

5-7 классы

Разминка

1. Почему на Земле происходят затмения Луны?
 - А. Солнце оказывается на отрезке Земля – Луна и закрывает Луну от наблюдателя.
 - Б. Луна поворачивается к наблюдателю темной стороной.
 - В. Луна прячется в тени Земли.**
 - Г. Луна оказывается вблизи отрезка Солнце – Земля и отраженный Луною солнечный свет не доходит до наблюдателя.
 - Д. На отрезке Земля – Луна оказывается МКС, которая и закрывает Луну от наблюдателя.
2. За всю историю наблюдений с Земли видимый угловой размер этой планеты менялся более чем в 7 раз. Про какую планету идет речь?
 - А. Меркурий.
 - Б. Венера.
 - В. Марс.**
 - Г. Юпитер.
 - Д. Сатурн.

Для Венеры чуть меньше 7.

3. Известно, что доставлять космонавтов и грузы на Луну, стреляя из пороховой пушки, нерационально – космонавты погибнут от перегрузок, грузы тоже испортятся. А можно ли выстрелить из пороховой пушки с Луны на Землю?
 - А. Теоретически возможно, но нерационально по тем же причинам, что и для выстрела Земля – Луна. Поэтому никто этого не делал.**
 - Б. С точки зрения расчета траектории – это возможно. Но мешают другие причины, например, отсутствие кислорода, требуемого для сгорания пороха.**
 - В. Теоретически возможно, такой проект был разработан, но никто пока не пробовал.
 - Г. Не только возможно, но такой выстрел был произведен, а снаряд с грузом был успешно получен на Земле.
 - Д. Не только возможно, но такой выстрел был произведен. Снаряд успешно достиг Земли и сгорел в атмосфере.

Оба ответа засчитываются

4. Как появились кратеры на Луне? Какая теория происхождения считается верной на данный момент?
 - А. Считается, что это следы падения метеоритов**
 - Б. Считается, что это следы внутренней активности Луны – извержений вулканов
 - В. Считается, что кратеры появились при остывания Луны – переходе из расплавленного агрегатного состояния в твердое.
 - Г. Считается, что это результат деятельности внеземных разумных существ.
 - Д. Считается, что кратеры – это неоднородности, возникшие при сжатии пылевого облака, из которого и образовалась Луна.
5. Как был потерян второй робот на Луне – Луноход-2?
 - А. Он заехал в глубокий кратер и не смогу выбраться назад, так как грунт на поверхности оказался слишком рыхлым.

- Б. Преодолевая подъем, он наклонился и задел солнечной батареей за поверхность – пыль попала на батарею и она перестала вырабатывать достаточную электрическую мощность.
- В. Перед началом «лунной зимы» его надо было поставить на горку, чтобы во время зимы солнечная батарея вырабатывала энергию, необходимую для функционирования внутренних систем. Это не было сделано и «батарейки сели».
- Г. С ним была потеряна связь по неизвестным причинам.
- Д. На самом деле, никакого лунохода на Луне не было – это часть «лунной аферы».
6. Какое животное совершило первый орбитальный космический полёт?
- А. Первый космический орбитальный полёт совершила собака Лайка на советском спутнике в ноябре 1957 г.**
- Б. Первый орбитальный полёт совершила американская обезьяна Сэм на космическом корабле в 1959 г.
- В. Первый космический орбитальный полёт совершила французская кошка Фелисетта на космическом корабле в 1963 г.
- Г. Первый космический орбитальный полёт совершили русские собаки Белка и Стрелка на советском спутнике в августе 1960 г.
- Д. Первый орбитальный полёт совершила американская обезьяна Альберт на ракете Фау-2 в 1948 г.
7. В конце 60-х, начале 70-х годов прошлого века на Землю были доставлены образцы лунного грунта. Какие страны участвовали в этом проекте?
- А. США и СССР независимо.**
- Б. Страны Европейского союза.
- В. Китайская народная республика.
- Г. Это был общемировой проект.
- Д. Никакого лунного грунта доставлено не было – это была фальсификация.
8. Какого цвета звезды можно наблюдать с Земли невооруженным глазом?
- А. Белые, красные, синие, желтые и оранжевые.**
- Б. Только белые.
- В. Только белые и красные.
- Г. Только белые, синие и красные.
- Д. Белые, красные, голубые, желтые, коричневые, зеленые и оранжевые.
9. Как часто планета Нептун проходит по диску Солнца для земного наблюдателя?
- А. Примерно раз в месяц.
- Б. Один раз в четыре года.
- В. Каждый день в ясную погоду.
- Г. Один раз в 10000 лет.
- Д. Никогда.**
10. Какой космический объект кажется больше при наблюдении с Юпитера – Солнце или спутник Юпитера Ио?
- А. Конечно, Солнце!
- Б. Они выглядят примерно одинаковыми по размеру.
- В. Ио.**
- Г. Ио невозможно наблюдать, находясь на Юпитере.
- Д. Это неизвестно, поскольку никто из людей никогда не был на Юпитере.

Критерии и технические баллы: верный ответ – 4, неверный ответ - 0

Задача 1

Вернувшись в Цветочный город, Знайка много рассказывал о своем путешествии. Его рассказы очень заинтересовали всех, и особенно астронома Стекляшкина, который не раз наблюдал Луну в телескоп.
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

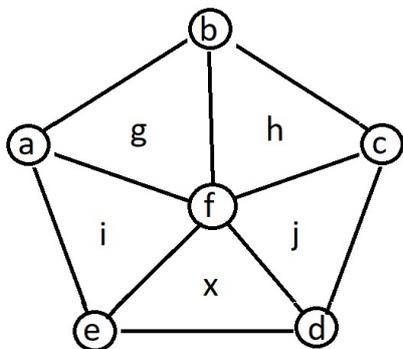
Космический телескоп имени Кеплера с 2009 по 2014 год непрерывно наблюдал одну и ту же область неба в созвездии Лебеда. Мог ли он провести такую же наблюдательную программу в созвездии Скорпиона? Объясните свой ответ.

Решение. Скорпион – зодиакальное созвездие, т.е. при наблюдении с Земли созвездие Скорпиона пересекается плоскостью эклиптики. Поэтому существует период в течение года, когда в этом созвездии находится Солнце, а значит наблюдение с помощью фотометра, состоящего из ПЗС-матриц (именно таким является данный телескоп) невозможно.

Ответ: Нет.

Задача 2

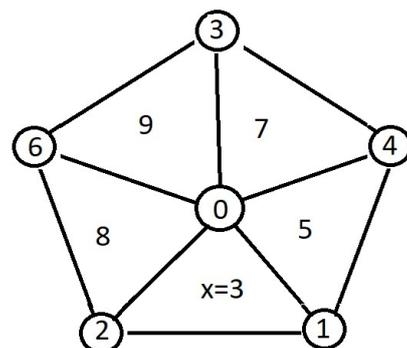
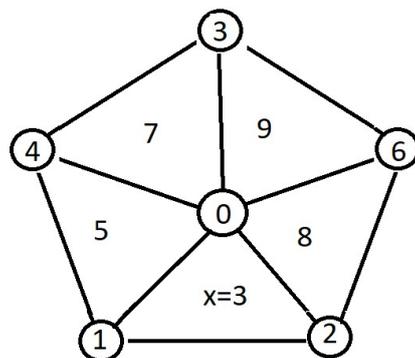
Незнайка и Козлик с утра до вечера продавали акции, Мига же только и делал, что ездил в банк. Там он обменивал вырученные от продажи мелкие деньги на крупные и складывал их в несгораемый шкаф.
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»



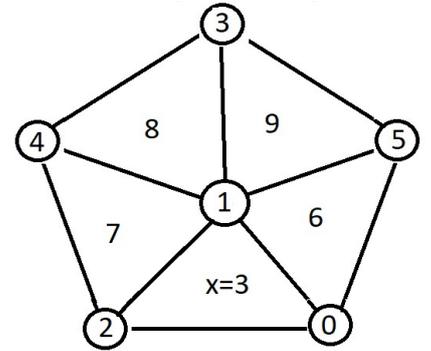
Мига установил на замке несгораемого шкафа шифр $abcdefghijx$. Шифр он составил так. На рисунке слева он заменил буквы $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ на цифры (в некотором порядке) от нуля до девяти (разным буквам отвечают разные цифры). При этом, каждая цифра, стоящая в треугольнике, есть сумма цифр, стоящих в вершинах этого треугольника (например, $g = a + b + f$). Далее Мига нашел число $x = e + f + d$, причем подобрал такую комбинацию цифр $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, при которой число x минимально.

