.

2. По теореме Пифагора для треугольника ΔAND

$$AD = R\sqrt{2}.$$



3. Обозначим за M середину отрезка AD, тогда

$$AM = MD = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

4. Из теореме Пифагора для треугольника ΔAOM

$$OM = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

5. Из треугольника ΔAMN находим катет

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{3}AM = \frac{\sqrt{6}}{6}R.$$

6. Длина отрезка ON:

$$ON = OM - MN = \frac{\sqrt{2}}{2}R - \frac{\sqrt{6}}{6}R.$$

7. Максимальная ширина плаката — длина отрезка NK:

$$NK = 2ON = R\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

8. Максимальная ширина плаката после подстановки числовых данных:

$$NK = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 1{,}20 \text{ м.}$$

<u>Ответ</u>: 1,20.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 10 баллов.

2. Найден $\angle AOD$ или аналогичный — 10 баллов.

3. Определена длина OM или аналогичного отрезка — 10 баллов.

4. Определена длина MN или аналогичного отрезка — 20 баллов.

5. Получено итоговое выражение для NK в общем виде и получен верный числовой ответ — 10 баллов.

5а. Определена длина NK (по действиям) и получен верный числовой ответ, точность ответа не снизилась за счёт округления, — 10 баллов.

5б. Определена длина NK (по действиям) и получен числовой ответ, точность ответа снизилась за счёт округления, — 6 баллов.

2. Азотная кислота

Лаборант Лисохвостов не смог подобрать необходимую концентрацию азотной кислоты, чтобы при ее взаимодействии с марганцем образовывался только оксид азота (IV). Как бы он ни пытался, всегда получалась смесь NO_2 и NO. Оставив попытки подобрать концентрацию азотной кислоты и собрав 500 мл смеси NO_2 и NO, Лисохвостов запустил в реакционный сосуд еще 250 мл O_2. Дождавшись окончания реакции, он обнаружил, что общий объем системы составил $V_{total} = 650$ мл. Напишите в решении уравнения всех протекающих реакций, а также определите составы исходной и полученной газовых смесей в объемных процентах.

Требования к ответу
Объёмную долю NO в смеси до добавления кислорода запишите в виде числа, округлив до целых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Запишем уравнения протекающих процессов:
(а) $Mn + 4HNO_3$(конц.) $\rightarrow Mn(NO_3)_2 + 2NO_2 + 2H_2O$.
(б) $3Mn + 8HNO_3$(разб.) $\rightarrow 3Mn(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O$.
(в) $2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$

2. Пусть X — объёмная доля NO. При добавлении O_2 к смеси оксидов азота NO окисляется до NO_2, что приводит к частичному уменьшению объема газов. Из двух молекул NO и одной молекулы O_2 образуются две молекулы NO_2, таким образом, уменьшение объема составляет $500 \cdot X/2$.

3. Объем итоговой газовой смеси равен $500+250-500\cdot X/2 = 650$.

4. Решая это уравнение, получаем $X = 40\%$. Объемная доля NO_2 — 60%.

5. Расчет может быть проще — из стехиометрии реакции (в) при уменьшении объема на V расходуется $2V$ NO.

Ответ: 40.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 3 балла.

2. За реакцию (а) — 3 балла.

3. За реакцию (б) — 3 балла.

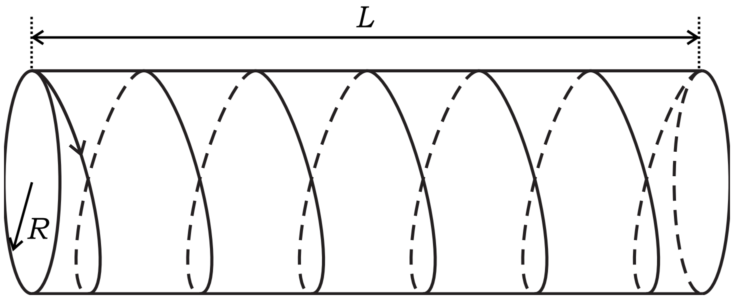
4. За реакцию (в) — 1,8 балла.

5. За определение объёмной доли NO — 3,6 балла.

6. За определение состава финальной смеси (23,1% O_2 и 76,9% NO_2) — 3,6 балла.

