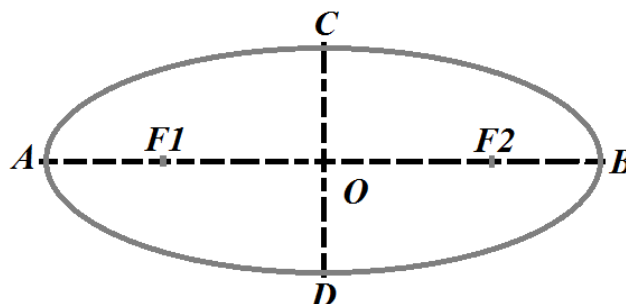


Олимпиада школьников «Ломоносов» 2021/2022 учебный год  
Робототехника. Отборочный этап  
8–9 класс

№1 (5 баллов)

Робот должен как можно быстрее проехать трассу. Трасса имеет вид эллипса (см. *схему трассы*).



*Схема трассы*

Робот стартует в точке  $C$  в направлении точки  $A$ , далее он должен проехать всю трассу 4 раза, после чего он получит кубик, с которым робот может финишировать в точке  $A$ .

Известно, что  $CD = 3$  м, коэффициент сжатия эллипса равен  $\frac{1}{3}$ .

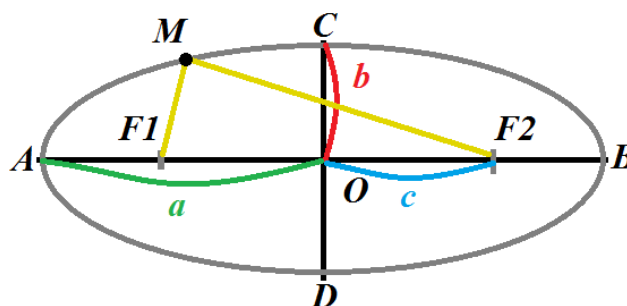
Определите минимальную длину пути, который должен преодолеть робот по трассе. Съезжать с линии робот не может. При расчётах примите  $\pi \approx 3,14$ . Ответ дайте в сантиметрах, округлив результат до целых. В ответ запишите только число.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

### Справочная информация

Эллипс – это геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  (называемых фокусами) постоянна и больше расстояния между фокусами, т. е.

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a, \text{ причём } |F_1F_2| < 2a.$$



Проходящий через фокусы эллипса отрезок  $AB$ , концы которого лежат на эллипсе, называется большой осью эллипса,  $AB = 2a$ .

Отрезок  $CD$ , перпендикулярный большой оси эллипса, проходящий через центральную точку большой оси, концы которого лежат на эллипсе, называется малой осью эллипса,  $CD = 2b$ .

Точка пересечения большой и малой осей эллипса называется его центром.

Отрезки, проведённые из центра эллипса к вершинам на большой и малой осях, называются, соответственно, большой полуосью и малой полуосью эллипса и обозначаются  $a$  и  $b$ .

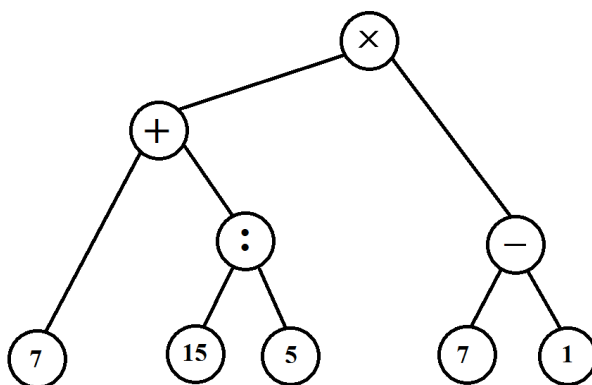
Отношение длин малой и большой полуосей называется коэффициентом сжатия эллипса,  $k = b : a$ .

