

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2021/2022 учебный год
Робототехника. Отборочный этап
10–11 класс

№1 (5 баллов)

Робот должен как можно быстрее проехать трассу. Трасса состоит из трёх видов эллипсов: из двух равных больших эллипсов, одного среднего эллипса и двух равных маленьких эллипсов (см. *схему трассы*).

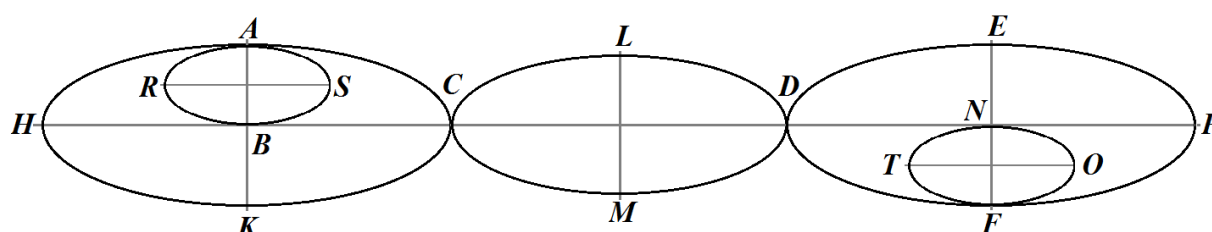


Схема трассы

Робот стартует в точке A в направлении точки R , далее он должен проехать всю трассу 2 раза, после чего он получит кубик в точке A , с которым робот должен финишировать в точке N .

Известно, что $HC = 3$ м, коэффициент сжатия эллипса равен $\frac{1}{3}$, полуоси маленького эллипса в 2 раза меньше соответствующих полуосей большого эллипса. Полуоси среднего эллипса в 1,5 раза больше соответствующих полуосей маленького эллипса.

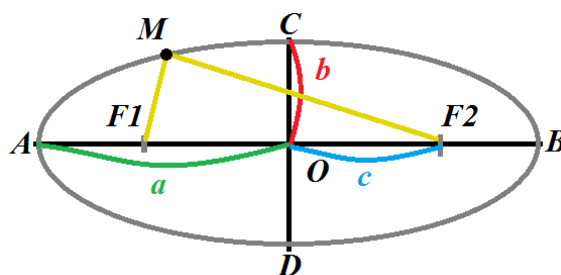
Определите минимальную длину пути, который должен преодолеть робот по трассе. Съезжать с линии робот не может. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Ответ дайте в сантиметрах, округлив результат до десятых. В ответ запишите только число.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Справочная информация

Эллипс – это геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых фокусами) постоянна и больше расстояния между фокусами, т. е.

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a, \text{ причём } |F_1F_2| < 2a.$$

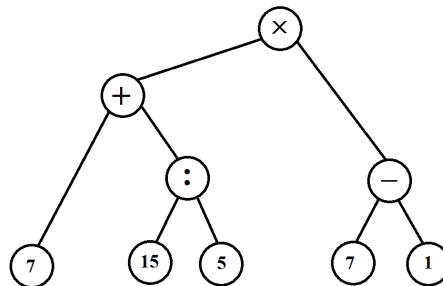


Периметр эллипса можно приближённо вычислить по формуле:

$$L \approx 4 \times \frac{\pi ab + (a-b)^2}{a+b}$$

№2 (10 баллов)

Наглядным средством представления последовательности вычисления математических выражений могут служить графы (см. *пример графа*).