3. Муравей по цилиндру

Муравей ползёт по боковой поверхности цилиндра длиной $L = 47{,}1$ см и радиусом $R = 1$ см, двигаясь по винтовой линии с постоянным «шагом винта» (см. рис.). Сколько полных оборотов вокруг оси цилиндра совершит муравей к моменту, когда он проползёт от одного торца цилиндра до другого, если пройденный муравьём путь равен $S = 78{,}5$ см?



Справочные данные
При расчётах считать $\pi = 3{,}14$.

Требования к ответу
Определите число полных оборотов вокруг оси цилиндра, которые совершит муравей, и запишите в ответ в виде целого числа без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Скорость движения муравья в направлении вдоль оси цилиндра равна

$$v_x = \frac{L}{t},$$

где t — время движения муравья.

2. Модуль скорости муравья:

$$v = \frac{S}{t}.$$

3. Значит, скорость движения муравья в плоскости, параллельной торцу цилиндра:

$$v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2} = \frac{\sqrt{S^2 - L^2}}{t}.$$

4. С другой стороны,

$$v_y = \frac{2\pi R n}{t},$$

где n — число витков винтовой линии.

5. Объединяя два последних выражения, находим число оборотов, которое сделает муравей вокруг оси цилиндра:

$$n = \frac{v_y t}{2\pi R} = \frac{\sqrt{S^2 - L^2}}{2\pi R}.$$

6. Подставляя числа, получаем ответ:

$$n = \frac{\sqrt{(78{,}5 \cdot 10^{-2})^2 - (41{,}7 \cdot 10^{-2})^2}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 10.$$

<u>Ответ</u>: 10.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 3 балла.

2. Получена скорость движения муравья в направлении вдоль оси цилиндра — 2,4 балла.

3. Получен модуль скорости муравья — 2,4 балла.

4. Выражена скорость v_y движения муравья в плоскости, параллельной торцу цилиндра, через модуль скорости v и скорость движения муравья в направлении вдоль оси цилиндра v_x — 4,2 балла.

5. Получено выражения для числа оборотов n и подставлены численные значения — 6 баллов.

4. Вода со льдом

Физик Александр решил провести эксперимент. Он взял 2022 образца — 1011 капель воды и 1011 кусочков льда. Все эти образцы имели одинаковые массы $m = 1$ г.

Температура первой капли воды была равна $t_+ = 0{,}05$ °C, а температура каждой следующей капли воды была выше температуры предыдущей капли на $\Delta t = 0{,}05$ °C.

Температура первого кусочка льда была равна $t_- = -0{,}05$ °C, а температура каждой следующей льдинки была ниже температуры предыдущей на ту же величину $\Delta t = 0{,}05$ °C.

Александр поместил все образцы в калориметр. Какая масса воды в жидком состоянии окажется в калориметре после установления в нём теплового равновесия?

Теплоёмкостью калориметра и потерями теплоты пренебречь.

Справочные данные

Удельная теплоемкость жидкой воды $c_\text{в} = 4200$ Дж/(кг· °C)
Удельная теплоемкость льда $c_\text{л} = 2100$ Дж/(кг· °C)
Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг.

Требования к ответу

Ответ выразите в граммах и запишите в виде числа, округлив до целых.

Возможное решение

1. Количество теплоты, которое отдадут все образцы с жидкой водой при остывании до 0 °C, равно

$$Q^+ = c_\text{в} m \left(\Delta t + 2\Delta t + \cdots + n\Delta t\right) = c_\text{в} m \frac{(n+1)\,n}{2}\Delta t,$$

где $n = 1011$.

2. Количество теплоты, которое отдадут все образцы со льдом при нагревании до 0 °C, равно

$$Q^{-} = c_{\text{л}} m \left(\Delta t + 2\Delta t + \dots + n\Delta t\right) = c_{\text{л}} m \frac{(n+1)\, n}{2} \Delta t,$$

где $n = 1011$.

3. Видно, что $Q^{+} > Q^{-}$, поэтому после нагревания льда до 0 °C часть льда обязательно растает. Определим запас теплоты, который может пойти на плавление некоторой части льда:

$$\Delta Q = Q^{+} - Q^{-} = \left(c_{\text{в}} - c_{\text{л}}\right) m \frac{(n+1)\, n}{2} \Delta t = 53714{,}43 \text{ Дж}$$

4. Проверим, сколько потребуется количества теплоты, чтобы растопить весь лёд в калориметре:

$$Q_{\text{плав}} = \lambda m n = 337674 \text{ Дж} < \Delta Q,$$

следовательно, лёд растает не весь.