Разгадайте шифр Миги.

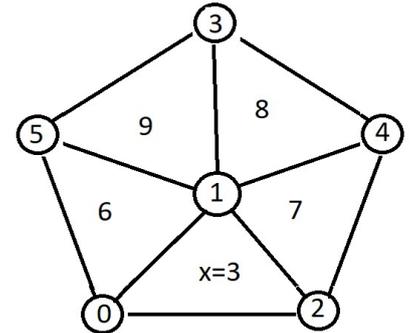
Решение. Меньше 3 число x быть не может (оно есть сумма трех различных цифр, а самые маленькие три цифры – это 0, 1 и 2). Пусть $x = 0 + 1 + 2 = 3$. Предположим, что $f = 0$, тогда либо $e = 1, d = 2$, либо наоборот. Рассмотрим первый случай. Заметим, что цифры 7, 8, 9 обязаны стоять внутри пятиугольника – иначе они будут участвовать в двух суммах (с соседом слева и соседом справа), хотя бы один из этих соседей ≥ 3 и тогда сумма не является цифрой. Итак, число 8 стоит в одном из треугольников. Тогда оно должно быть суммой двух своих соседей (т.к. внутри стоит 0). Возможно два варианта $8 = 2 + 6 = 3 + 5$. Рассмотрим первый вариант. Тогда положение цифры 6 определено. Соседствовать с ней может только 3. Соседствовать с 3 может (из оставшихся 4 и 5) только 4 и мы получаем правильный ответ. Если же $8 = 3 + 5$, то разложим в сумму девятку: $9 = 1 + 8 = 2 + 7$ нельзя (цифры 7 и 8 должны стоять внутри). Тогда либо $9 = 3 + 6$, либо $9 = 4 + 5$. В первом случае получаем на границе комбинацию 6, 3, 5 (именно в таком порядке, т.к. 6 и 5 не рядом). По часовой стрелке так ставить цифры нельзя, т.к. $6 + 1 = 5 + 2$. Против часовой тоже нельзя, т.к. $6 + 2 = 3 + 5$.



Значит, остается случай, когда на границе стоят 3, 4 и 5 (причем 4 и 5 рядом). Тройка не может стоять рядом с 1 или 2, т.к. $3 + 1 = 4$, $3 + 2 = 5$ (а эти цифры уже заняты). Значит 3 стоит посередине – противоречие. Мы полностью отвергли вариант $8 = 3 + 5$, т.е. полностью разобрали случай $f = 0, e = 1, d = 2$. Случай $f = 0, e = 2, d = 1$ полностью симметричен и дает второй возможный ответ.



Предположим, что $f = 1$, тогда либо $e = 2, d = 0$, либо наоборот. Рассмотрим первый случай. Заметим, что цифры 9, 8, 7 и 6 обязаны стоять внутри. Действительно, если одно из этих чисел стоит на границе, то наименьшим возможным его соседом является 3, а уже $6 + 3 + f$ не является цифрой. По той же причине число 5 на границе стоит рядом с 3 и не рядом с 4. Получаем два варианта расстановки: 5, 3, 4 (по часовой стрелке) или 4, 3, 5. Первый вариант не подходит, т.к. $5 + 2 + 1 = 3 + 4 + 1$, а второй подходит и дает третий ответ. Случай $e = 0, d = 2$ полностью симметричен и дает четвертый ответ.



Наконец, случай $f = 2$ не возможен, т.к. теперь уже 9, 8, 7, 6 и 5 должны стоять внутри, где всего четыре места.

Ответ: 4,3,6,2,1,0,7,9,5,8,3;
6,3,4,1,2,0,9,7,8,5,3;
4,3,5,0,2,1,8,9,7,6,3;
5,3,4,2,0,1,9,8,6,7,3. В любом случае, $x = 3$.

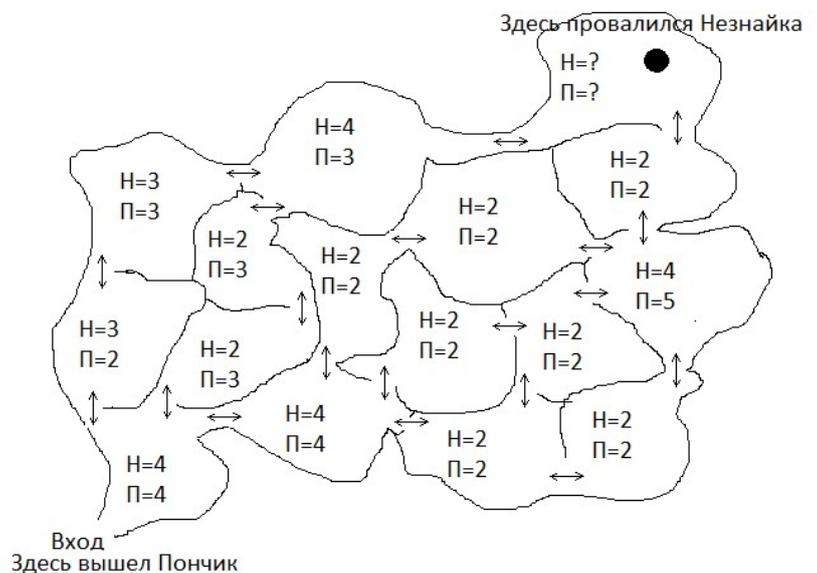
Задача 3

Пончик стал мерзнуть еще сильнее и с таким усердием заплыл на ходу, что один космический сапог соскочил у него с ноги и полетел куда-то в сторону. Пончик бросился искать его и сразу же заблудился между ледяными колоннами. Испугавшись, он принялся звать Незнайку, но Незнайка уже не мог прийти к нему на помощь.

Как раз в это время Незнайка вышел из грота и попал в новый тоннель, дно которого было покрыто льдом. Как только Незнайка ступил на лед, он поскользнулся и покатился вниз.

