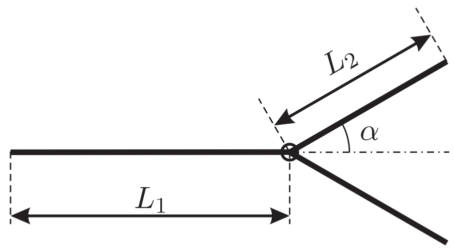
Профиль «Инженерные науки». 10 – 11 классы.

Решения и критерии. Максимум за одну задачу: 25 баллов

Задача 1. Инженер Александр решил соорудить у себя на дачном участке карусель для детей. У Александра трое детей, двое младших — близнецы. Для того, чтобы его дети могли кататься на карусели все вместе, её пришлось спроектировать нестандартного вида (см. рисунок).



Карусель, вид сверху

Известно, что масса старшего ребенка равна $m_1 = 50$ кг, а масса каждого из близнецов — $m_2 = m_3 = 30$ кг. Длина плеча карусели, на конце которого будет сидеть старший ребенок, была выбрана $L_1 = 1$ м. Предназначенные для близнецов плечи карусели Александр решил сделать симметричными и одинаковыми, а расположить их так, чтобы угол между ними был равен 2α, причём $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$. Каркас карусели планируется изготовить из тонких однородных стержней линейной плотностью $\lambda = 20$ кг/м.

Какую длину L_2 нужно выбрать для плеч карусели, предназначенных для катания близнецов, чтобы при одновременном катании всех троих детей не возникало горизонтальной нагрузки на ось вращения карусели? Каждый ребенок во время катания сидит строго на предназначенном для него месте.

Возможное решение

1) Для того, чтобы карусель не испытывала горизонтальных нагрузок при использовании нужно, чтобы центр масс всей системы (карусели вместе с размещёнными на ней детьми) оказался на оси вращения карусели.

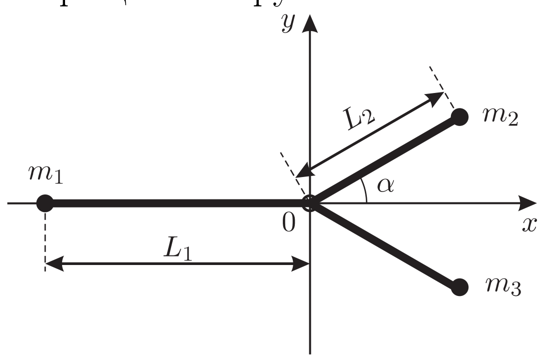


Рисунок 1. Карусель, вид сверху

2) Введём систему координат (см. рис. 1). При таком выборе системы координат, центр масс карусели должен находиться в точке O, т.е. $x_{\text{цм}} = 0$ и $y_{\text{цм}} = 0$.

3) Условие $y_{\text{цм}} = 0$ выполняется в силу симметрии системы.

4) Запишем условие $x_{\text{цм}} = 0$:

$$x_{\text{цм}} = \frac{m_1(-L_1) + L_2(m_2+m_3)\cos\alpha + \lambda L_1(-\frac{L_1}{2}) + 2\lambda L_2 \frac{L_2\cos\alpha}{2}}{m_1+m_2+m_3+\lambda L_1 + 2\lambda L_2} = 0.$$

$$-2m_1L_1 + 4m_2L_2\cos\alpha - \lambda L_1^2 + 2\lambda L_2^2\cos\alpha = 0.$$

5) Заметим, что $\cos\alpha = 4/5$ (угол в египетском треугольнике)

$$-2m_1L_1 + 4m_2L_2(4/5) - \lambda L_1^2 + 2\lambda L_2^2(4/5) = 0.$$

6) Решение полученного квадратного уравнения относительно L_2:

$$L_2 = \frac{-8m_2 + \sqrt{8^2m_2^2 + 8\lambda(10m_1L_1 + 5\lambda L_1^2)}}{8\lambda} =$$
$$= \frac{-4\cdot 30 + \sqrt{16\cdot 900 + 2\cdot 20(10\cdot 50\cdot 1 + 5\cdot 20\cdot 1^2)}}{4\cdot 20} =$$
$$= \frac{-2\cdot 3 + \sqrt{96}}{4} = 0{,}95\ \text{м} \approx 1\ \text{м}.$$

Ответ: 0,95 м.

