

№1 (25 баллов)

На робототехническом соревновании на полигоне, на котором роботы соревнуются в том, какой из роботов быстрее достигнет финиша, нанесена разметка (см. *схема полигона*).

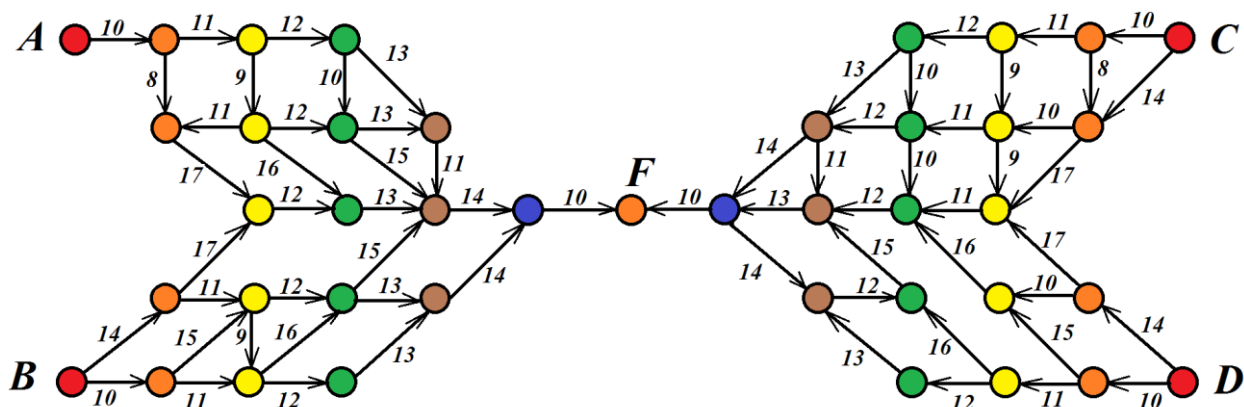


Схема полигона

Возможные зоны старта обозначены на схеме буквами *A, B, C, D*. Зона финиша обозначена буквой *F*. Робот может передвигаться по полигону только по разметке и только в направлениях, указанных на схеме стрелками. Числа на схеме указывают время в секундах, которое робот потратит на проезд по данному участку. Менять направление движения можно только на перекрёстках, обозначенных кругами.

Зона старта определяется с помощью жеребьевки. Жеребьевка проводится следующим образом: на совершенно одинаковых карточках пишут по букве, обозначающей каждую из зон старта. Все четыре карточки кладут в мешок, перемешивают и случайным образом вытаскивают из мешка три из них, вытаскивая по одной карточке за один раз. Та зона, карточка которой осталась в мешке, и есть зона старта.

А) (10 баллов) Какая из зон наиболее выгодная для старта?

Б) (10 баллов) Какое наименьшее время в секундах потребуется роботу на то, чтобы добраться из этой зоны старта до зоны финиша?

В) (5 баллов) С какой вероятностью робот проедет на текущей попытке трассу менее чем за 74 секунды, если всё будет идти согласно прогнозу, показанному на схеме полигона?

Приведите подробное решение задачи.