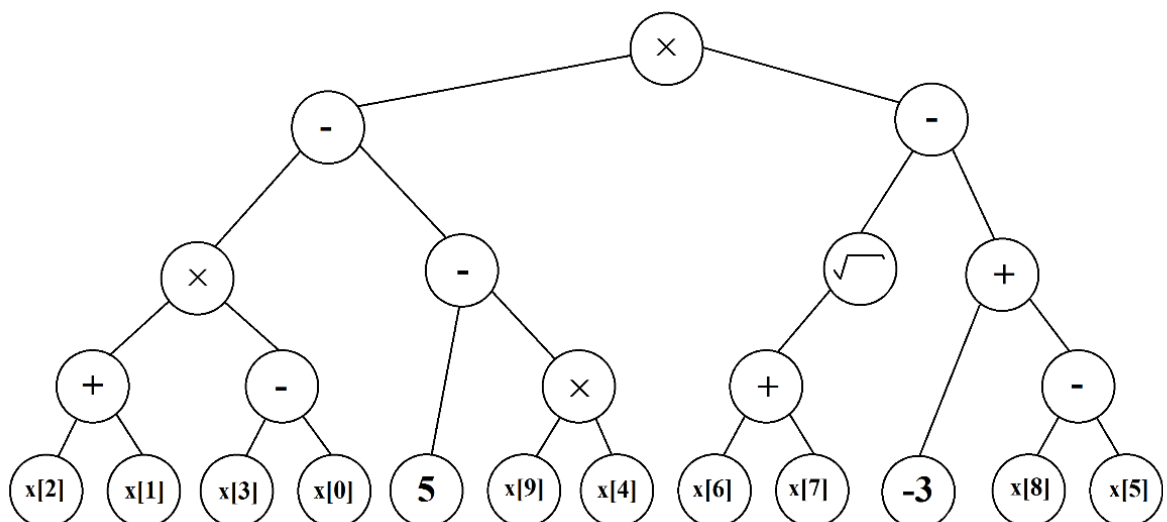
Пример графа

Значение выражения, граф которого представлен в примере, будет равно 60.

Такой граф представляет собой дерево, листьями которого являются числа, а прочие вершины – операциями. Рёбра соединяют вершину-операцию с вершинами-операндами.

Последовательность выполнения операций определяется при прохождении дерева снизу вверх - от листьев к корню. Последней выполняется операция, находящаяся в корне.

Определите значение выражения, которое соответствует следующему дереву (см. *граф №2*).



Граф №2

Для вычисления значения выражения, закодированного графом №2, следует использовать значения элементов массива X. Известно, что:

- элементы с $x[0]$ по $x[3]$ – это квадраты первых четырех простых числа, взятые в порядке возрастания.
- элементы с $x[4]$ по $x[7]$ – это первые четыре натуральных числа, взятые в порядке убывания.
- элемент $x[8] = x[0] + x[7]$.
- элемент $x[9] = x[0] - x[4]$.
- После завершения заполнения массива его отсортировали методом «Пузырька» по убыванию.

Обратите внимание, что на определённом этапе решения вам нужно будет провести операцию извлечения квадратного корня.

В ответ запишите только число, округлив результат до целых.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

№3 (25 баллов)

На первой попытке первую треть трассы робот проехал со скоростью 6 см/с, на оставшейся части трассы его скорость была постоянна и отличалась от скорости, с которой он двигался на первой трети трассы.

На первой попытке, время, за которое робот преодолел первую половину трассы, оказалось на 1 минуту больше, чем время, за которое робот преодолел вторую половину трассы.

На второй попытке робот двигался на протяжении всей трассы с постоянной скоростью. Время, за которое робот преодолел вторую половину трассы во время первой попытки, оказалось в 1,25 раза больше, чем время, которое робот потратил на преодоление первой трети трассы во время второй попытки. При этом, на обеих попытках робот преодолел всю трассу за одно и то же время.

Определите длину трассы. Ответ дайте в сантиметрах. В ответ запишите только число, приведя результат с точностью до целых.

№4 (20 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, диаметр каждого из колёс робота равен 9 см. Левым колесом управляет мотор *A*, правым колесом управляет мотор *B*. Колёса напрямую подсоединены к моторам (см. *схему робота*). Ширина колеи робота (расстояние между центрами колёс) равна 27 см. Масса робота равна 2 кг.

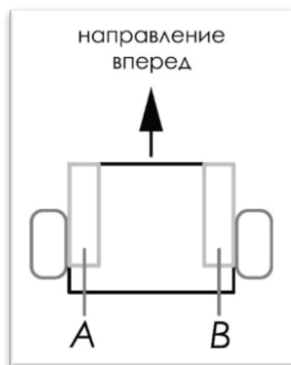


Схема робота

Во время поворота робота ось мотора *A* повернулась на 600° , а ось мотора *B* повернулась на 450° . Колеса робота вращаются в одном направлении.