Задача 2. На газораспределительную станцию из магистрального газопровода за каждый час поступает $V_0 = 22\cdot 10^3$ м^3 природного газа (метана), имеющего температуру $T_1 = 293$ К, и находящегося при давлении $p_0 = 5400$ кПа. Чтобы перед подачей к конечному потребителю понизить давление газа, его пропускают через специальную установку — турбодетандер. В ней газ вращает турбину, приводящую в действие электрогенератор, и сам при этом очень быстро расширяется. На выходе из турбодетандера давление газа составляет $p_\text{а} = 100$ кПа. КПД турбины вместе с генератором равен $\eta = 80\%$. Генератор за один час производит $W = 775$ кВт $\cdot$ ч электроэнергии. Молярная теплоёмкость метана при постоянном объёме равна $c_V = 26{,}54\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$. Известно, что при быстром расширении протекающий через турбодетандер газ совершает за час работу $A_\text{расш} = 1{,}130\cdot 10^{11}$ Дж.

Считая метан идеальным газом, оцените, сколько кубометров газа будет ежечасно подаваться из турбодетандера к потребителю?

Возможное решение

1) Работа, совершаемая турбиной за час:

$$A_\text{турб} = E/\eta = 775\cdot 10^3\ \text{Вт}\cdot 3600\ \text{с}/0{,}8 = 2790\cdot 10^6\ \text{Дж}/0{,}8 = 3487{,}5\cdot 10^6\ \text{Дж}. \qquad (1)$$

2) Запишем первый закон термодинамики:

$$c_V\nu T_1 = A_\text{турб} + A_\text{расш} + c_V\nu T_2, \qquad (2)$$

где ν — количество газа, протекающего за час через турбодетандер, c_V — молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме, $A_\text{расш}$ — работа газа при быстром расширении.

3) Найдём температуру газа T_2 на выходе из турбодетандера:

$$T_2 = (c_V\nu T_1 - A_\text{турб} - A_\text{расш})/(c_V\nu), \qquad (3)$$

4) Количество вещества газа ν, поступающее каждый час в турбодетандер, найдём из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$p_1V_1 = \nu RT_1, \tag{4}$$

$$\nu = (p_1V_1)/(RT_1). \tag{5}$$

5) После подстановки (5) в выражение (3) находим, что

$$T_2 = T_1 - \frac{(E/\eta + A_{\text{расш}})\,RT_1}{c_V p_1 V_1} = 203\ \text{К}.$$

.

6) Чтобы найти, сколько кубометров газа за каждый час будет подаваться из турбодетандера к потребителю, воспользуемся объединённым газовым законом:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \tag{6}$$

откуда выразим V_2:

$$V_2 = \frac{p_1V_1T_2}{T_1p_2}. \tag{7}$$

7) Подстановка числовых данных позволяет определить, какой объём газа будет ежечасно подаваться из турбодетандера к потребителю:

$$V_2 = \frac{5{,}4\cdot 10^6\cdot 22\cdot 10^3\cdot 203}{293\cdot 0{,}1\cdot 10^6} = 823\cdot 10^3\ \text{м}^3. \tag{8}$$

Ответ: $V_2 = 823\cdot 10^3$ м^3.

Задача 3. Перед собирающей тонкой линзой с фокусным расстоянием $F = 10$ см расположен равнобедренный треугольник ABC так, что его основание AB лежит на главной оптической оси линзы. Вершина A треугольника расположена на расстоянии $3F$ от оптического центра линзы. Площадь треугольника ABC равна площади треугольника $A_1B_1C_1$, где точки A_1, B_1 и C_1 — это изображения вершин треугольника ABC, даваемые линзой. Найдите длину основания треугольника ABC.