Периметр эллипса можно приближённо вычислить по формуле:

$$L \approx 4 \times \frac{\pi ab + (a-b)^2}{a+b}$$

## №2 (20 баллов)

Наглядным средством представления последовательности вычисления математических выражений могут служить графы (см. пример графа).



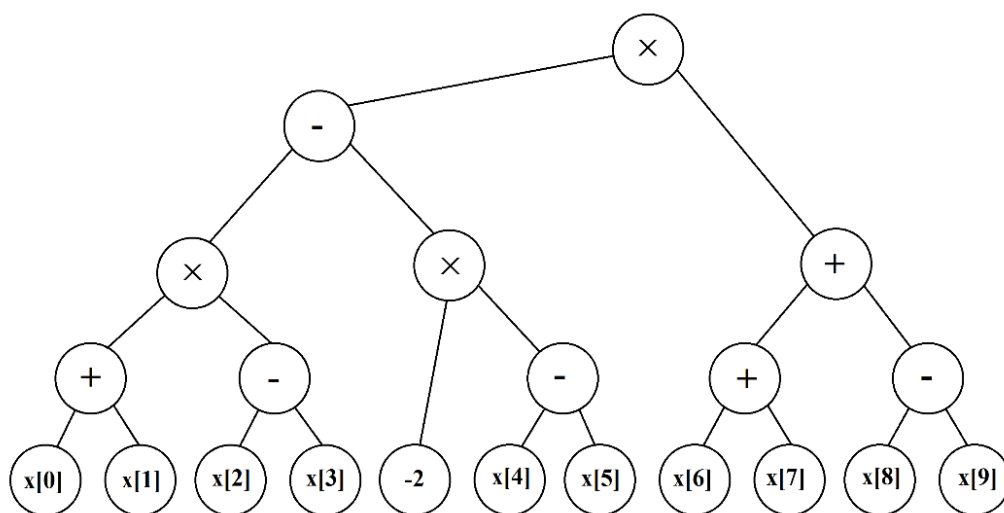
Пример графа

Значение выражения, граф которого представлен в примере, будет равно 60.

Такой граф представляет собой дерево, листьями которого являются числа, а прочие вершины – операциями. Рёбра соединяют вершину-операцию с вершинами-операндами.

Последовательность выполнения операций определяется при прохождении дерева снизу вверх - от листьев к корню. Последней выполняется операция, находящаяся в корне.

Определите значение выражения, которое соответствует следующему дереву (см. граф №2).



Граф №2

Для вычисления значения выражения, закодированного графом №2, следует использовать значения элементов массива X. Известно, что:

- элементы с  $x[0]$  по  $x[3]$  – это первые четыре простых числа, взятые в порядке возрастания.
- элементы с  $x[4]$  по  $x[7]$  – это квадраты первых четырёх натуральных чисел, взятые в порядке возрастания.
- элемент  $x[8] = x[3] - x[7]$ .
- элемент  $x[9] = (-1) * (x[0] + x[4])$ .

В ответ запишите только число.

### №3 (20 баллов)

На первой попытке первую треть трассы робот проехал со скоростью 6 см/с, на оставшейся части трассы его скорость была на 2 см/с ниже. На второй попытке робот двигался на протяжении всей трассы с постоянной скоростью. Время, за которое робот преодолел первую половину трассы во время первой попытки, оказалось в 1,5 раза меньше, чем время, которое робот потратил на преодоление первой половины трассы во время второй попытки.

Определите скорость, с которой робот двигался во время второй попытки. Ответ дайте в сантиметрах в секунду. В ответ запишите только число, округлив результат до десятых.

№4 (25 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, диаметр каждого из колёс робота равен 9 см. Левым колесом управляет мотор *A*, правым колесом управляет мотор *B*. Колёса напрямую подсоединены к моторам (см. *схему робота*). Ширина колеи робота (расстояние между центрами колёс) равна 27 см. Масса робота равна 2 кг.