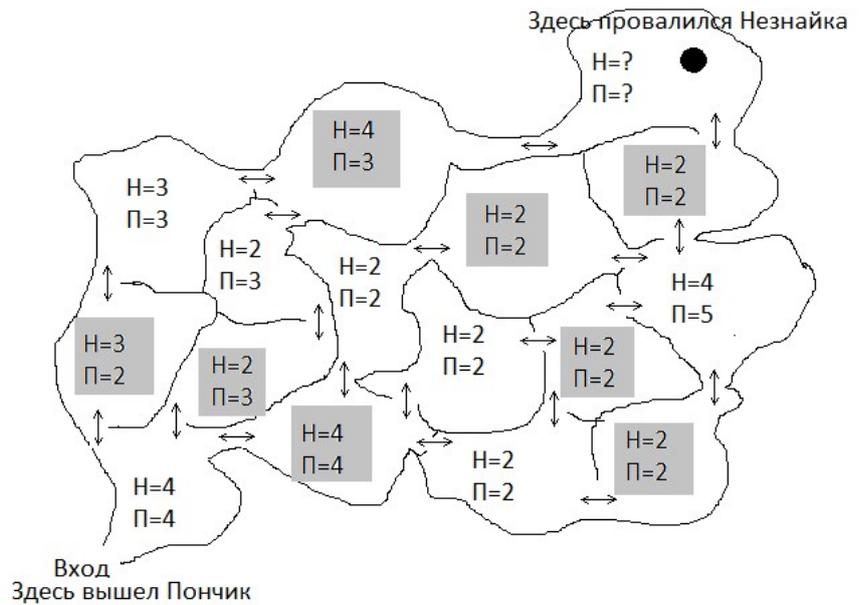
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Незнайка и Пончик заблудились в лабиринте в пещере на Луне. Карта лабиринта перед вами. На этой карте для каждой комнаты пещеры написаны два числа – сколько раз комнату проходил Незнайка, и сколько раз – Пончик. Маршруты Пончика и Незнайки различны и неизвестны (стрелки на карте показывают лишь возможность перехода из одной пещеры в другую). В результате Незнайка провалился в отверстие под поверхность Луны, а Пончик вышел из лабиринта обратно.



Найдите два числа, помеченные на карте знаками вопроса.

Решение. Раскрасим все пещеры в белый и черный цвет. Лабиринт устроен так, что из «белой» пещеры можно перейти только в «черную» и наоборот. Незнайка и Пончик вошли в «белую» пещеру. Каждый из них вышел так же из «белой» пещеры. Значит в сумме в «белых» пещерах каждый из них был ровно на один раз больше чем суммарно в



«черных». Для Незнайки сумма по известным «белым» пещерам равна 19, а по «черным» 21. Тогда ответ для Незнайки 3. Аналогично, для Пончика суммы равны 21 и 20 соответственно, т.е. для него ответ 0. Доказывать, что указанная на рисунке ситуация возможно (для этого надо придумать хотя бы один подходящий маршрут для Незнайки и хотя бы один для Пончика) не обязательно – в условии задачи существование такого маршрута гарантировано.

Ответ: $H=3$, $P=0$.

Задача 4

Поднявшись с пола, он достал из ящика стола раздвижную вычислительную линейку. К одному концу этой линейки он прикрепил лунит, а к другому магнитный железняк и начал осторожно сдвигать оба конца.
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Экспериментальным путем Знайка установил, что вес предметов начинает исчезать, если лунный камень (лунит) находится на расстоянии ≤ 150 см от камня магнитного железняка. Если расстояние сократить до 50 см, вес пропадает. Сам Знайка, однако, не хотел оставаться в невесомости и для экранирования ее использовал антилунит – другой лунный камень. Он начинает экранировать невесомость, если находится на расстоянии ≤ 100 см от магнитного железняка или от лунита, и полностью возвращает вес Знайке, если расстояние до любого из камней – железняка или лунита – сократить до 50 см. Знайка немедленно соорудил прибор – регулятор невесомости, установив на деревянной прямой оси все три камня. Теперь сдвигая и раздвигая камни можно было создавать и убирать невесомость, экранировать или не экранировать ее. Какую наименьшую длину может иметь такой прибор (размерами самих камней можно пренебречь)?

Решение. По условию, мы должны уметь ликвидировать вес предметов и частично, и полностью. Значит, должны уметь создавать любое расстояние из диапазона $[50, 150]$ между лунитом и железняком. Аналогично, нужно уметь создавать любое расстояние из диапазона $[50, 100]$ между антилунитом и системой {лунит, железняк}. Взяв первое расстояние равным 150, а второе 100, получим минимально возможный размер прибора 250 см. Такой прибор, очевидно, возможен – установим, например, лунит слева от железняка, а антилунит справа.

Ответ: 250 см.

Задача 5

– Ну, надо сделать другую ракету, – сказала Селедочка.
– Это не так просто, – ответил Знайка. – Ведь прибора невесомости у нас теперь нет.
Придется строить многоступенчатую ракету, которая могла бы преодолеть силу земного притяжения.
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Предположим, что Знайка решил совершить полет на Луну в артиллерийском снаряде. Вычислите минимально возможную перегрузку, действующую на экипаж во время старта (выстрела), исходя из следующих предположений:

длина орудийного ствола 50 м;

ствол расположен вертикально, а снаряд должен набрать вторую космическую скорость 11200 м/с;

движение снаряда внутри ствола равноускоренное, т.е. скорость от момента запуска, до момента выхода снаряда из ствола увеличивается по закону $v = at$, где a - ускорение, а t - время.

Перегрузкой называется отношение a/g , где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Землю считайте однородным шаром, торможение снаряда в атмосфере и центробежную силу, возникающую в результате вращения Земли, не учитывайте. Ответ округлите до трех значащих цифр.

Решение. Скорость снаряда внутри ствола меняется равномерно от нуля до 11200 м/с. Значит, для вычисления длины пути по формуле $S = Vt$ можно воспользоваться средней скоростью $V = 5600 \text{ м/с}$. Отсюда $t = \frac{50}{5600} \approx 0,00893 \text{ с}$. За это время снаряд должен увеличить скорость от нуля до 11200 м/с, т.е. ускорение равно $a = \frac{11200}{0,00893} \approx 1254400 \text{ м/с}^2$. Разделим на g и учтем, что пушка направлена вертикально (добавим еще одно g) получим ответ: перегрузка равна 128001.

Ответ: 128001

Задача 6

- В это путешествие должны отправиться лишь самые умные и самые дисциплинированные коротышки.
Незнайка очень хорошо переносит состояние невесомости,
но зато состояние его умственных способностей оставляет покуда
желать много лучшего.
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Незнайка решил поумнеть. Он решил научиться делить с остатком - взял некоторое число, разделил его на 2 и отбросил остаток. Результат разделил на 3 и опять отбросил остаток.

Полученное число он разделил на 4, отбросил остаток и получил число К.

Какое число Незнайка мог делить изначально?

Напишите программу на вашем любимом языке программирования и приложите ее текст в качестве ответа на это задание.

Входные данные

Вводится натуральное число К, не превосходящее 1000.

Выходные данные

Выведите все возможные числа, которые мог выбрать изначально Незнайка, по возрастанию, разделяя их пробелами.

Примеры

Входные данные

Выходные данные

24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47

Решение. Самое меньшее число получается, когда все остатки от деления минимальны (то есть, равны нулю). Самое большое число получается, когда все остатки от деления максимальны (то есть, остаток 1 при делении на 2, остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 4).

Программа (язык Python)

```
K = int(input())
```

```
Min = K*4*3*2
```

```
Max = ((K*4+3)*3+2)*2+1
```

```
for i in range(Min,Max+1):
```

```
    print(i,end=' ')
```

Критерии и технические баллы: верный ответ и решение – 10, верный ответ без решения – от 6 до 8, частично верный ответ – 5, есть продвижения – от 1 до 3.

8-9 классы

Разминка

1. За всю историю наблюдений с Земли видимый угловой размер этой планеты менялся более чем в 7 раз. Про какую планету идет речь?
 - А. Меркурий.
 - Б. Венера.
 - В. Марс.**
 - Г. Юпитер.
 - Д. Сатурн.