Возможное решение

1) Заметим, что в условии не сказано, какая из вершин основания находится ближе к линзе. Рассмотрим первый случай: ближе к линзе расположена вершина B (см. рис. 2). Второй случай (когда ближе к линзе расположена вершина A) рассмотрим в ходе решения. Также отметим, что рис. 2 является лишь принципиальной схемой, поясняющей ход лучей и формирование изображения, т.к. на рисунке условие равенства площадей не выполняется.

2) Обозначим расстояние от вершины A треугольника $\triangle ABC$ до линзы через $x_A = 3F$; расстояние от вершины B треугольника $\triangle ABC$ до линзы через x_B, а высоту треугольника как H_0.

Так как треугольник равнобедренный, то расстояние от вершины C треугольника $\triangle ABC$ до линзы равно: $x_C = (x_A + x_B)/2$.

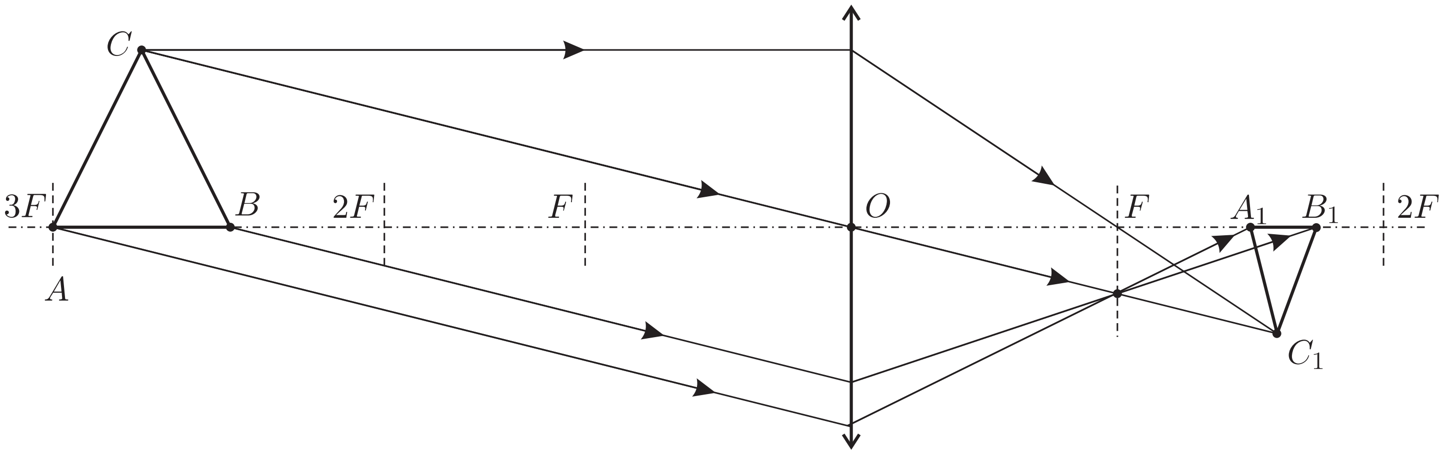


Рисунок 2

3) Используя формулу тонкой линзы, найдём расстояния от линзы до A_1, B_1, C_1 — изображений точек A, B, C (эти расстояния обозначим f_A, f_B, f_C):

$$\frac{1}{x_A}+\frac{1}{f_A}=\frac{1}{F}, \tag{1}$$

$$f_A=\frac{x_A F}{x_A-F}. \tag{2}$$

Аналогично,

$$\frac{1}{x_B}+\frac{1}{f_B}=\frac{1}{F},\quad \frac{1}{x_C}+\frac{1}{f_C}=\frac{1}{F} \tag{3}$$

$$f_B=\frac{x_B F}{x_B-F},\quad f_C=\frac{x_C F}{x_C-F}. \tag{4}$$

4) Выразим высоту H в треугольнике $\triangle A_1B_1C_1$, применив формулу: $\dfrac{H}{H_0}=\dfrac{f_C}{x_C}$:

$$H=H_0\frac{2F}{x_A+x_B-2F}. \tag{5}$$

5) Условие того, что площадь треугольника $\triangle A_1B_1C_1$ равна площади треугольника $\triangle ABC$, запишется в виде:

$$\frac{1}{2}\left(x_A-x_B\right)H_0=\frac{1}{2}\left(f_B-f_A\right)H. \tag{6}$$

Здесь учтено, что по (4) из условия $x_A>x_B$ следует $f_B>f_A$.