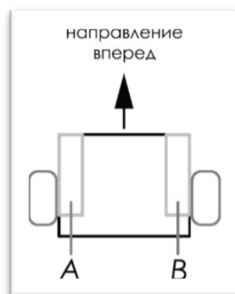


Схема робота

Во время разворота робота вокруг колеса ось мотора *A* повернулась на  $0^\circ$ , а ось мотора *B* повернулась на  $390^\circ$ .

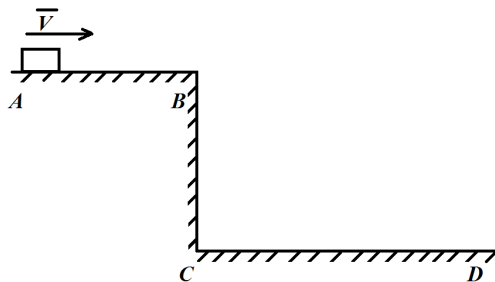
Определите, градусную меру угла, на который повернулся робот. При расчётах примите  $\pi \approx 3,14$ . Ответ дайте в градусах, при необходимости округлив результат до целых. В ответ запишите только число.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

№5 (15 баллов)

На ровной горизонтальной ступеньке в точке *A* лежит небольшая шайба массы  $m = 12$  г. Робот быстрым ударом сообщает шайбе скорость  $V = 1$  м/с в направлении перпендикулярном грани ступеньки. Коэффициент трения скольжения шайбы о поверхность ступеньки равен  $k = 0,05$ . Шайба доезжает до края ступеньки, падает с неё и приземляется в точке *D* (см. *схему*).

Длина отрезка  $AB = l = 5$  дм,  $CD = s = 15$  дм. При расчетах примите  $g \approx 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



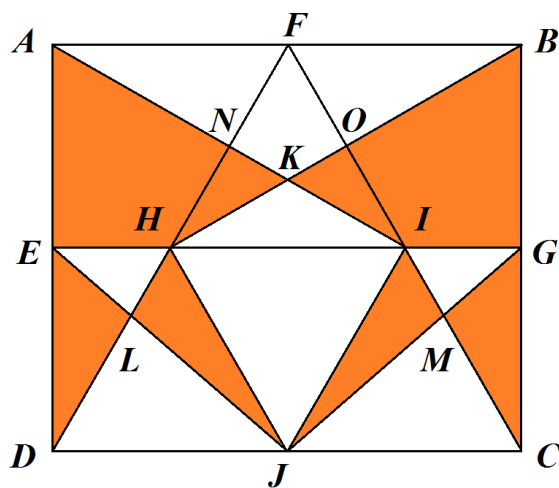
Схема

Определите высоту ступеньки ВС. Ответ дайте в сантиметрах. В ответ запишите только число, округлив результат до целых.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

№6 (10 баллов)

С одной стороны квадратного листа фанеры нанесли следующую эмблему, состоящую из квадрата и нескольких отрезков (см. *Эмблема*).  $EG$  – средняя линия квадрата  $ABCD$ . Треугольник  $DFC$  – равнобедренный ( $DF = FC$ ). Точка  $J$  – середина стороны  $DC$ . Стороны квадрата совпадают со стороной листа фанеры.



*Эмблема*

Эмблему решили покрасить в два цвета – оранжевый и белый. Расход краски указан в таблице.

№ п/п	Цвет краски	Площадь, которую можно покрасить 1 кг краски (в кв. метрах)
1	Белая	10
2	Жёлтая	10
3	Оранжевая	12
4	Зелёная	13
5	Синяя	16
6	Чёрная	20

*Расход краски*

Определите массу оранжевой краски, которая потребуется для покраски данной эмблемы. Ответ дайте в граммах, округлив результат с точностью до десятых. Толщиной линий разметки можно пренебречь. Буквы на эмблему не наносятся. Длина стороны квадрата равна 2 м.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа. В ответ запишите только число.

### №7 (5 баллов)

Резисторы, в особенности малой мощности, – это довольно мелкие детали. Поэтому для указания их номинала применяют кодировку с помощью цветных полос.