Определите, градусную меру угла, на который повернулся робот. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Ответ дайте в градусах, при необходимости округлив результат до целых. В ответ запишите только число.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

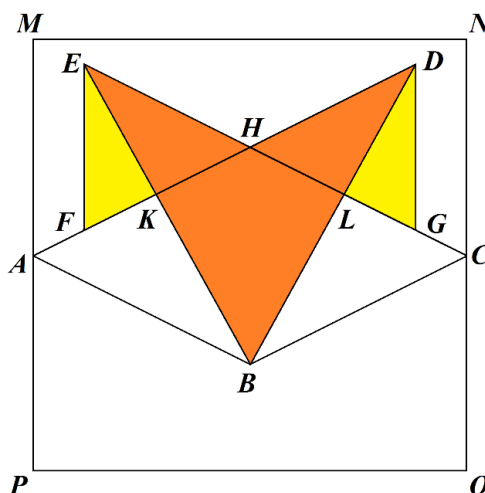
№5 (20 баллов)

Спутник движется по круговой орбите вокруг планеты Тау со скоростью $V = 12$ км/с. Радиус планеты равен $R = 1,5 \times 10^6$ км. Масса спутника $m_1 = 60$ кг, средняя плотность планеты равна $\rho = 5000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Определите, на сколько уменьшится скорость спутника, если его стационарная орбита над поверхностью планеты Тау будет в 1,5 раза выше текущей. Ответ дайте в км/с. В ответ запишите только число, округлив результат до десятых. При расчетах примите $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Н м}^2}{\text{кг}^2}$, $\pi \approx 3,14$.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

№6 (15 баллов)

С одной стороны квадратного листа фанеры нанесли следующую эмблему, состоящую из квадрата и нескольких отрезков (см. *Эмблема*). Точки A и C середины сторон квадрата $MNOP$. Четырёхугольник $ABCH$ – ромб. Треугольники DHG и EFH – правильные. Точки E, H, G, C лежат на одной прямой. Точки A, F, H, D лежат на одной прямой. Эмблема обладает осью симметрии HB . $AF = 0,2 AH$. Стороны квадрата совпадают со стороной листа фанеры.



Эмблема

Эмблему решили покрасить в три цвета – желтый, оранжевый и белый. Расход краски указан в таблице.

№ п/п	Цвет краски	Площадь, которую можно покрасить 1 кг краски (в кв. метрах)
1	Белая	10
2	Жёлтая	10
3	Оранжевая	12
4	Зелёная	13
5	Синяя	16
6	Чёрная	20

Расход краски

Определите массу оранжевой краски, которая потребуется для покраски данной эмблемы. Ответ дайте в граммах, приведя ответ с точностью до десятых. Толщиной линий разметки можно пренебречь. Буквы на эмблему не наносятся. Длина стороны квадрата равна 1 м.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа. В ответ запишите только число.

№7 (5 баллов)

Денис собрал следующую схему (см. *схему цепи*).

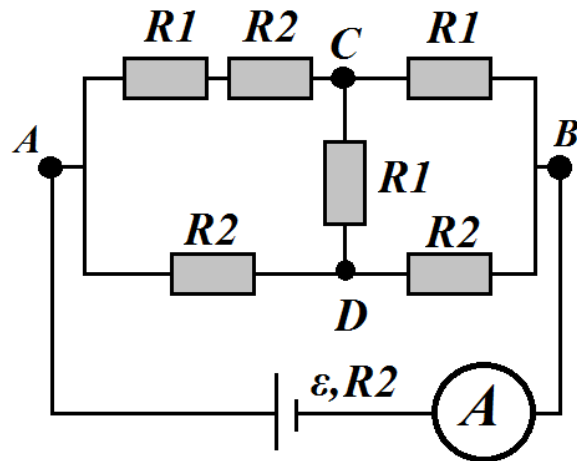


Схема цепи

Амперметр зафиксировал ток номиналом 5 А. ЭДС источника равна 400 В.