6) Заметим, что если выполняется условие $x_A<x_B$ (второй случай — точка A располагается ближе к линзе, чем точка B), то $f_B<f_A$. Получаем, что в правой и левой частях выражения (6) будут стоять площади треугольников, но с обратным знаком. Следовательно, уравнение (6) справедливо и для случая, когда точка A располагается ближе к линзе, чем точка B.

7) Подставляя в (6) выражения (2), (3) и (5), получим:

$$\frac{1}{2}\left(x_A-x_B\right)H_0=\frac{F^3H_0\left(x_A-x_B\right)}{(x_A+x_B-2F)(x_B-F)(x_A-F)}. \tag{7}$$

Упрощая выражение (7), получаем:

$$(x_A + x_B - 2F)(x_B - F)(x_A - F) = 2F^3. \tag{8}$$

8) Подставляя в (8) $x_A = 3F$, найдём x_B:

$$(3F + x_B - 2F)(x_B - F)(3F - F) = 2F^3,$$

$$(F + x_B)(x_B - F) = F^2 \Rightarrow x_B = F\sqrt{2}. \tag{9}$$

Мы получили, что $x_B < x_A$, следовательно, на рис. 2 расположение вершин треугольника ΔABC относительно линзы выбрано верным.

9) Длина основания AB треугольника $\triangle ABC$ равна:

$$L = (x_A - x_B) = 3F - F\sqrt{2} = F(3 - \sqrt{2}) \approx 1{,}6F = 16 \text{ см}.$$

Ответ: $AB = L = F(3 - \sqrt{2}) \approx 1{,}6F = 16$ см.

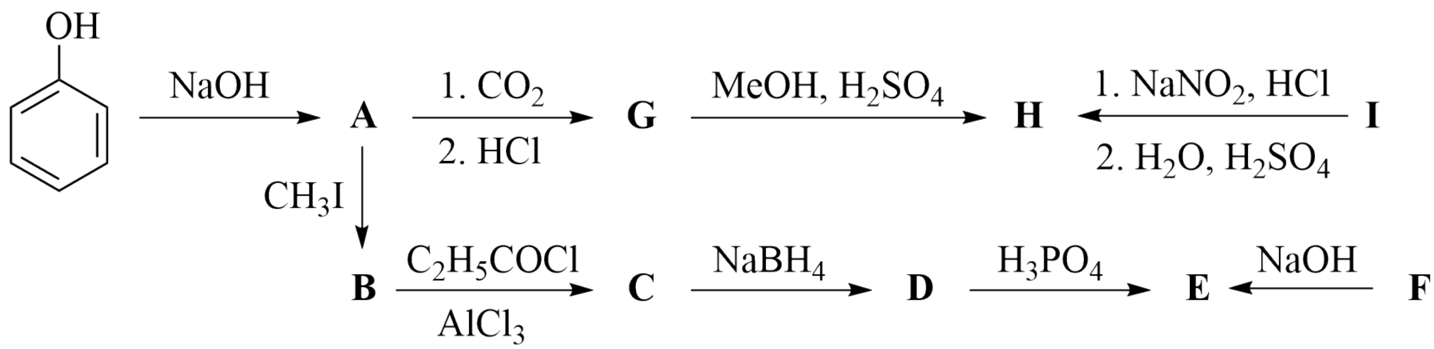


Рисунок 3

Задача 4. Многие вещества, используемые как ароматизаторы, относятся к ароматическим соединениям. Выше (см. рисунок 3) приведена цепочка превращений, с помощью которой из фенола можно получить разнообразные отдушки, с которыми мы встречаемся ежедневно.