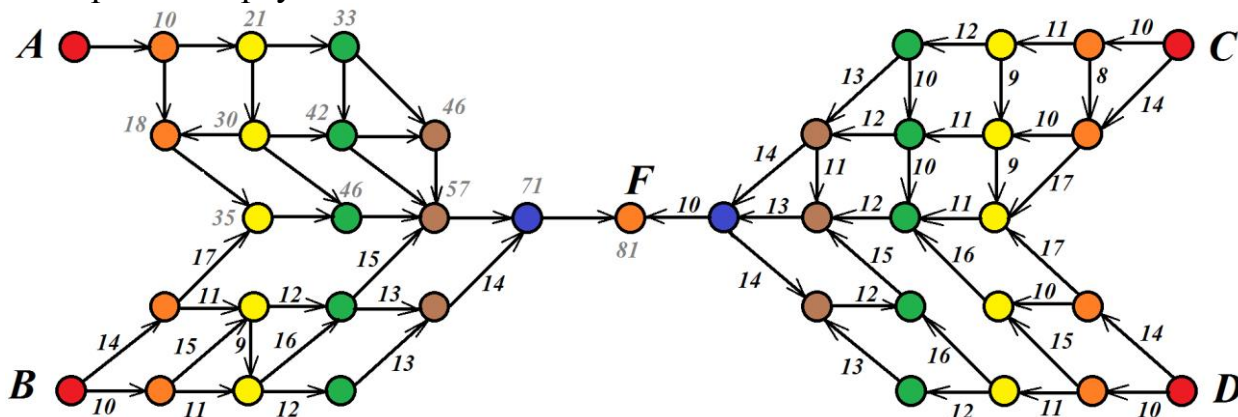
Решение

На схеме представлен направленный граф. Нам надо найти кратчайшие пути из вершин A , B , C , D в вершину F . Говоря о «кратчайшем пути», следует учитывать, что может существовать более одного пути с кратчайшей длиной (в нашем случае – минимальным временем движения), и что нас устроит любой из них.

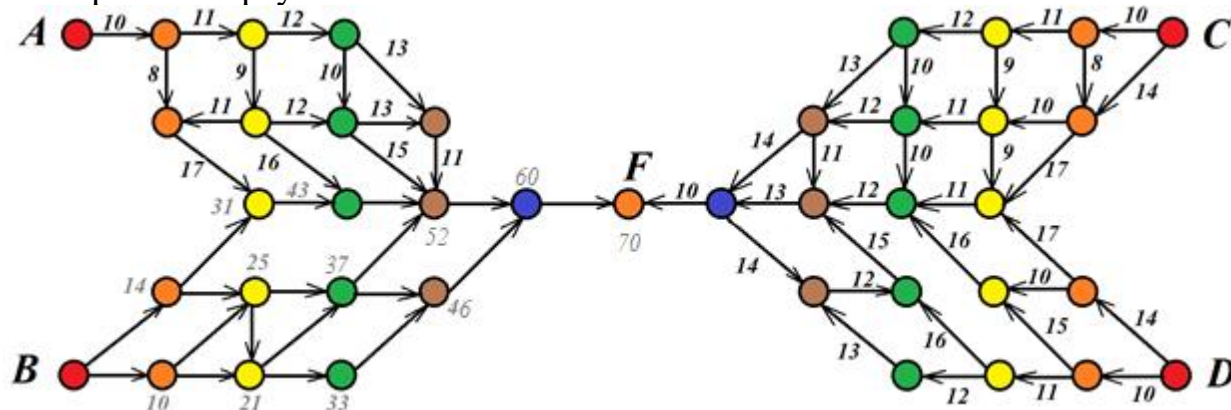
Будем перемещаться по схеме от краёв к центру, пометчая каждую вершину числом, которое указывает минимальное время (кратчайшее расстояние) от текущей вершины до точки старта. Пройдя таким образом по всем вершинам графа и пометив все вершины, мы получим в качестве метки для вершины F минимальное время, которое нужно, чтобы добраться из стартовой вершины в вершину F .

Сравнив полученное время для каждой из возможных стартовых вершин, мы определим, какая из них является более удачной для старта.

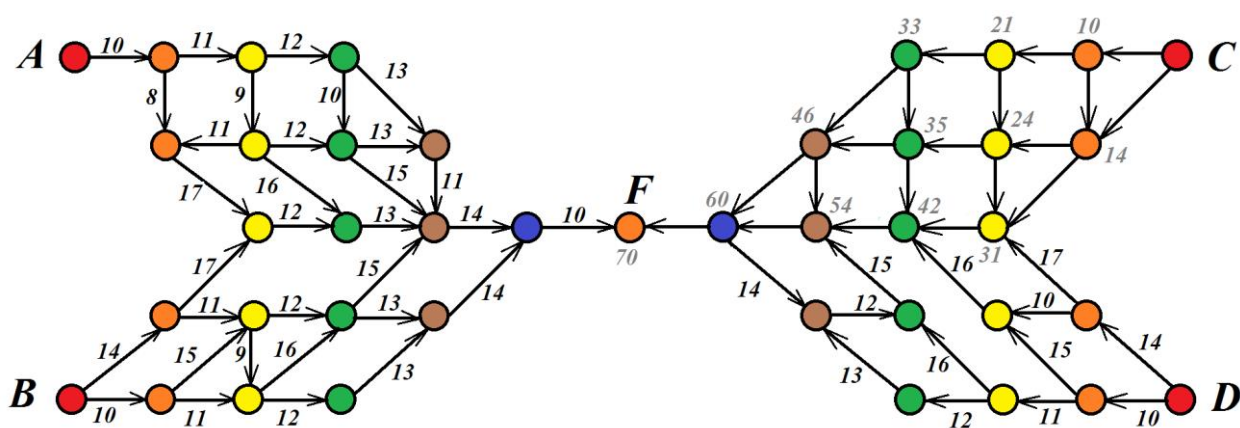
Если робот стартует из зоны A :