№	Обозначение	Номинал (Ом)
1	$R1$	100
2	$R2$	50

Определите, чему равна сила тока на «мостике» CD . Ответ дайте в амперах. В ответ запишите только число, приведя результат с точностью до сотых. Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

№	Ответ	Баллы
1	5787,4	5 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
2	-12362	10 баллов Засчитывается именно верный ответ
3	2880	25 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
4	25	20 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
5	2,2	20 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
6	19,2	15 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
7	2,25	5 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения

Решения заданий

№1

Определим длины полуосей большого эллипса:

$$a_1 = 300 : 2 = 150(\text{см})$$

$$b_1 = 150 \times \frac{1}{3} = 50(\text{см})$$

Определим длины полуосей маленького эллипса:

$$a_3 = a_1 : 2 = 0,5 a_1(\text{см})$$

$$b_3 = b_1 : 2 = 0,5 b_1(\text{см})$$

Определим длины полуосей среднего эллипса:

$$a_2 = a_3 \times 1,5 = 0,75 a_1(\text{см})$$

$$b_2 = b_3 \times 1,5 = 0,75 b_1(\text{см})$$

Робот должен проехать по каждому из эллипсов по 2 раза, после чего проехать по эллипсу каждого вида еще по половине. Значит, длина пути будет равна:

$$\begin{aligned} & 4 \times \frac{\pi a_1 b_1 + (a_1 - b_1)^2}{a_1 + b_1} \times (2 \times 2 + 0,5) \\ & + 4 \times \frac{\pi a_2 b_2 + (a_2 - b_2)^2}{a_2 + b_2} \times (1 \times 2 + 0,5) \\ & + 4 \times \frac{\pi a_3 b_3 + (a_3 - b_3)^2}{a_3 + b_3} \times (2 \times 2 + 0,5) = \\ & = 18 \times \frac{\pi a_1 b_1 + (a_1 - b_1)^2}{a_1 + b_1} + 7,5 \times \frac{\pi a_1 b_1 + (a_1 - b_1)^2}{a_1 + b_1} \\ & + 9 \times \frac{\pi a_1 b_1 + (a_1 - b_1)^2}{a_1 + b_1} = \\ & = 34,5 \times \frac{\pi a_1 b_1 + (a_1 - b_1)^2}{a_1 + b_1} = 34,5 \times \frac{\pi \times 150 \times 50 + 10000}{200} = 5787,375 \approx \\ & \approx 5787,4 (\text{см}) \end{aligned}$$

Ответ: 5787,4.

№2

Определим значения элементов массива X:

$$X[0] = 4$$

$$X[1] = 9$$

$$X[2] = 25$$

$$X[3] = 49$$

$$X[4] = 4$$

$$X[5] = 3$$

$$X[6] = 2$$

$$X[7] = 1$$

$$X[8] = X[0] + X[7] = 4 + 1 = 5$$

$$X[9] = X[0] - X[4] = 4 - 4 = 0$$

Упорядоченный массив X по убыванию:

$$X[0] = 49$$

$$X[1] = 25$$

$$X[2] = 9$$

$$X[3] = 5$$

$$X[4] = 4$$

$$X[5] = 4$$

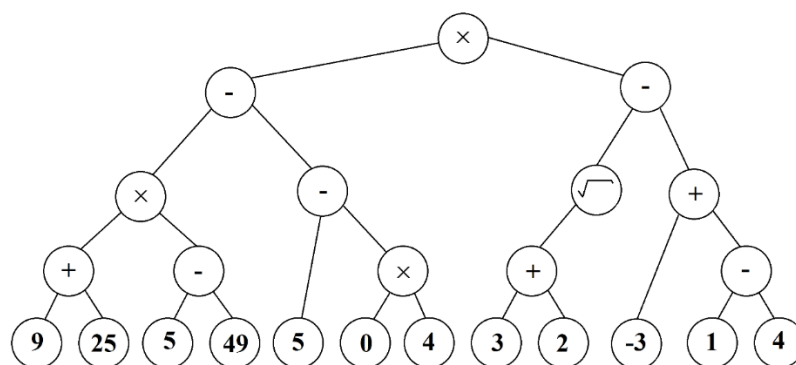
$$X[6] = 3$$

$$X[7] = 2$$

$$X[8] = 1$$

$$X[9] = 0$$

Таким образом, граф принимает следующий вид:



Данный граф кодирует выражение

$$((9 + 25) \times (5 - 49) - (5 - (0 \times 4))) \times (\sqrt{3 + 2} - (-3 + (1 - 4)))$$

Его значение равно

$$(34 \times (-44) - 5) \times (\sqrt{5} - (-3 + (-3))) = (-1501) \times (\sqrt{5} + 6) \approx -12362$$

Ответ: -12362.