5. Запишем уравнение теплового баланса и найдём массу M растаявшего льда:

$$\Delta Q = Q_{\text{плав1}} \Rightarrow \left(c_{\text{в}} - c_{\text{л}}\right) m \frac{(n+1)\, n}{2} \Delta t = \lambda M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \left(c_{\text{в}} - c_{\text{л}}\right) m \frac{(n+1)\, n}{2\lambda} \Delta t \approx 0{,}161 \text{ кг}.$$

6. После установления теплового равновесия в калориметре масса жидкой воды в нём будет равна:

$$m_{\text{в}} = M + m \cdot n = 161 + 1 \text{ г} \cdot 1011 = 1172 \text{ г}$$

<u>Ответ</u>: 1172.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 4 балла.

2. Получено количество теплоты Q^+, которое отдадут все образцы с жидкой водой при остывании до 0 °C — 4 балла.

3. Получено количество теплоты Q^-, которое получат все образцы со льдом при их нагревании до 0 °C — 4 балла.

4. Проведено сравнение Q^+ и Q^- и сделан вывод о том, что в калориметре лёд растает не весь — 5,6 балла.

5. Записано уравнение теплового баланса, получена масса растаявшего льда, получен ответ в общем виде и подставлены численные значения — 6,4 балла.

10-11 классы

1. Оцинковка ведра

Для того, чтобы оцинковать железное ведро цилиндрической формы высотой $h = 40$ см и радиусом дна $r = 10$ см, его поместили в раствор сульфата цинка и подключили к отрицательному полюсу внешнего источника постоянного тока. Сила тока составила $I = 100$ А. Какой величины достигнет толщина слоя цинка через $\tau = 40$ минут? Плотность цинка составляет $\rho = 7{,}15$ г/см^3. При расчётах считайте, что постоянная Фарадея $\Phi = 96485$ Кл/моль, а $\pi = 3{,}14$. Считайте, что при оцинковке покрытие наносится равномерно.

Требования к ответу
Толщину слоя цинка выразите в микронах и представьте в виде числа, округлив до целых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Площадь дна $S_b = 2\pi r^2$, площадь боковой стенки $S_w = 4\pi rh$, где r и h — радиус дна и высота ведра.

Общая площадь поверхности составляет $S = 5652$ см^2.

2. Заряд, протекший через систему за 40 мин (2400 сек) составил $I \cdot \tau = 240000$ Кл

3. Масса цинка, выпавшая на поверхности ведра составляет $m(\text{Zn}) = \dfrac{M(\text{Zn})}{n \cdot \Phi} \cdot I \cdot \tau = \dfrac{65{,}4}{2 \cdot 96485} \cdot 408000 = 81{,}3$ г

4. Объем выделившегося цинка равен $\dfrac{m}{\rho} = 138{,}3/7{,}15 = 11{,}4$ см^3.

5. Толщина слоя равна $d = \dfrac{m}{\rho \cdot S} = 20{,}1 \approx 20$ мкм.

Ответ: 20.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 5 баллов.

2. Есть арифметическая ошибка в расчётах — минус 2 балла.

3. Не учтена внутренняя поверхность ведра и нет указаний о том, что рассматривает только наружная оцинковка — минус 3 балла.

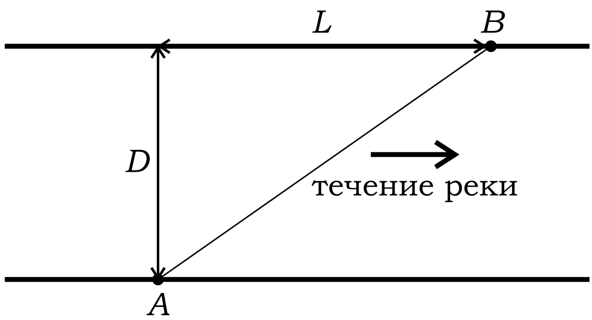
4. Не учтена оцинковка дна ведра — минус 5 баллов.

5. Неверный заряд ионов цинка — минус 5 баллов.

6. Неверная формула для площади поверхности ведра — минус 3 балла.

2. Пересечение реки на катере

Катер курсирует между двумя пристанями A и B, расположенными так, как показано на рисунке. Ширина реки $D = 600$ метров, а $L = 800$ метров. Известно, что скорость катера в $n = 2$ раз больше скорости реки.