Резистор нужно разместить так, чтобы ближайшая к выводу полоса располагалась слева или расположить слева самую широкую полосу, которая при определении номинала всегда является первой. Маркировку полос считывают последовательно слева направо.

Предположим, у вас есть резистор, маркированный четырьмя полосами. Номинал резистора определяется по первым трём полосам. Первые две полосы маркировки – это цифры, а третья – множитель. Четвёртая полоса показывает допустимую погрешность точности сопротивления от номинального значения резистора в процентах.

*Таблица определения маркировки резисторов*

Цвет	Как число	Как десятичный множитель	Как точность в %
серебристый	—	0,01	10
золотой	—	0,1	5
чёрный	0	1	—
коричневый	1	10	1
красный	2	100	2
оранжевый	3	1000	—
жёлтый	4	10 000	—
зелёный	5	100 000	0,5
синий	6	1 000 000	0,25
фиолетовый	7	10 000 000	0,1
серый	8	100 000 000	0,05
белый	9	1 000 000 000	—

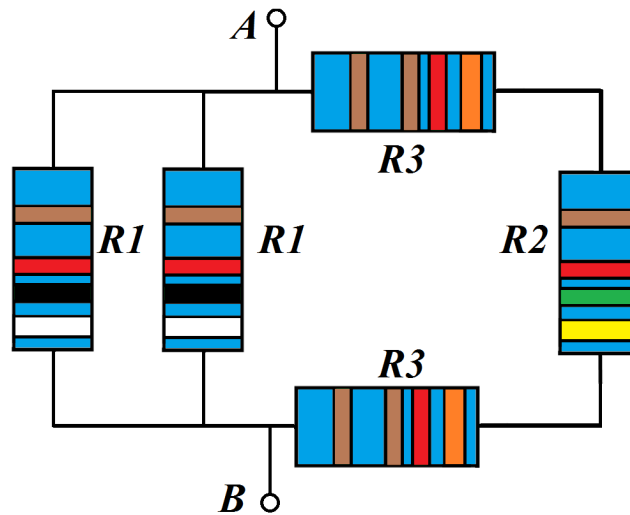
Например, если на резистор нанесена следующая маркировка (см. рис. *резистор 1*), то его номинал можно определить следующим образом:

$$22 \times 10 \pm 5\% = 220 \pm 11 \text{ Ом.}$$



*Резистор 1*

Из резисторов с маркировкой собрали следующую (см. *схема участка AB*).



*Схема участка AB*

Определите, чему равно минимально допустимое (в соответствии с указанными номиналами резисторов) сопротивление участка *AB*. Ответ дайте в омах. В ответ запишите только число, округлив результат до десятых.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

№	Ответ	Баллы
1	8555	5 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
2	-304	20 баллов Засчитывается именно верный ответ
3	3,4	20 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
4	65	25 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
5	2166	15 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
6	152,8	10 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения
7	2385,4	5 баллов Засчитывается именно верный ответ в требуемых единицах измерения



## Решения заданий

№1

Решение

Определим длины полуосей эллипса:

$$b = 3:2 = 1,5(\text{м})$$

$$a = 1,5:\frac{1}{3} = 4,5(\text{м})$$

Периметр эллипса равен:

$$\begin{aligned} L &\approx 4 \times \frac{\pi ab + (a - b)^2}{a + b} = 4 \times \frac{3,14 \times 4,5 \times 1,5 + (4,5 - 1,5)^2}{4,5 + 1,5} = \\ &= 4 \times 1,5 \times \frac{3,14 \times 4,5 \times 1 + 6}{6} = 20,13(\text{м}) \end{aligned}$$