№3

Обозначим длину всей трассы как L сантиметров.

Обозначим скорость робота на второй трети пути на первой попытке за x:

$$\frac{L}{3} : 6 + L * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : x = \frac{L}{2} : x + 60$$

Обозначим скорость робота на второй попытке за y:

$$\frac{L}{2} : x = \left(\frac{L}{3} : y\right) * \frac{5}{4}$$

Так как на обеих попытках робот преодолел всю трассу за одно и то же время, то:

$$\frac{L}{3} : 6 + L * \frac{2}{3} : x = L : y$$

Решив систему из трех уравнений, получим:

$$X = 9,6 \text{ (см/с)}$$

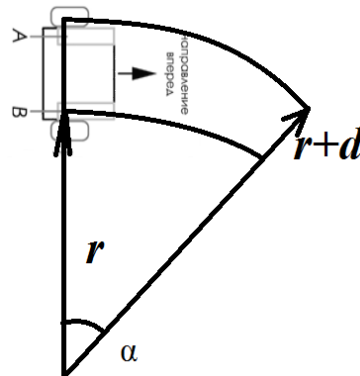
$$Y = 8 \text{ (см/с)}$$

$$L = 2880 \text{ (см)}$$

Ответ: 2880.

№4

Робот будет двигаться так, что его корпус опишет дугу окружности.



Колесо *B* проедет по дуге радиуса *r*:

$$2\pi r \times \frac{\alpha}{360^\circ} = \pi \times 9 \times \frac{450^\circ}{360^\circ}$$

$$2r \times \alpha = 9 \times 450^\circ$$

Колесо *A* проедет по дуге радиуса *r*:

$$2\pi(r + 27) \times \frac{\alpha}{360^\circ} = \pi \times 9 \times \frac{600^\circ}{360^\circ}$$

$$2(r + 27) \times \alpha = 9 \times 600^\circ$$

Решив данную систему из двух уравнений, получим:

$$\alpha = \frac{(600^\circ - 450^\circ) \times 9}{2 \times 27} = 25^\circ$$

Ответ: 25.

№5

Определим массу планеты Тау:

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

Запишем уравнение движения спутника вокруг планеты:

$$G \frac{m_1 M}{L^2} = m_1 \frac{V^2}{L}$$

$$G \frac{M}{L} = V^2$$

Где L – это расстояние от центра планеты до спутника

Тогда

$$L = G \frac{M}{V^2}$$

Высота орбита спутника над поверхностью планеты равна:

$$h = L - R = G \frac{M}{V^2} - R$$

Новая высота орбиты спутника над поверхностью планеты:

$$H = 1,5h = 1,5 \times (L - R) = 1,5 \times (G \frac{M}{V^2} - R)$$

Запишем уравнение движения спутника вокруг планеты на новой высоте:

$$G \frac{m_1 M}{(R + H)^2} = m_1 \frac{V'^2}{R + H}$$

$$G \frac{M}{R + H} = V'^2$$

$$\begin{aligned} V' &= \sqrt{G \frac{M}{R + H}} = \sqrt{\frac{MG}{R + 1,5 \times (G \frac{M}{V^2} - R)}} = V \sqrt{\frac{MG}{V^2 R + 1,5 \times (GM - V^2 R)}} = \\ &= V \sqrt{\frac{MG}{V^2 R + 1,5GM - 1,5V^2 R}} = V \sqrt{\frac{2MG}{3GM - V^2 R}} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V - V' = V - V \sqrt{\frac{2MG}{3GM - V^2 R}} = V \left(1 - \sqrt{\frac{2MG}{3GM - V^2 R}} \right) \\ \Delta V &= V \left(1 - \sqrt{\frac{2MG}{3GM - V^2 R}} \right) \end{aligned}$$

Посчитаем массу планеты Тау:

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 = \frac{4}{3} \times 3,14 \times 5000 \times 1,5^3 \times 10^{27} = 70,65 \times 10^{30} (\text{кг})$$

Посчитаем разницу скоростей спутника на разных орбитах:

$$\Delta V = 12000 \left(1 - \sqrt{\frac{2 \times 70,65 \times 10^{30} \times 6,67 \times 10^{-11}}{3 \times 70,65 \times 6,67 \times 10^{19} - 144 \times 10^6 \times 1,5 \times 10^9}} \right) =$$

$$= 12000 \left(1 - \sqrt{\frac{9424710 \times 10^{15}}{14137065 \times 10^{15} - 216 \times 10^{15}}} \right) = 2201,9 \dots \left(\frac{\text{М}}{\text{с}} \right)$$

$$2201,9 \dots \frac{\text{М}}{\text{с}} \approx 2,2 \frac{\text{КМ}}{\text{с}}$$

Ответ: 2,2.