(1) Найти, во сколько раз время движения катера от пристани A к пристани B меньше, чем время, которое затрачивает катер на обратный путь. Считайте, что катер движется относительно берега по прямой, соединяющей пристани, а временем разгона и торможения катера у пристаней можно пренебречь.

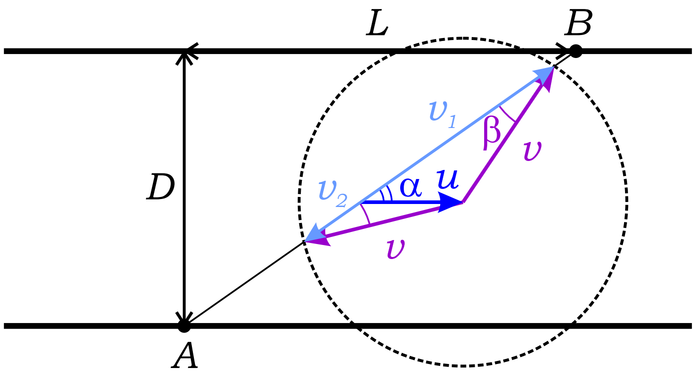
(2) При каком максимальном значении n катер не сможет преодолеть расстояние между пристанями, двигаясь от пристани B к пристани A по прямой?

<u>Требования к ответу</u>

Ответ на первый вопрос задачи представьте в виде числа, округлив с точностью до десятых.

Возможное решение

1. Сделаем построение (окружность с центром в конце вектора $\vec{u}$ и радиусом v) и введём обозначения, указанные на рисунке.



2. Проекция скорости катера относительно берега при движении из точки A в точку B:

$$v_1 = v\cos\beta + u\cos\alpha.$$

3. Проекция скорости катера относительно берега при движении из точки B в точку A:

$$v_2 = v\cos\beta - u\cos\alpha.$$

4. Расстояние между точками A и B:

$$AB = \sqrt{L^2 + D^2}.$$

5. Время движения из A в B:

$$\tau_{AB} = \frac{\sqrt{L^2 + D^2}}{v\cos\beta + u\cos\alpha}.$$

6. Время движения из B в A:

$$\tau_{BA} = \frac{\sqrt{L^2 + D^2}}{v\cos\beta - u\cos\alpha}.$$

7. Отношение времён:

$$\frac{\tau_{BA}}{\tau_{AB}} = \frac{v\cos\beta + u\cos\alpha}{v\cos\beta - u\cos\alpha}.$$

8. По теореме синусов:

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{u}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}, \cos\beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}.$$

9. Отношение времён:

$$\frac{\tau_{BA}}{\tau_{AB}} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha}.$$

10. Выразим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ через данные задачи:

$$\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + D^2}} = \frac{4}{5}, \qquad \sin\alpha \frac{D}{\sqrt{L^2 + D^2}} = \frac{3}{5}.$$

11. Итоговое выражение для отношения времён:

$$\frac{\tau_{BA}}{\tau_{AB}} = \frac{\sqrt{n^2 - \frac{9}{25}} + \frac{4}{5}}{\sqrt{n^2 - \frac{9}{25}} - \frac{4}{5}} \approx 2{,}4.$$

12. Время на движение из точки B в точку A обращается в бесконечность при $n = 1$.
<u>Ответ</u>: (1) 2,4, (2) 1.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 5 баллов.

2. Правильно найдена проекция скорости катера относительно берега на прямую AB при движении в каждую сторону — $4 + 4 = 8$ баллов.

3. Верно определено расстояние между точками A и B — 1 балл.

4. Верно определены времена движения катера и получено итоговое отношение времён движения — 5 баллов.

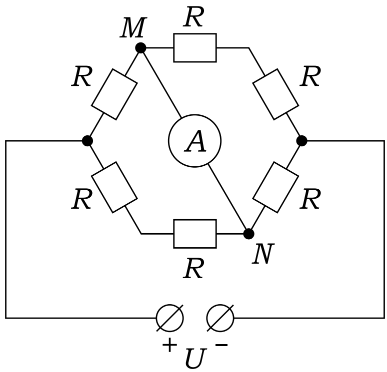
5. Определена связь между углами α и β — 6 баллов.

6. Получено итоговое выражение и дан числовой ответ — 2 балла.

7. Дан ответ и обоснование на вторую часть вопроса — 3 балла.