Для Венеры чуть меньше 7

2. Известно, что доставлять космонавтов и грузы на Луну, стреляя из пороховой пушки, нерационально – космонавты погибнут от перегрузок, грузы тоже испортятся. А можно ли выстрелить из пороховой пушки с Луны на Землю?
 - А. Теоретически возможно, но нерационально по тем же причинам, что и для выстрела Земля – Луна. Поэтому никто этого не делал.**
 - Б. С точки зрения расчета траектории – это возможно. Но мешают другие причины, например, отсутствие кислорода, требуемого для сгорания пороха.**
 - В. Теоретически возможно, такой проект был разработан, но никто пока не пробовал.
 - Г. Не только возможно, но такой выстрел был произведен, а снаряд с грузом был успешно получен на Земле.
 - Д. Не только возможно, но такой выстрел был произведен. Снаряд успешно достиг Земли и сгорел в атмосфере.

Оба ответа засчитываются

3. Как появились кратеры на Луне? Какая теория происхождения считается верной на данный момент?
 - А. Считается, что это следы падения метеоритов**
 - Б. Считается, что это следы внутренней активности Луны – извержений вулканов
 - В. Считается, что кратеры появились при остывания Луны – переходе из расплавленного агрегатного состояния в твердое.
 - Г. Считается, что это результат деятельности внеземных разумных существ.
 - Д. Считается, что кратеры – это неоднородности, возникшие при сжатии пылевого облака, из которого и образовалась Луна.
4. Как был потерян второй робот на Луне – Луноход-2?
 - А. Он заехал в глубокий кратер и не смог выбраться назад, так как грунт на поверхности оказался слишком рыхлым.
 - Б. Преодолевая подъем, он наклонился и задел солнечной батареей за поверхность – пыль попала на батарею и она перестала вырабатывать достаточную электрическую мощность.**
 - В. Перед началом «лунной зимы» его надо было поставить на горку, чтобы во время зимы солнечная батарея вырабатывала энергию, необходимую для функционирования внутренних систем. Это не было сделано и «батарейки сели».
 - Г. С ним была потеряна связь по неизвестным причинам.
 - Д. На самом деле, никакого лунохода на Луне не было – это часть «лунной аферы».

5. К орбитальной станции, находящейся на круговой земной орбите, пристыковывается космический корабль. В момент стыковки двигатели станции и корабля выключены, векторы скоростей коллинеарны, но модуль скорости корабля чуть больше модуля скорости станции. После стыковки корабль и станция движутся как единое тело, влияние атмосферы пренебрежимо мало. Как изменится период обращения станции после стыковки по сравнению с ее периодом до стыковки?
- А. Не изменится.
 - Б. Увеличится.**
 - В. Уменьшится.
 - Г. Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от отношения масс.
 - Д. Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от высоты орбиты.

Получив дополнительный импульс корабль выйдет на более высокую (эллиптическую) орбиту, а по закону Кеплера тогда вырастет период обращения.

6. Какое животное совершило первый орбитальный космический полёт?
- А. Первый космический орбитальный полёт совершила собака Лайка на советском спутнике в ноябре 1957 г.**
 - Б. Первый орбитальный полёт совершила американская обезьяна Сэм на космическом корабле в 1959 г.
 - В. Первый космический орбитальный полёт совершила французская кошка Фелисетта на космическом корабле в 1963 г.
 - Г. Первый космический орбитальный полёт совершили русские собаки Белка и Стрелка на советском спутнике в августе 1960 г.
 - Д. Первый орбитальный полёт совершила американская обезьяна Альберт на ракете Фау-2 в 1948 г.
7. Какое минимально возможное время получения ответа космонавта с Марса при обращении к нему с Земли (от момента обращения до получения на Земле ответа)?
- А. 44 минуты 35 сек
 - Б. 25 мин 21 сек
 - В. 22 мин 58 сек
 - Г. 1 час 14 мин
 - Д. 6 мин 12 сек**
8. Какого цвета звезды можно наблюдать с Земли?
- А. Белые, красные, синие, желтые и оранжевые.**
 - Б. Только белые.
 - В. Только белые и синие.
 - Г. Только белые, синие и красные.
 - Д. Белые, красные, голубые, желтые, коричневые, зеленые и оранжевые.
9. Как часто планета Нептун проходит по диску Солнца для земного наблюдателя?
- А. Примерно раз в месяц.
 - Б. Один раз в четыре года.
 - В. Каждый день в ясную погоду.
 - Г. Один раз в 10000 лет.
 - Д. Никогда.**
10. Какой космический объект кажется больше при наблюдении с Юпитера – Солнце или спутник Юпитера Ио?
- А. Конечно, Солнце!**
 - Б. Они выглядят примерно одинаковыми по размеру.

В. Ио.

Г. Ио невозможно наблюдать, находясь на Юпитере, из-за очень плотной атмосферы.

Д. Это неизвестно, поскольку никто из людей никогда не был на Юпитере.

Критерии и технические баллы: верный ответ -2, неверный ответ -0.

Задача 1

– Ну, надо сделать другую ракету, – сказала Селедочка.
– Это не так просто, – ответил Знайка. – Ведь прибора невесомости у нас теперь нет.
Придется строить многоступенчатую ракету, которая могла бы преодолеть силу земного притяжения.
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Предположим, что Знайка решил совершить полет на Луну в артиллерийском снаряде. Вычислите минимально возможную перегрузку, действующую на экипаж во время старта (выстрела), исходя из следующих предположений:

длина орудийного ствола 50 м;

ствол расположен вертикально, а снаряд должен долететь до Луны;

движение снаряда внутри ствола равноускоренное.

Перегрузкой называется ускорение свободного падения внутри снаряда, отнесенное к $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Землю считайте однородным шаром, торможение снаряда в атмосфере и центробежную силу, возникающую в результате вращения Земли, не учитывайте. Ответ округлите до трех значащих цифр. Ответ округлите до трех значащих цифр.

Решение. При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью и финальной скоростью V имеем для ускорения $a = \frac{2V^2}{s}$. Снаряд должен покинуть орбиту Земли, т.е. должен приобрести скорость, как минимум, вторую космическую. Отсюда $V = 11200 \text{ м/с}$, $a = 1254400 \text{ м/с}^2$. Отсюда перегрузка равна $\frac{a+g}{g} = 128000$ (добавили ускорение свободного падения, так как ствол установлен вертикально).

Ответ: 128001

Задача 2

Через минуту все увидели, что он возвращается обратно. Лицо его было испуганно.
– Братцы, а где же солнышко? – спросил он, с недоумением озираясь вокруг.
– Ты, Незнайка, какой-то осел! – ответил с насмешкой Знайка. – Ну какое тут солнышко..
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

В ходе своего орбитального движения Марс время от времени затмевает различные звезды от земного наблюдателя. Оцените приблизительно время покрытия звезды Марсом, если Марс находится в противостоянии, а покрытие (затмение) началось и закончилось в экваториальной области Марса.

Решение. Надо найти за какое время Марс пройдет свой диаметр, двигаясь по орбите. Диаметр Марса $d = 6779 \text{ км}$, а его средняя орбитальная скорость $24,13 \text{ км/с}$. Однако нам нужно найти его скорость относительно земного наблюдателя. Средняя орбитальная скорость Земли $29,77 \text{ км/с}$, причем вращение Земли и Марса происходит примерно в одной плоскости и в одном направлении. Тогда относительная скорость равна $v = 5,64 \text{ км/с}$, а искомое время $t = \frac{d}{v} \approx 1202 \text{ с}$. Надо сказать, что орбитальные скорости Земли и Марса меняются (планеты имеют эллиптические орбиты). Учитывая это, наш ответ является «средним». Возможны отклонения до 100 секунд.