Робот должен проехать по эллипсу 4,25 раз. Значит, длина пути будет равна:

$$S = 4,25 \times 20,13 = 85,5525 (\text{м})$$

$$85,5525 \text{ м} = 8555,25 \text{ см} \approx 8555 \text{ см}$$

**Ответ:** 8555.

№2

Определим значения элементов массива x:

$$X[0] = 2$$

$$X[1] = 3$$

$$X[2] = 5$$

$$X[3] = 7$$

$$X[4] = 1$$

$$X[5] = 4$$

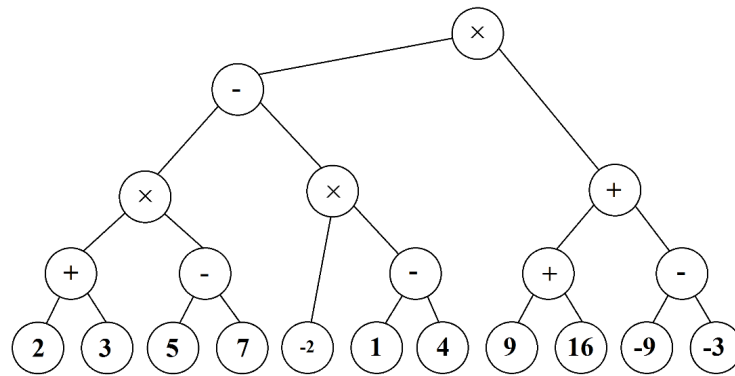
$$X[6] = 9$$

$$X[7] = 16$$

$$X[8] = X[3] - X[7] = 7 - 16 = -9$$

$$X[9] = (-1) * (X[0] + X[4]) = (-1) * (2 + 1) = -3$$

Таким образом, граф принимает следующий вид:



Данный граф кодирует выражение

$$((2 + 3) \times (5 - 7) - (-2 \times (1 - 4))) \times ((9 + 16) + (-9 - (-3)))$$

Его значение равно

$$(5 \times (-2) - (-2 \times (-3))) \times (25 + (-6)) = (-16) \times 19 = -304$$

**Ответ:** -304.

№3

Робот проехал на первой попытке проехал две третьих трассы со скоростью

$$6 - 2 = 4 \text{ (см/с)}$$

Обозначим длину всей трассы как L сантиметров.

Время, за которое робот преодолел первую половину трассы во время первой попытки:

$$\frac{L}{3} : 6 + L * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : 4 = L * \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right) = \frac{7}{72} L(\text{с})$$

Время, которое робот потратил на преодоление первой половины трассы во время второй попытки

$$L * \frac{7}{72} * \frac{3}{2} = \frac{7}{48} L$$

Скорость, с которой робот двигался во время второй попытки:

$$\frac{L}{2} : \frac{7}{48} L = \frac{48}{2 * 7} = 3,4285 \dots \approx 3,4 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)$$

**Ответ:** 3,4.

№4

Определим, чему равна длина дуги, по которой проехал робот:

$$\frac{390^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 9 = \frac{39}{4} \pi (\text{см})$$

Определим, какова градусная мера дуги, по которой поворачивался робот:

$$\frac{39}{4} \pi : (2 \times \pi \times 14) \times 360^\circ = \frac{39 \times 360^\circ}{4 \times 2 \times 27} = 65^\circ$$

Ответ: 65.

№5

Задача логично распадается на две задачи. В первой части шайба движется равнозамедленно по горизонтальной поверхности и проходит путь  $AB$ . Во второй части шайба свободно падает с высоты  $BC$  с начальной горизонтальной скоростью.

Введем систему координат, расположив начало координат в точке  $B$ . Ось  $OB$  направим горизонтально в направлении движения шайбы, ось  $OY$  направим вертикально вниз (см. *схему решения*).