3. Идеальный амперметр в электрической цепи

В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, сопротивления всех сторон шестиугольника одинаковы и равны $R = 1$ Ом. Напряжение идеальной батарейки $U = 12$ В. Идеальный амперметр подключили между точками M и N. Какую силу тока показывает идеальный амперметр?

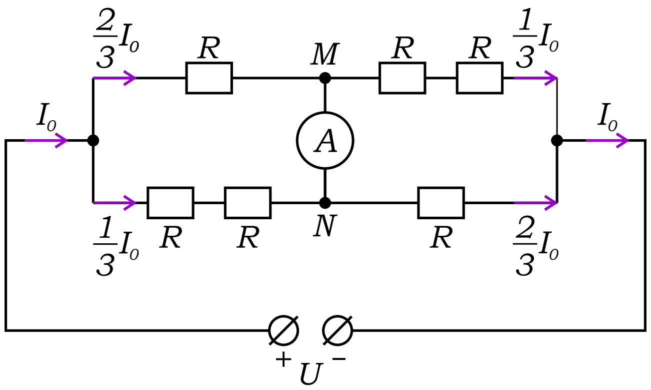


Требования к ответу

Силу тока выразите в амперах и представьте в виде числа, округлив с точностью до целых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Поскольку амперметр — идеальный, то его сопротивление равно нулю. Это означает, что точки M и N закорочены, то есть напряжение между этими точками равно нулю. Схему электрической цепи можно перерисовать так:



2. Сопротивление левой части цепи (слева от MN), содержащей параллельно соединённые ветви R и $2R$, обозначим как R_1:

$$R_1 = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2R}{3}.$$

3. Сопротивление правой части цепи (справа от MN), содержащей параллельно соединённые ветви R и $2R$, обозначим как R_2:

$$R_2 = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2R}{3} = R_1.$$

4. Полное сопротивление всей электрической цепи:

$$R_{\text{полн}} = R_1 + R_2 = \frac{4R}{3}.$$

5. Полный электрический ток I_0 в цепи:

$$I_0 = \frac{U}{R_{\text{полн}}} = \frac{3}{4}\frac{U}{R}.$$

6. Ток через идеальный амперметр течет от точки M к точке N и равен:

$$I_A = \frac{I_0}{3} = \frac{U}{4} = 3 \text{ А}.$$

Ответ: 3.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 5 баллов.

2. Правильно перерисована схема электрической цепи и показано направление тока через идеальный амперметр — 5 баллов.

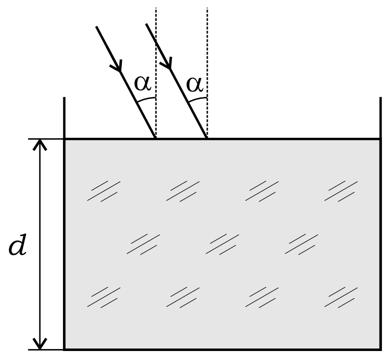
3. Получены сопротивления левой (2 балла) и правой (2 балла) частей электрической цепи, указано, что они равны (1 балл).

4. Найдено полное сопротивление цепи (3 балла) и полный ток в цепи (2 балла).

5. Получено выражение для силы тока, текущего через идеальный амперметр, (6 баллов) и подставлены численные значения (2 балла).

4. Прохождение белого света через сероуглерод

Параллельный пучок белого света падает из воздуха на горизонтальную поверхность сероуглерода, заполняющего аквариум, угол падения составляет $\alpha = 5°$ (см. рисунок). Высота слоя сероуглерода в аквариуме равна $d = 50$ см. На сколько изменится ширина пучка белого света после прохождения сероуглерода по сравнению с исходным пучком? Преломлением света в материале дна аквариума пренебречь. Аквариум достаточно широкий, чтобы пучок света выходил через дно аквариума, не касаясь его стенок.



Справочные данные

- Показатель преломления луча с длиной волны, соответствующей красному цвету, в сероуглероде $n_{кр} = 1{,}6219$.
- Показатель преломления луча с длиной волны, соответствующей фиолетовому цвету, в сероуглероде $n_{ф} = 1{,}6990$.
- Принять, что синусы и тангенсы малых углов равны самим углам, выраженным в радианной мере.
- Шириной пучка называется ширина светового пятна, которое получается при нормальном падении светового пучка на поверхность (угол падения 0°).