Ответ: 1202 с

Задача 3

Коротышки в Космическом городе уже давно спали.
Никто не ждал ничего плохого.
Не спали лишь Знайка и профессор Звездочкин.
Они были заняты математическими расчетами.
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Помогите Знайке завершить расчеты: найдите значение выражения

$$\frac{2xy(x^3 + y^3)}{x^2 - xy + y^2} + \frac{(x + y)(x^4 - y^4)}{x^2 - y^2},$$

если известно, что x и y различны, а $x + y = 2021$.

Решение. Упрощаем – получаем выражение $(x + y)^3 = 825465261$.

Задача 4

А ты не горюй, работы всем хватит, – сказал ему Винтик. – Во-первых, вокруг домов надо посадить цветы, чтоб было красиво; во-вторых, от электростанции до Космического городка надо провести электролинию, чтоб было электричество; в-третьих, надо сделать дорогу, заасфальтировать улицы, провести водопровод, отделать помещения...
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

На треугольном участке земли ABC решили построить ангар DEF . Точка D делит сторону AB треугольника ABC пополам. Точка E делит сторону BC в отношении 1:2, считая от вершины B . Точка F делит сторону CA в отношении 1:3, считая от вершины C . Найдите площадь ангара – треугольника DEF , если площадь треугольника ABC равна 24.

Решение. Площади двух треугольников с одинаковым углом относятся как произведение отношений сторон, прилежащих к углу. Тогда $S_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = 9$, $S_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = 4$, $S_{CEF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = 4$, $S_{DEF} = 24 - 9 - 4 - 4 = 7$.

Ответ: 7.

Задача 5

Особенно поразил всех рассказ о полицейском Хныгле, который, попав в состояние невесомости, выстрелил из дальнобойной крупнокалиберной винтовки, в результате чего реактивная сила понесла его с такой скоростью, что он за каких-нибудь полчаса совершил кругосветное путешествие, то есть облетел вокруг внутреннего ядра Луны и упал примерно в том же месте, откуда вылетел.
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Вокруг некоторой планеты по круговым орбитам движутся два одинаковых спутника, отношение изменений импульсов которых за половину периодов их обращений $\Delta p_1 / \Delta p_2 = n$. Определите отношение $k = R_1 / R_2$ радиусов орбит этих спутников. Ответ округлите до сотых.

Решение. Поскольку задано изменение импульсов спутников за одинаковые доли периодов их обращений, массы спутников равны и взаимодействием спутников друг с другом можно пренебречь, то отношение изменений импульсов равно отношению модулей их скоростей, т.е. $\frac{V_1}{V_2} = n$. По условию задачи центростремительное ускорение каждого из спутников обусловлено только действием гравитационных сил со стороны планеты. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения $\frac{mV^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$, где m – масса спутника, R – радиус его орбиты, G – гравитационная постоянная, а M – масса планеты. Отсюда следует, что $V_1^2 R_1 = V_2^2 R_2 = GM$. Поэтому

Ответ: $k = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{1}{n^2}$.

Задача 6

Винтик и Шпунтик тотчас же принялись собирать универсальный комбинированный колесно-гусеничный мотоцикл-вездеход, который хранился в разобранном виде в специальном отсеке ракеты.

В поисках воды робот-вездеход обследует окрестности Южного полюса Луны. Вездеход стартует из точки на 60° южной широты и движется со скоростью 10 см/с так, что в каждый момент времени вектор скорости направлен строго восток-юго-восток, образуя с параллелью угол 30° . Какой путь пройдет вездеход, прежде чем достигнет Южного полюса?

Решение. Скорость вездехода в каждый момент времени направлена под углом 30° к параллели, т.е. при проекции на меридиан получим скорость $v_y = v \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ см/с}$. Расстояние до полюса равно дуге с углом $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ окружности радиуса $R = 1737 \text{ км}$ (радиус Луны). Переводя в радианы, получаем длину дуги $R\alpha \approx 909,5 \text{ км}$. Тогда время пути $t = \frac{909500}{0,05}$. Тогда пройденный путь $S = vt = 2R\alpha \approx 1819 \text{ км}$.

Ответ: 1819 км.

Задача 7

В приемной между тем появилась представительница одной из рекламных фирм. Подбежав к Незнайке, она сунула ему в руки плакат, на котором было написано:

Жалеть не будут коротышки
и не потратят деньги зря,
коль будут все жевать коврижки
Конфетной фабрики "Заря".
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

После такой рекламы фабрика «Заря» получила огромный заказ на коврижки и распределила его на 100 пекарей (каждый из них выпек свою часть заказа, причем эти части могли быть различны). Каждый пекарь работал время t_j , $j = 1, 2, \dots, 100$, за которое 99 остальных пекарей, работая вместе, выполнили бы $\frac{k}{n}$ всего заказа. Суммарное время работы $T = t_1 + t_2 + \dots + t_{100}$ показалось пекарям слишком большим и в следующий раз они для выполнения такого же заказа собрались вместе и управились с ним за 8 часов, работая без перерывов (производительность каждого осталась прежней). Найдите T (ответ запишите в часах).

Решение. Пусть производительность каждого пекаря равна v_j . Тогда каждый из них сделал часть работы $A_j = v_j t_j$, причем $A_1 + \dots + A_{100} = 1$. По условию, для каждого пекаря имеем $t_j(v_1 + \dots + v_{100} - v_j) = \frac{k}{n}$. Добавляя сюда слагаемое A_j и сложив все 100 этих равенств, получим в левой части суммарное время T , умноженное на суммарную производительность, а справа получим $100 \cdot \frac{k}{n} + 1$. Второе условие задачи дает нам $8(v_1 + \dots + v_{100}) = 1$. Выражая отсюда суммарную производительность, получим

Ответ: $T = 8 \left(100 \cdot \frac{k}{n} + 1 \right) = 800 \frac{k}{n} + 8$.

Задача 8

Дело действительно быстро пошло на лад. Правда, в этот день покупатели больше не появлялись, зато когда Мига и Жулио пришли в контору на следующий день, они обнаружили, что торговля акциями идет довольно бойко. Перед Незнайкой и Козликом то и дело появлялись разные коротышки и выкладывали на стол свои денежки.

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

В первый день доход от продажи составил 1 фертинг, во второй – 2 фертинга, в итоге полученные от продажи акций деньги образовали последовательность 1, 2, 4, 8, 61, 77, 541, 866, 5431, ...

Каждое следующее число в последовательности получается так – к предыдущему числу надо прибавить его «обращение» – число, записанное обратным порядком цифр, а затем у суммы отсортировать цифры по убыванию. Например, $866 + 668 = 1534$, после сортировки цифр получаем следующий член последовательности 5431.

Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по номеру n вычисляет n -ый член последовательности.

Входные данные

Программа должна ввести с клавиатуры число n от 1 до 100 включительно.

Выходные данные

Программа должна вывести на экран одно число – n -ый член последовательности.