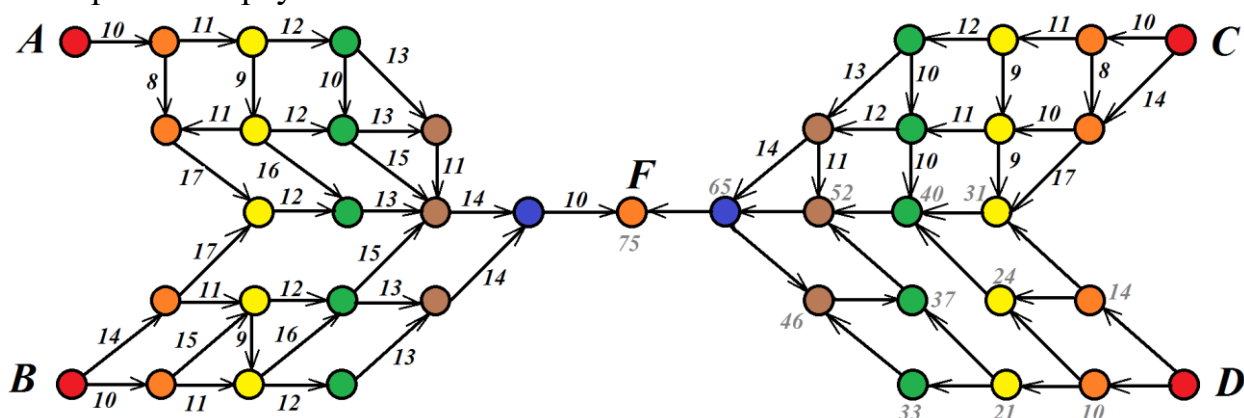
Если робот стартует из зоны B :



Если робот стартует из зоны C :



Если робот стартует из зоны **D**:



Стартовав из зоны **A**, робот может проехать трассу за 81 секунду.
 Стартовав из зоны **B**, робот может проехать трассу за 70 секунды.
 Стартовав из зоны **C**, робот может проехать трассу за 70 секунд.
 Стартовав из зоны **D**, робот может проехать трассу за 75 секунд.

Таким образом, для старты выгоднее выбрать зону **B или C**. Робот может финишировать за 70 секунды.

Нам подходят два варианта старта из четырёх. Поскольку описанный способ равносильен тому, что мы тянем наугад одну карточку, то вероятность того, что робот проедет трассу менее чем за 74 секунды будет равна:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 100\% = \frac{1}{4} \times 2 \times 100\% = 50\%$$

Ответ:

- А) выгоднее стартовать из зоны **B или C**;
- Б) Минимальное время равно 70 с;
- В) вероятность равна 50%.