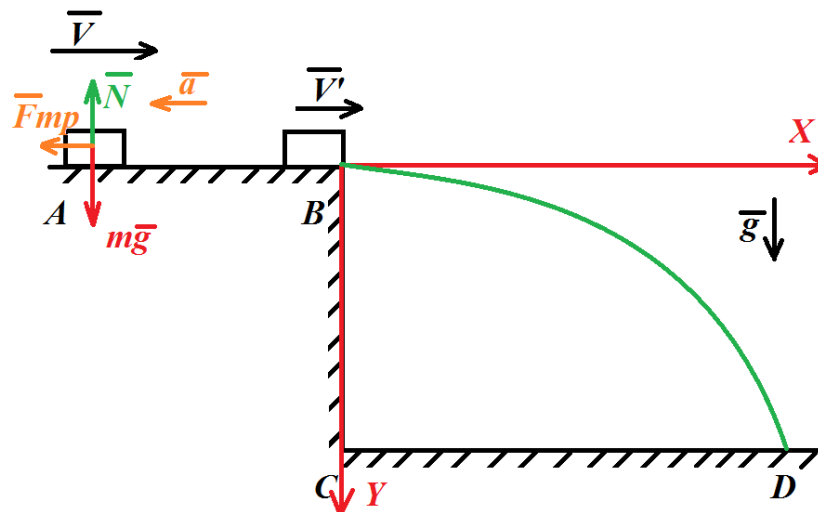


Схема решения

Рассмотрим первую часть задачи: шайба движется равнозамедленно по горизонтальной поверхности и проходит путь  $AB$ . Отметим на рисунке все силы, действующие на тело, запишем уравнение движения шайбы:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Спроецируем это уравнение на оси, получим:

ОХ:

$$0 - F_{\text{тр}} + 0 = -ma$$

OY:

$$mg + 0 - N = 0$$

Так как

$$F_{\text{тр}} = k N$$

То, мы можем определить ускорение  $a$ , действующее на шайбу:

$$a = kg$$

Определим скорость тела  $V'$ , которая будет у него в точке  $B$ :

$$\frac{mV^2}{2} - mgl = \frac{mV'^2}{2}$$

$$V'^2 - V^2 = -2gl$$

$$V' = \sqrt{V^2 - 2gl}$$

Рассмотрим вторую часть задачи: шайба свободно падает с высоты  $BC$  с начальной горизонтальной скоростью  $V'$ .

Запишем зависимость радиус-вектора от времени, приняв за начальный момент времени тот, в который произошел отрыв шайбы от поверхности ступеньки:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

Спроецируем уравнение на оси координат.

OX:

$$x = 0 + V' t + \frac{0 \times t^2}{2}$$

OY:

$$Y = 0 + 0 \times t + \frac{gt^2}{2}$$

Таким образом, получаем что вдоль оси OX тело движется равномерно и прямолинейно, а вдоль оси OY – равноускоренно.

За то время, пока тело по горизонтали преодолеет расстояние  $CD$ , по вертикали тело преодолеет расстояние  $BC$ .

Определим время, за которое тело преодолеет по горизонтали расстояние  $CD$ :

$$t' = \frac{s}{V'}$$

Определим высоту ступеньки  $BC$ :

$$h = \frac{g}{2} \times t'^2 = \frac{g}{2} \times \left(\frac{s}{V'}\right)^2 = \frac{g}{2} \times \left(\frac{s}{\sqrt{V^2 - 2kgl}}\right)^2 = \frac{gs^2}{2(V^2 - 2kgl)}$$

$$h = \frac{9,81 \times (1,5)^2}{2(1^2 - 2 \times 0,05 \times 9,81 \times 0,5)} = \frac{9,81 \times 2,25}{2 \times (1 - 0,4905)} = \frac{9,81 \times 2,25}{1,019}$$

$$= 21,6609 \approx 21,66 \text{ (м)}$$

Переведем в сантиметры:

$$h = 21,66 \text{ м} = 2166 \text{ см}$$

**Ответ:** 2166.

№6

Определим площадь фигуры, состоящей из двух равных четырёхугольников, как разность половины площади квадрата и двух подобных равнобедренных треугольников с коэффициентом подобия 2:1.

$$S1 = 2 * 1 - \left(\frac{1}{2} * 2 * \frac{2}{3} + \frac{1}{2} * 1 * \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{6} * (4 + 1) = \frac{7}{6} = 1 \frac{1}{6} (\text{м}^2)$$