Пример:

Ввод: 4

Вывод: 8

Ввод: 8

Вывод: 866

Решение. Программа на языке Python

```
n = int(input())
```

```
a = 1
```

```
for i in range(1,n):
```

```
    a += int("".join(reversed(str(a))))
```

```
    #перевели число в строку, прочли ее справа налево, перевели обратно в число и добавили
```

```
    list = []
```

```
    while a>0:
```

```
        list.append(a % 10)
```

```
        a = a // 10
```

```
        #перевели число в список цифр этого числа
```

```
    list = sorted(list)
```

```
    a = 0
```

```
    for j, v in enumerate(list):
```

```
        a += v * 10 ** j
```

```
    #отсортировали список и перевели его обратно в число
```

```
print(a)
```

Критерии и технические баллы: верный ответ и решение – 10, верный ответ без решения – от 6 до 8, частично верный ответ – 5, есть продвижения – от 1 до 3.

10-11 классы

Разминка

1. За всю историю наблюдений с Земли видимый угловой размер этой планеты менялся более чем в 7 раз. Про какую планету идет речь?
 - А. Меркурий.
 - Б. Венера.
 - В. Марс.**
 - Г. Юпитер.
 - Д. Сатурн.

Для Венеры чуть меньше 7.

2. Известно, что доставлять космонавтов и грузы на Луну, стреляя из пороховой пушки, нерационально – космонавты погибнут от перегрузок, грузы тоже испортятся. А можно ли выстрелить из пороховой пушки с Луны на Землю?
 - А. Теоретически возможно, но нерационально по тем же причинам, что и для выстрела Земля – Луна. Поэтому никто этого не делал.**
 - Б. С точки зрения расчета траектории – это возможно. Но мешают другие причины, например, отсутствие кислорода, требуемого для сгорания пороха.**
 - В. Теоретически возможно, такой проект был разработан, но никто пока не пробовал.
 - Г. Не только возможно, но такой выстрел был произведен, а снаряд с грузом был успешно получен на Земле.
 - Д. Не только возможно, но такой выстрел был произведен. Снаряд успешно достиг Земли и сгорел в атмосфере.

Оба ответа засчитываются

3. Как появились кратеры на Луне? Какая теория происхождения считается верной на данный момент?
 - А. Считается, что это следы падения метеоритов**
 - Б. Считается, что это следы внутренней активности Луны – извержений вулканов
 - В. Считается, что кратеры появились при остывания Луны – переходе из расплавленного агрегатного состояния в твердое.
 - Г. Считается, что это результат деятельности внеземных разумных существ.
 - Д. Считается, что кратеры – это неоднородности, возникшие при сжатии пылевого облака, из которого и образовалась Луна.
4. Как был потерян второй робот на Луне – Луноход-2?
 - А. Он заехал в глубокий кратер и не смог выбраться назад, так как грунт на поверхности оказался слишком рыхлым.
 - Б. Преодолевая подъем, он наклонился и задел солнечной батареей за поверхность – пыль попала на батарею и она перестала вырабатывать достаточную электрическую мощность.**
 - В. Перед началом «лунной зимы» его надо было поставить на горку, чтобы во время зимы солнечная батарея вырабатывала энергию, необходимую для функционирования внутренних систем. Это не было сделано и «батарейки сели».
 - Г. С ним была потеряна связь по неизвестным причинам.
 - Д. На самом деле, никакого лунохода на Луне не было – это часть «лунной аферы».

5. К орбитальной станции, находящейся на круговой земной орбите, пристыковывается космический корабль. В момент стыковки двигатели станции и корабля выключены, векторы скоростей коллинеарны, но модуль скорости корабля чуть больше модуля скорости станции. После стыковки корабль и станция движутся как единое тело, влияние атмосферы пренебрежимо мало. Как изменится **перигей** орбиты станции после стыковки по сравнению с ее перигеем до стыковки?
- А. **Не изменится.**
 - Б. Увеличится.
 - В. Уменьшится.
 - Г. Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от отношения масс.
 - Д. Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от высоты орбиты.
6. К орбитальной станции, находящейся на круговой земной орбите, пристыковывается космический корабль. В момент стыковки двигатели станции и корабля выключены, векторы скоростей коллинеарны, но модуль скорости корабля чуть больше модуля скорости станции. После стыковки корабль и станция движутся как единое тело, влияние атмосферы пренебрежимо мало. Как изменится **апогей** орбиты станции после стыковки по сравнению с ее апогеем до стыковки?
- А. Не изменится.
 - Б. **Увеличится.**
 - В. Уменьшится.
 - Г. Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от отношения масс.
 - Д. Нельзя сказать при имеющихся данных – ответ зависит от высоты орбиты.

За счет дополнительного импульса орбита станет более высокой эллиптической, т.е. апогей увеличится. При этом, точка стыковки будет лежать на новой орбите и станет ее перигеем, т.е. перигей не изменится.

7. Какое минимально возможное время получения ответа космонавта с Марса при обращении к нему с Земли (от момента обращения до получения на Земле ответа)?
- А. 44 минуты 35 сек
 - Б. 25 мин 21 сек
 - В. 22 мин 58 сек
 - Г. 1 час 14 мин
 - Д. **6 мин 12 сек**
8. Какого цвета звезды можно наблюдать с Земли?
- А. **Белые, синие, красные, желтые и оранжевые.**
 - Б. Только белые.
 - В. Только белые и красные.
 - Г. Только белые, синие и красные.
 - Д. Белые, красные, голубые, желтые, коричневые, зеленые и оранжевые.
9. Как часто планета Нептун проходит по диску Солнца для земного наблюдателя?
- А. Примерно раз в месяц.
 - Б. Один раз в четыре года.
 - В. Каждый день в ясную погоду.
 - Г. Один раз в 10000 лет.
 - Д. **Никогда.**
10. Какой космический объект кажется больше при наблюдении с Юпитера – Солнце или спутник Юпитера Ио?
- А. Конечно, Солнце!

Б. Они выглядят примерно одинаковыми по размеру.

В. **Ио.**

Г. Ио невозможно наблюдать, находясь на Юпитере, из-за очень плотной атмосферы.

Д. Это неизвестно, поскольку никто из людей никогда не был на Юпитере.

Критерии и технические баллы: верный ответ -2, неверный ответ -0.

Задача 1

В приемной между тем появилась представительница одной из рекламных фирм. Подбежав к Незнайке, она сунула ему в руки плакат, на котором было написано:

Жалеть не будут коротышки
и не потратят деньги зря,
коль будут все жевать коврижки
Конфетной фабрики "Заря".
Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

После такой рекламы фабрика «Заря» получила огромный заказ на коврижки и распределила его на 100 пекарей (каждый из них выпек свою часть заказа, причем эти части могли быть различны). Каждый пекарь работал время t_j , $j = 1, 2, \dots, 100$, за которое 99 остальных пекарей, работая вместе, выполнили бы $\frac{k}{n}$ всего заказа. Суммарное время работы $T = t_1 + t_2 + \dots + t_{100}$ показалось пекарям слишком большим и в следующий раз они для выполнения такого же заказа собрались вместе и управились с ним за 8 часов, работая без перерывов (производительность каждого осталась прежней). Найдите T (ответ запишите в часах).

Решение. Пусть производительность каждого пекаря равна v_j . Тогда каждый из них сделал часть работы $A_j = v_j t_j$, причем $A_1 + \dots + A_{100} = 1$. По условию, для каждого пекаря имеем $t_j(v_1 + \dots + v_{100} - v_j) = \frac{k}{n}$. Добавляя сюда слагаемое A_j и сложив все 100 этих равенств, получим в левой части суммарное время T , умноженное на суммарную производительность, а справа получим $100 \cdot \frac{k}{n} + 1$. Второе условие задачи дает нам $8(v_1 + \dots + v_{100}) = 1$. Выражая отсюда суммарную производительность, получим

Ответ: $T = 8 \left(100 \cdot \frac{k}{n} + 1 \right) = 800 \frac{k}{n} + 8$.