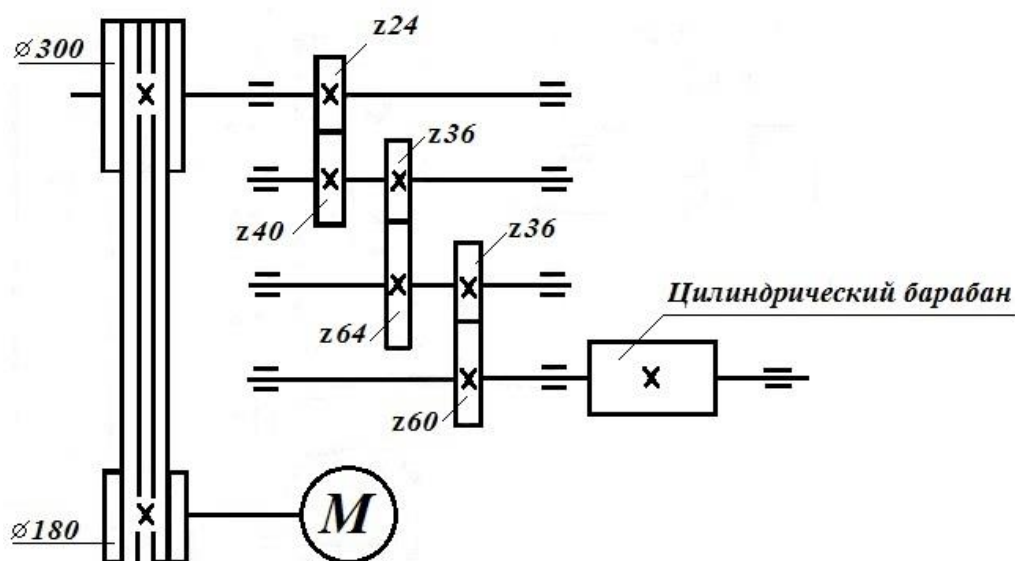
№ п/п	Критерии	Баллы
Пункт А		
1.1	Верно определены зона для старта (зона В и С). В решении присутствует верный подсчет времени проезда при старте из всех зон.	10
1.2	Дан один из двух верный ответ (зона В или С).	5
1.3	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1.4	Верно определено минимальное время проезда робота по трассе (70 с). В решении присутствует верный подсчет времени проезда при старте из всех зон (зона А 81 с, зона В 64 с, зона С 70 с, зона D 75 с)	10
1.5	Верно посчитано время проезда при старте не менее чем из одной зоны (зона А 81 с, зона В 70 с, зона С 70 с, зона D 75 с)	5
1.6	Дан верный ответ (70 с). Решение отсутствует	1
1.7	В остальных случаях	0
Пункт В		
1.8	Дан верный ответ (50%) В решении присутствует верный подсчет вероятности.	5
1.9	Дан верный ответ (50%). Решение отсутствует	1
1.10	В остальных случаях	0

№2 (25 баллов)

На робототехническом полигоне стоит тележка на 4-х колёсах. Радиус колёс тележки равен 6 см. На тележке укреплена бутылка с водой, в нижней части которой расположен кран. Если открыть кран, то из него через равные промежутки времени на полигон будут падать капли.

К тележке привязали длинную тонкую прочную невесомую нерастяжимую нить. Если потянуть за нить, то тележка поедет. Другой конец нити прикреплён к цилиндрическому барабану.

Цилиндрический барабан соединён с мотором через четырехступенчатую передачу, которая состоит из одной ступени ремённой передачи и трёх ступеней зубчатой передачи (см. кинематическая схема).



Кинематическая схема

Запускают программу, которая обеспечивает вращение оси мотора с постоянной скоростью. Кран открывают с таким расчётом, чтобы первая капля упала на полигон одновременно с запуском программы. За три минуты из крана на полигон падают 16 капель. Считайте, что капли достигают полигона мгновенно. Диаметр цилиндрического барабана равен 8 см. Расстояние между двумя соседними каплями равно 3 см 2 мм.

Определите, с какой частотой вращается ось мотора. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Считайте, что нить наматывается на барабан равномерно в один слой. Ответ дайте в оборотах в минуту, округлив результат до десятых. Приведите подробное решение данной задачи.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Решение

Поскольку нитка прикреплена к самой тележке, то ее перемещение определяется только диаметром барабана и скоростью его вращения.

Определим длину окружности барабана:

$$l = \pi \times d = \pi \times 8 \text{ см} = 8\pi \text{ (см)}$$

За 3 минуты на полигон упали 16 капель, то есть тележка проехала:

$$(16 - 1) \times 3,2 \text{ см} = 48 \text{ (см)}$$

Значит, за 1 минуту барабан повернётся на

$$\frac{48}{8\pi} \text{ оборота} : 3 = \frac{2}{\pi} \text{ (об.)}$$

Определим передаточное отношение четырёхступенчатой передачи:

$$\frac{180}{300} \times \frac{24}{40} \times \frac{36}{64} \times \frac{36}{60} = 0,6 \times 0,6 \times 0,5625 \times 0,6 = 0,1215$$

За одну минуту ось мотора сделает

$$\frac{2}{\pi} : 0,1215 = \frac{2}{\pi} \times \frac{10000}{1215} = \frac{2 \times 1000}{3,14 \times 1215} = 5,24 \dots \approx 5,2 \text{ (об.)}$$

Ответ: мотор вращается с частотой 5,2 об/мин.