Определим площадь нижней фигуры как разность половины площади квадрата и равнобедренного треугольника, а также удвоенной суммы двух подобных треугольников с коэффициентом подобия 2:1

$$S2 = 2 * 1 - 2 * \left(\frac{1}{2} * 1 * \frac{2}{3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} * 1 * 1 = 2 - 2 * \frac{1}{6} * \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{3} (\text{м}^2)$$

Определим площадь поверхности, покрашенной оранжевым цветом:

$$S = S1 + S2 = 1 \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} + \frac{4}{6} = \frac{11}{6} = 1 \frac{5}{6} (\text{м}^2)$$

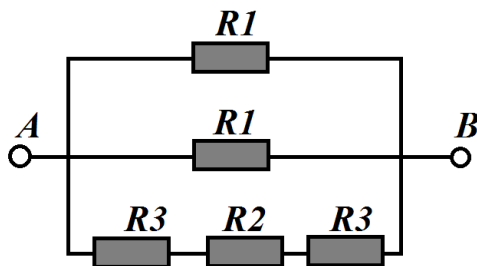
Определим массу оранжевой краски в граммах:

$$m = \frac{11}{6} : 12 * 1000 = \frac{11 * 1000}{12 * 6} = 152, (7) \approx 152,8 (\text{г})$$

**Ответ:** 152,8.

№7

Проанализируем собранную схему. Она эквивалентная следующей схеме смешанного участка цепи:



Сопротивление данного участка  $AB$  можно посчитать по формуле:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2 + R3 + R3}} = \frac{1}{\frac{2}{R1} + \frac{1}{R2 + 2R3}}$$

Чтобы величина  $R$  была минимальна, надо, чтобы знаменатель дроби был максимален:

$$\frac{2}{R1} + \frac{1}{R2 + 2R3}$$

Чтобы это выражение (знаменатель дроби) было максимально, необходимо, чтобы знаменатели входящих в выражение дробей были минимальны.

Значит, сопротивление участка  $AB$  будет минимально, нужно, чтобы все сопротивления в цепи имели минимальное сопротивление, допустимое по их маркировке.

Определим минимально возможное сопротивление каждого из видов резисторов.

Разместим резистор типа  $R1$  так, чтобы было удобно его читать:



Определим, что закодировано на резисторе типа  $R1$ :

$$90 \times 100 \pm 1\%$$

Тогда минимальное значение номинала резистора типа  $R1$  будет равно:

$$90 \times 100 \times 0,99 = 8910 \text{ (Ом)}$$

Разместим резистор типа  $R2$  так, чтобы было удобно его читать:



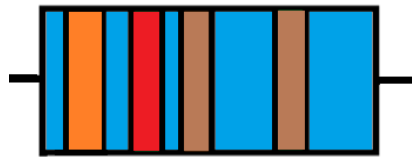
Определим, что закодировано на резисторе типа  $R2$ :

$$45 \times 100 \pm 1\%$$

Тогда минимальное значение номинала резистора типа  $R2$  будет равно:

$$45 \times 100 \times 0,99 = 4455 \text{ (Ом)}$$

Разместим резистор типа  $R3$  так, чтобы было удобно его читать:



Определим, что закодировано на резисторе типа  $R3$ :

$$32 \times 10 \pm 1\%$$

Тогда минимальное значение номинала резистора типа  $R3$  будет равно:

$$32 \times 10 \times 0,99 = 316,8 \text{ (Ом)}$$

Определим минимально допустимое сопротивление участка  $AB$ :

$$R = \frac{1}{\frac{2}{R1} + \frac{1}{R2 + 2R3}} = \frac{1}{\frac{2}{8910} + \frac{1}{4455 + 2 \times 316,8}} = \frac{1}{\frac{1}{4455} + \frac{1}{5088,6}}$$

$$R = 2375,38 \dots \approx 2385,4 \text{ (Ом)}$$

**Ответ:** 2385,4.