Задача 2

В те дни в Космическом городке гостили астроном Альфа и лунолог Мемег и приехавшие вместе с ними два физика Квантик и Кантик.

Все четверо приехали специально, чтоб познакомиться с устройством космической ракеты и скафандров, так как сами собирались построить ракету и совершить космический полет к Земле.

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Лунатики построили твердотельный космический аппарат (не имеющий подвижных частей), способный выдерживать 100-кратную перегрузку (перегрузкой считайте ускорение свободного падения внутри снаряда, отнесенное к $g = 9,8 \text{ м/с}^2$). Его предполагается запустить как артиллерийский снаряд с поверхности Луны по параболической траектории. Ствол орудия уложен горизонтально на горное плато. Вычислите необходимую длину ствола.

Решение. Для полета по параболе снаряд должен набрать вторую космическую скорость, которая для Луны равна $\sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 2376 \text{ м/с}$. Имеем $v_0 = 0$, $v_1 = 2376 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $a = 100g = 980 \text{ м/с}^2$.

Тогда время полета снаряда в стволе равно $t = \frac{2376}{980} \approx 2,4245 \text{ с}$. Тогда длина ствола равна

Ответ: $S = \frac{at^2}{2} \approx 2880,3 \text{ м}$.

Задача 3

Наконец он выплакал все слезы, которые у него были, и встал с земли. И весело засмеялся, увидев друзей-коротышек, которые радостно приветствовали родную Землю.

– Ну вот, братцы, и все! – весело закричал он.

– А теперь можно снова отправляться куда-нибудь в путешествие!

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

В следующий раз коротышки отправились на Марс. Во время экспедиции Знайка решил провести следующий опыт. Он выдул два мыльных пузыря диаметрами $d_1 = 5$ см и $d_2 = 6$ см, осторожно проткнул мыльную пленку, образующую стенки пузырей, тонкой стеклянной трубкой, и соединил пузыри между собой. После этого весь воздух из одного пузыря полностью перетек в другой пузырь, который в результате увеличился в диаметре до $d_3 =$ см. Какое значение атмосферного давления p получил космонавт по результатам своего опыта? Ускорение свободного падения у поверхности Марса составляет $g = 3,7$ м/с². Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 0,04$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см³. Объемом трубки можно пренебречь. Ответ приведите в миллиметрах марсианского ртутного столба, округлив до сотых.

Решение. Давление внутри мыльного пузыря диаметром d определяется по формуле:

$p = p_0 + \frac{8\sigma}{d}$, где p_0 – атмосферное давление, σ – поверхностное натяжение мыльного

раствора. В этой формуле учтено, что мыльная пленка, образующая искривленные стенки пузыря, имеет две поверхности: внешнюю и внутреннюю, а толщина пленки пренебрежимо мала. Полагая, что воздух в условиях опыта можно считать идеальным газом, запишем

уравнения состояния воздуха в мыльных пузырях: $\left(p_0 + \frac{8\sigma}{d_1}\right) \frac{\pi}{6} d_1^3 = \nu_1 RT$,

$\left(p_0 + \frac{8\sigma}{d_2}\right) \frac{\pi}{6} d_2^3 = \nu_2 RT$, $\left(p_0 + \frac{8\sigma}{d_3}\right) \frac{\pi}{6} d_3^3 = (\nu_1 + \nu_2) RT$. Исключая из этих уравнений количества

воздуха в пузырях ν_1 , ν_2 и его абсолютную температуру T , получаем для p_0 выражение:

$p_0 = 8\sigma \cdot \frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{d_3^3 - d_1^3 - d_2^3}$. Поскольку ускорение свободного падения у поверхности Марса

$g = 3,7$ м/с², а плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см³, то искомое давление в миллиметрах

марсианского ртутного столба равно $p_{\text{Hg}} = \frac{p_0}{\rho g}$.

Ответ: $p_{\text{Hg}} = \frac{8\sigma}{\rho g} \cdot \frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{d_3^3 - d_1^3 - d_2^3}$.

Задача 4

Таким образом, Луна – это не полый шар, вроде резинового мяча, как предположил Знайка, а такой шар, внутри которого имеется другой шар, окруженный прослойкой из воздуха или какого-нибудь другого газа.

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Предположим, что модель Луны такова, как описана в книге. А именно, внешняя поверхность Луны есть шаровой слой толщиной 17,4 км, затем идет слой воздуха толщиной 120 км, а затем находится твердое шарообразное однородное ядро. Каково тогда ускорение м/с² свободного падения на поверхности этого внутреннего ядра? Масса Луны равна $7,3477 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны 1737,4 км, гравитационная постоянная $6,6741 \cdot 10^{-11}$ м³кг⁻¹с⁻². Ответ округлите до сотых.

Решение. Докажем прежде всего, что внешний шаровой слой не притягивает материальную точку внутри сферы. Для этого проведем из этой точки два конуса (двусторонний конус с общей высотой) с очень маленьким телесным углом. Тогда площадь поверхности сферы, высекаемая конусом можно считать равной площади основания конуса. Пусть высота первого

конуса h , а второго H , радиус основания первого конуса r , а второго R . В силу подобия $\frac{h}{H} = \frac{r}{R}$, т.е. площади оснований конусов относятся как $\left(\frac{h}{H}\right)^2$. Но тогда так же относятся объемы частей шарового слоя, попавшие в первый и второй конус, а значит и их массы. Поскольку силы тяготения равны $F_1 = \frac{Gm}{h^2}$ и $F_2 = \frac{GM}{H^2}$ соответственно (материальную точку берем единичной массы), то они равны по модулю и направлены противоположно, т.е. взаимно сокращаются. Поскольку наше рассуждение верно для любого двустороннего конуса, получаем результат – суммарное притяжение шарового слоя внутри сферы равно нулю.

Итак, достаточно написать закон тяготения для внутреннего ядра Луны, т.е. $a = \frac{GM}{R^2}$. По условию, $R = 1737,4 - 17,4 - 120 = 1600$ км. Масса внутреннего ядра есть масса всей Луны за вычетом массы шарового слоя (массой прослойки воздуха пренебрегаем), т.е. равна $7,3477 \cdot 10^{22} \left(1 - \frac{V_{\text{слоя}}}{V_{\text{общий}}}\right)$. Объем слоя равен разности объемов шаров, т.е. $V_{\text{слоя}} = \frac{4}{3}\pi(1737,4^3 - 1720^3)$. Общий объем есть сумма этого объема и объема внутреннего шара радиусом 1600 км. Отсюда $\frac{V_{\text{слоя}}}{V_{\text{общий}}} \approx 0,03539$,

Ответ: $a \approx 1,84532 \text{ м/с}^2$.

Задача 5

А ты не горюй, работы всем хватит, – сказал ему Винтик. – Во-первых, вокруг домов надо посадить цветы, чтоб было красиво; во-вторых, от электростанции до Космического городка надо провести электролинию, чтоб было электричество; в-третьих, надо сделать дорогу, заасфальтировать улицы, провести водопровод, отделать помещения...

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

В квадрате $ABCD$ со стороной 3 отметили середины всех сторон (точка E – на стороне AB , точка F – на стороне BC , точка G – на стороне CD и точка H – на стороне DA). Затем провели ломаную $AFDECHBGA$. Найдите площадь той части квадрата, в которую попал его центр.