Вещество **B** названо в честь аниса и может быть получено по реакции **A** с метилиодидом. При последовательном ацилировании по Фриделю-Крафтсу, восстановлением натрийборгидридом и дегидратацией фосфорной кислотой может быть получено соединение **E**, которое обладает запахом аниса. Его изомер **F** пахнет полынью и изомеризуется в **E** при действии щёлочи.

Важнейшее в фармацевтике соединение **G** — салициловую кислоту — в промышленности получают по реакции **A** с углекислым газом. При её этерификации метанолом с использованием серной кислоты в качестве катализатора может быть получено вещество **H** — основной компонент эфирного масла лекарственного растения гаультерии. Это же вещество может быть получено из амина **I** при его реакции с нитритом натрия в кислых условиях на холоде; полученная неустойчивая соль реагирует с водой в присутствии серной кислоты с образованием **H**. Вещество **I** обладает запахом винограда и используется в качестве ароматизатора газированных напитков.

Приведите структурные формулы веществ **A** – **I** и уравнения химических реакций, описывающих упомянутые превращения.

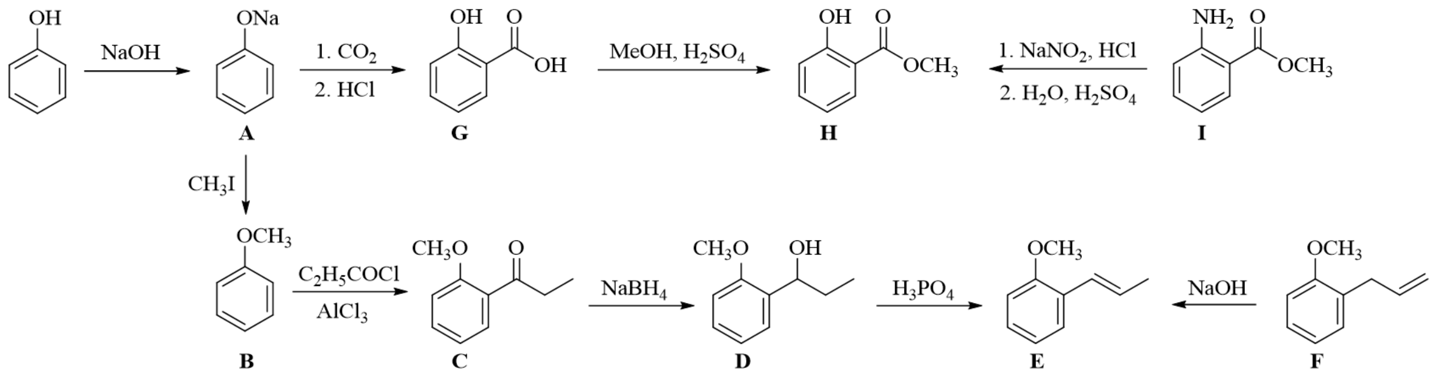


Рисунок 4

Возможное решение

При реакции фенола с гидроксидом натрия получается фенолят натрия, который затем можно метилировать метилиодидом с образованием анизола. Продукт ацилирования анизола по Фриделю – Крафтсу селективно восстанавливают боргидридом натрия до вторичного спирта. Полученный спирт дегидратируют с образованием более замещённой двойной связи. Это же вещество может быть получено из его изомера с терминальной двойной связью.

Фенолят натрия карбоксилируется углекислым газом с образованием салицилата натрия, который затем реагирует с соляной кислотой с образованием салициловой кислоты. Салициловая кислота затем вступает в реакцию этерификации с метанолом в присутствии серной кислоты. Это же вещество можно получить при разложении диазониевой соли, полученной по реакции метилантранилата с нитритом натрия в среде соляной кислоты.

Ответ: уравнения реакций и структурные формулы соединений представлены на рис. 4.