№ п/п	Критерии	Баллы
2.1	Дан верный ответ (5,2 об/мин.). Дано полное верное решение: присутствуют все расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок. Записан верный ответ.	25
2.2	Представлено неполное верное решение: участник верное определил, частоту вращения барабана ($\frac{2}{\pi} \approx 0,6369 \dots$ оборота/минуту) и передаточное число зубчатой передачи (0,1215 или $\frac{10000}{1215} = \frac{2000}{243} = 8\frac{56}{243}$). Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок.	10
2.3	Представлено неполное верное решение: участник определил передаточное число зубчатой передачи (0,1215 или $\frac{10000}{1215} = \frac{2000}{243} = 8\frac{56}{243}$). Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок.	5
2.4	Решение содержит арифметические ошибки. Верная логика решения. Решение доведено до конца. Даны необходимые пояснения к решению.	5
2.5	Дан верный ответ (5,2 об/мин.). Решение отсутствует.	3
2.6	В остальных случаях	0

№3 (25 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиус каждого из колёс робота равен 5 см. Левым колесом управляет мотор **A**, правым колесом управляет мотор **B**. Колёса напрямую подсоединены к моторам (см. *схему робота*). По середине между центрами колёс находится маркер. Расстояние между центрами колёс (ширина колеи) робота равно 30 см. Моторы на роботе установлены так, что если обе оси повернутся на 10° , то робот проедет прямо вперёд.

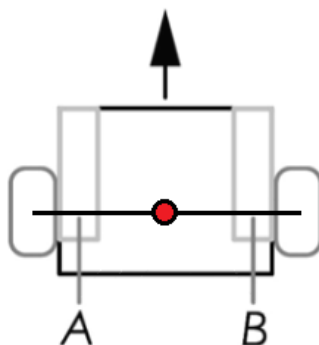


Схема робота

Робот последовательно выполнил следующие действия:

- 1) Ось мотора **A** повернулась на 1080° , ось мотора **B** повернулась на 1080° ;
- 2) Ось мотора **A** повернулась на 1080° , а ось мотора **B** повернулась на 0° (колесо **B** было зафиксировано);
- 3) Ось мотора **A** повернулась на 1080° , ось мотора **B** повернулась на 1080° ;
- 4) Ось мотора **A** повернулась на 1080° , а ось мотора **B** повернулась на 0° (колесо **B** было зафиксировано).

Определите, какой длины кривую начертил робот. Ответ дайте в сантиметрах, приведя результат с точностью до десятых. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Приведите подробное решение задачи. Чтобы получить более точный результат, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Решение

Рассмотрим, какого типа движения совершает робот. Их можно разделить на два типа: «разворот вокруг колеса» и «проезд прямо».

Движения 1) и 3) – это проезд вперёд (Ось мотора **A** повернулась на 1080° , а ось мотора **B** повернулась на 0°).

Рассчитаем, какой длины прямолинейный отрезок проехал робот.

$$\frac{1080^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 5 = 30 \times \pi = 94,2 \text{ (см)}$$

Движения 2) и 4) – это поворот робота вокруг колеса. Ось мотора **A** повернулась на 1080° , а ось мотора **B** повернулась на 0° (колесо **B** было зафиксировано).

Рассчитаем угол поворота робота вокруг колеса **B**:

$$\frac{1080^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 5 = \frac{x}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 30$$
$$x = \frac{1080^\circ}{30} \times 5 = 180^\circ$$

То есть, робот повернулся вокруг колеса **A** на 180° .

Определим длину дуги, которую вычертил робот:

$$\frac{180^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15 = 47,1 \text{ (см)}$$

Тогда общая длина кривой, вычерченной роботом, будет равна:

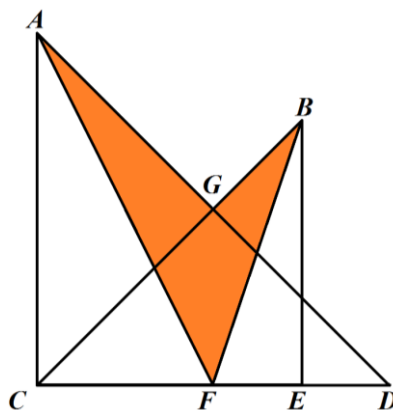
$$94,2 \times 2 + 47,1 \times 2 = 282,6 \text{ (см)}$$

Ответ: 282,6 см.