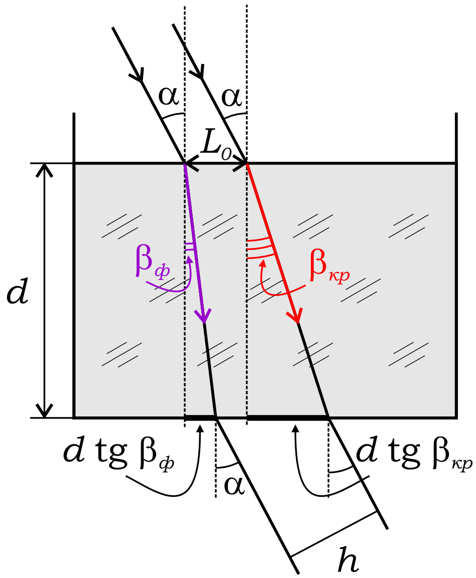
Требования к ответу:

Ответ выразите в миллиметрах и представьте в виде числа, округлив до сотых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Поскольку белый свет — это набор длин волн от красного ($\approx$ 650 нм) до фиолетового ($\approx$ 450 нм), то в сероуглероде будет наблюдаться дисперсия белого света.

2. Угол преломления красного света $\beta_{\text{кр}}$ будет наибольшим среди всех длин волн, а фиолетового $\beta_{\text{ф}}$ — наименьшим (см. рисунок).



3. Запишем закон преломления для красного и фиолетового лучей:

$$\sin\alpha = n_{\text{кр}} \sin\beta_{\text{кр}}, \qquad \sin\alpha = n_{\text{ф}} \sin\beta_{\text{ф}}$$

4. Пусть ширина проекции на поверхность жидкости исходного пучка белого света была равна L_0. Тогда ширина проекции на поверхность жидкости пучка белого света после его прохождения через сероуглерод равна:

$$L = L_0 + d\,\mathrm{tg}\,\beta_{\text{кр}} - d\,\mathrm{tg}\,\beta_{\text{ф}}.$$

5. Изменение ширины проекции на поверхность жидкости пучка белого света после прохождения через сероуглерод:

$$\Delta L = L - L_0 = d\left(\operatorname{tg}\beta_{\text{кр}} - \operatorname{tg}\beta_{\text{ф}}\right).$$

6. Воспользуемся тем, что синусы и тангенсы малых углов приближенно равны самим углам, выраженным в радианной мере. Тогда $\beta_{\text{кр}} \approx \dfrac{\alpha}{n_{\text{кр}}}$, $\beta_{\text{ф}} \approx \dfrac{\alpha}{n_{\text{ф}}}$, а ширина пучка h и ширина его проекции на поверхность жидкости связаны через величину угла падения: $h = L\cos\alpha$.

7. Изменение ширины пучка белого света после прохождения через сероуглерод:

$$\Delta h \approx \alpha d\left(\beta_{\text{кр}} - \beta_{\text{ф}}\right)\cos\alpha \approx d\cdot\alpha\left(\frac{1}{n_{\text{кр}}} - \frac{1}{n_{\text{ф}}}\right)\cos\alpha.$$

8. Подставляя в выражение в п. 6 численные значения, а также с учетом, что $\sin\alpha \approx \alpha \approx 0{,}087$, получаем окончательный ответ:

$$\Delta h \approx 50\cdot 0{,}087\left(\frac{1}{1{,}6219} - \frac{1}{1{,}6990}\right)\cdot 0{,}996 \approx 1{,}22 \text{ мм}.$$

Ответ: 1,22.

Критерии

1. Ответ верный, но решения нет (в загруженном файле решение отсутствует) — 5 баллов.

2. Ответ: 0 (не учтен состав белого света) — 3 балла.

3. Ответ 0,01 – 0,9 (в решении приведена правильная формула для закона преломления света, правильное определение ширины пучка, не учтено уширение пучка за счет преломления фиолетового света) — 12 баллов.

4. Ответ 6,9(70) (в решении приведён расчет размера пятна на дне аквариума вместо ширины пучка на выходе из аквариума; при расчёте угла преломления использована мера угла падения в градусах, а не в радианах) — 17 баллов.

5. Ответ 1,22 (в решении приведён расчёт размера пятна на дне аквариума вместо ширины пучка на выходе из аквариума) — 22 балла.

6. Ответ 1,22 (в решении приведён расчёт ширины пучка на выходе из аквариума) — 25 баллов.