№6

Обозначим сторону ромба как l .

Посчитаем величину стороны ромба:

$$l = \frac{1:2}{\sin(60^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\text{м})$$

Из подобия треугольников KEH и BEC получим соотношение

$$KH : BC = EH : EC.$$

Определим длину KH :

$$KH = \frac{l * (l - 0,2l)}{(l + l - 0,2l)} = \frac{4}{9} l$$

Посчитаем площадь четырёхугольника $EHDB$:

$$S = 2 * \frac{1}{2} * (l - 0,2l) * \frac{4}{9} l * \sin(60^\circ) + 2 * \frac{1}{2} * l * \frac{4}{9} l * \sin(60^\circ) =$$

$$= \frac{4}{9} * \frac{\sqrt{3}}{2} * l^2 * \left(\frac{4}{5} + 1 \right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} * \frac{9}{5} * l^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5} * l^2 = \frac{2\sqrt{3}}{15} (\text{м}^2)$$

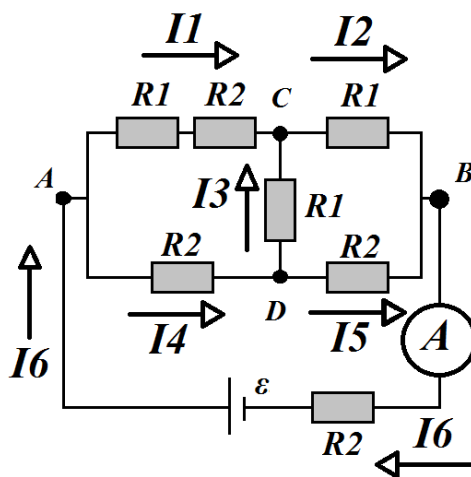
Определим массу оранжевой краски в граммах:

$$m = \frac{2\sqrt{3}}{15} : 12 * 1000 = \frac{2\sqrt{3} * 1000}{3 * 5 * 4 * 3} = \frac{100\sqrt{3}}{9} = 19,245 \dots \approx 19,2(\text{г})$$

Ответ: 19,2.

№7

Введём следующие обозначения для токов, текущих в цепи на различных участках. В схеме используется элемент питания батарейка. Приведём её к схеме с идеальным источником напряжения и внутренним сопротивлением батарейки.



Воспользуемся первым правилом Кирхгофа, чтобы записать вспомогательные уравнения для узлов C, D, A:

$$I_2 = I_1 + I_3$$

$$I_4 = I_3 + I_5$$

$$I_6 = I_1 + I_4$$

Воспользуемся вторым правилом Кирхгофа, чтобы записать вспомогательные уравнения для контуров, выбрав за положительное направление обхода направление по ходу часовой стрелки:

$$I_1 \times (R_1 + R_2) - I_3 \times R_1 - I_4 \times R_2 = 0$$

$$I_4 \times R_2 + I_5 \times R_2 + I_6 \times R_2 = \varepsilon$$

Решим полученную систему из пяти линейных уравнений и получим:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3R_1 + 2R_2} \times \left((3R_1 + 4R_2) \times I_6 - \frac{R_1 + 2R_2}{R_2} \times \varepsilon \right) = \\ &= \frac{1}{3 \times 100 + 2 \times 50} \times \left((3 \times 100 + 4 \times 50) \times 5 - \frac{100 + 2 \times 50}{50} \times 400 \right) = \\ &= \frac{1}{400} \times \left(500 \times 5 - \frac{200}{50} \times 400 \right) = \frac{1}{400} \times (2500 - 1600) = 2,25 \text{ (A)} \end{aligned}$$

Ответ: 2,25.