№ п/п	Критерии	Баллы
4.1	Дан верный ответ (282,6 см.). Дано полное верное решение: присутствуют все расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок. Записан верный ответ.	25
4.2	Дан верный ответ, но он представлен не в верной форме – округлѐн не до десятых и/или дан не в требуемых единицах измерения. Дано верное решение: присутствуют все расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок.	20
4.3	Дан верный ответ (282,6 см.). Дано верное решение: присутствуют все расчеты. Нет необходимых пояснений к решению. Нет арифметических ошибок.	20
4.4	Верно определено расстояние, которое робот проезжает по прямой за одно движение (18,84 см) и градусная мера угла поворота робота вокруг колеса за одно движение (180°). Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок.	15
4.5	Верно определено расстояние, которое робот проезжает по прямой за одно движение (18,84 см).	5
4.6	Дан верный ответ (282,6 см.). Решение отсутствует.	5
4.7	В остальных случаях	0

№4 (25 баллов)

Робот-чертёжник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (см. *изображение*) при помощи кисти, закреплённой по середине между колёс. Робот может поднимать кисть, но при расчетах этой информацией следует пренебречь.



Изображение

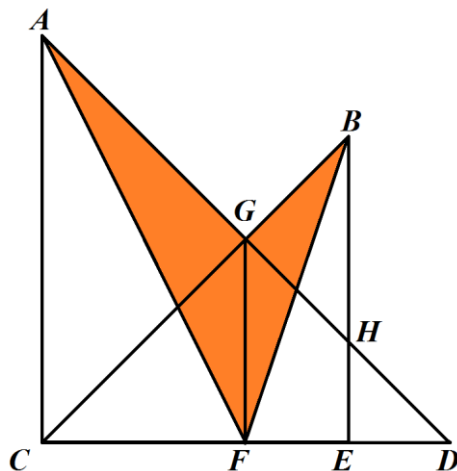
Известно, что данная фигура составлена из двух прямоугольных равнобедренных треугольников ACD и BDE . $\angle ACD = \angle BEC = 90^\circ$. AF – медиана, $DE = 0,25AC$, $CD = a = 4$ м.

Определите площадь четырёхугольника $AFBG$. Ответ дайте в квадратных метрах с точностью до целых. Приведите подробное решение задачи.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Решение

Рассмотрим краткое решение данной задачи.



Пользуясь подобием треугольников ACD , BEC , HED , BGH , CGA можно определить длины отрезков

$$AG = GD = GC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$GB = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

Длина медианы, биссектрисы и высоты GF равна;

$$GF = \frac{a}{2}$$

Градусные меры углов, будут равны:

$$\angle AGF = \angle BGF = 135^\circ$$

Тогда площадь четырёхугольника $AGBF$ будет равна:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \frac{1}{2}AG \cdot GF \cdot \sin(\angle AGF) + \frac{1}{2}BG \cdot GF \cdot \sin(\angle BGF) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{16} = \frac{3a^2}{16} = \frac{3}{16} \cdot 4^2 = 3 \text{ (м}^2\text{)} \end{aligned}$$

Ответ: 3 м².

№ п/п	Критерии	Баллы
5.1	Дан верный ответ (3 м ²). Дано полное верное решение: присутствуют все расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок. Записан верный ответ.	25
5.2	Дан верный ответ (3 м ²). Дано верное решение: присутствуют все расчеты. Нет необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок.	20
5.3	Дан верный ответ, но он представлен не в верной форме – округлѐн не до целых и/или дан не в требуемых единицах измерения. Дано верное решение: присутствуют все расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок.	20
5.4	Решение содержит арифметические ошибки. Верная логика решения. Решение доведено до конца. Даны необходимые пояснения к решению.	10
5.5	Дан верный ответ (3 м ²). Решение отсутствует.	5
5.6	В остальных случаях	0

Максимум за работу можно получить 100 баллов