Решение. Проведем диагональ BD и среднюю линию FH . Отметим точку Q пересечения FH и BG . Из теоремы Фалеса следует, что Q – середина BG . Заметим, что EC параллельна AG , откуда следует, что EC – средняя линия в треугольнике ABG . Значит, эта прямая пересекает сторону BG в ее середине – в точке Q . Аналогично доказываем, что диагональ BD , отрезок AF и отрезок CE пересекаются в одной точке (обозначим ее P). Обозначим еще центр квадрата через O .

Теперь заметим, что BG – медиана треугольника BCD , а значит и треугольника BOM , т.е. $\frac{OQ}{OM} = \frac{1}{2}$. Далее, $ABFH$ – прямоугольник, а значит FA – медиана треугольника BFH . Так как BO – тоже медиана в этом треугольнике, то P – точка пересечения медиан, откуда $\frac{OP}{OB} = \frac{1}{3}$. Тогда $S_{POQ} = \frac{1}{6}S_{BOF}$. Для остальных сторон все аналогично, т.е. центральная часть есть восьмиугольник, площадь которого равна $\frac{1}{6}$ часть суммы площадей треугольников $BOF, COF, COG, DOG, \dots$, т.е. площади всего квадрата.

Ответ: $\frac{9}{6} = 1.5$

Решение 2. Введем систему координат с центром в точке A и осями, направленными по AD и AB . Тогда точки имеют координаты $A = (0,0), B = (0,3), C = (3,3), D = (3,0), E = (0,1.5), F = (1.5,3), G = (3,1.5), H = (1.5,0)$. Тогда прямая AF имеет уравнение $y = 2x$, а прямая CE имеет уравнение $y = \frac{x}{2} + 1.5$. Тогда их точка пересечения (обозначим ее P находится из уравнения

$2x = \frac{x}{2} + 1.5$, откуда $P = (1,2)$. Аналогично, прямая BG имеет уравнение $y = 3 - x/2$, а тогда точка пересечения этой прямой и прямой CE (назовем эту точку Q) находится из уравнения $\frac{x}{2} + 1.5 = -\frac{x}{2} + 3$, откуда $Q = (1.5, 2.25)$. Наконец, центр квадрата (точка O) имеет координаты $(1.5, 1.5)$. Тогда площадь треугольника OPQ равна половине произведения основания OQ и высоты из точки P на эту сторону, т.е. равна $\frac{1}{2} \cdot 0.75 \cdot 0.5 = \frac{3}{16}$. В силу симметрии площадь центрального восьмиугольника составлены из восьми таких площадей, т.е. равна $\frac{3}{2}$.

Задача 6

Коротышки в Космическом городе уже давно спали.

Никто не ждал ничего плохого.

Не спали лишь Знайка и профессор Звездочкин.

Они были заняты математическими расчетами.

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Помогите Знайке завершить расчеты: найдите минимальное значение выражения

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

если a, b и c – различные натуральные числа, причем $ab + ac + bc \geq n$.

Решение. Известно, что для любых положительных чисел x_1, \dots, x_n имеет место неравенство

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Используя его для чисел a^3, b^3, c^3 , видим, что выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ неотрицательно. С другой стороны, при $a = b = c$ наше выражение равно нулю. Однако, по условию, числа a, b, c должны быть различными натуральными. Значит, надо взять их так, чтобы разности между ними были минимально возможными, т.е. равными 1. Итак, выражение будет минимальным, если $a = b - 1, c = b + 1$. В этом случае выражение имеет вид $f(b) = 9b$, а ограничение имеет вид $3b^2 - 1 \geq n$. Значит, надо взять наименьшее натуральное b , такое что $b \geq \sqrt{(n+1)/3}$.

Решение 2. Заметим, что

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Выражение во второй скобке равно

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2).$$

Это выражение достигает своего наименьшего значения (ноль) в случае $a = b = c$. По условию задачи, числа a, b, c различны, а тогда наименьшее значение выражения есть 3 и достигается в случае, когда a, b, c – идущие подряд натуральные числа. Отсюда получаем неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 6 + n$. Теперь заметим, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 6 + n + 2n = 6 + 3n.$$

Возвращаясь к первой строчке, видим, что $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 3\sqrt{6 + 3n}$. С другой стороны, взяв $a = b - 1, c = b + 1$ и выбирая число b наименьшим, но так, чтобы $a + b + c \geq \sqrt{6 + 3n}$, т.е. чтобы $b \geq \sqrt{(n+1)/3}$, получим ответ.

Ответ: Минимальное значение получается подстановкой чисел $b - 1, b$ и $b + 1$, где b – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $b \geq \sqrt{(n+1)/3}$.

Задача 7

Для лунных астрономов появление космического корабля над городом Фантомасом не было неожиданностью.

В свое время они точно засекли место, в котором прилунилась ракета.

С тех пор несколько десятков гравитонных телескопов, разбросанных в различных лунных городах, следили за этой точкой лунного небосвода.

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Предположим, что модель Луны такова, как описана в книге. А именно, внешняя поверхность Луны есть шаровой слой толщиной 17,4 км, затем идет слой воздуха толщиной 120 км, а затем находится твердое шарообразное однородное ядро. В попытке зафиксировать появление ракеты землян на внутренней стороне внешней поверхности Луны лунные коротышки используют телескопы с 40-кратным увеличением и полем зрения окуляра – 60 градусов. Предположив, что наблюдение непрерывно ведут 200 телескопов (области наблюдения не перекрываются), а появление можно равновероятно ожидать в любой точке, какова вероятность обнаружения?

Решение. Истинное поле зрения равно $60/40=1,5$ градуса, т.е. наблюдатель видит внутренность конуса с углом $\alpha = 0,75^\circ$ при вершине. Телесный угол конуса равен $2\pi(1 - \cos \alpha)$, а полный телесный угол равен 4π . Значит, искомая вероятность есть $p = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \cdot 200 \approx 0,0086$.

Ответ: 0,0086.

Задача 8

Кроме заботы о пище, Жулио проявил также заботу о чистоте.

– У вас, голубчик, в этой комнате слишком много скопилось дряни, сказал он однажды Спрутсу.

– Однако убирать здесь не стоит. Мы попросту перейдем в другую комнату,

а когда насвиним там, перейдем в третью, потом в четвертую,

и так, пока не загадим весь дом, а там видно будет.

Н.Н.Носов «Незнайка на Луне»

Дом Спрутса имеет форму прямоугольника, поделенного на квадратные комнаты. Жулио составил план дома на бумаге, разбив его, соответственно, на клетки (всего M строк, N столбцов). Однажды он отметил на плане захламленные комнаты, а потом вырезал отмеченные клетки. На сколько кусков распадётся оставшаяся часть плана? Две клетки не распадаются, если они имеют общую сторону. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая решает эту задачу.

Входные данные:

На вход подаются три натуральных числа – количество строк M , количество столбцов N карты и число K – количество вырезанных клеток. Затем последовательность K пар чисел – номер строки и номер столбца вырезанной клетки.

Выходные данные

Необходимо вывести одно число – количество кусков, на которые распался план.

Пример

Входные данные

4 4 5

1 2

2 1

2 3

3 2

4 2

1	■	■		
■		3	■	2
	4	■	■	

Выходные данные

4

Пояснение – смотри рисунок, где черным обозначены вырезанные клетки, а номера показывают части, на которые распалась бумага.

Критерии и технические баллы: верный ответ и решение – 10, верный ответ без решения – от 6 до 8, частично верный ответ – 5, есть продвижения – от 1 до 3.