

# 1 Олимпиада «Ломоносов». Инженерные науки. 5 – 7 класс

## 1. Задача про тепловое расширение (25 баллов)

В солнечный день бензин в цистерне бензовоза может нагреваться. Цистерна представляет собой полый стальной цилиндр с горизонтальной осью, длиной 8000 мм и диаметром 2000 мм, заполненный  $x = 10$  кубометрами бензина при температуре  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Известно, что при нагреве на один градус объём бензина линейно увеличивается на  $0,124\%$ , а объём стали — на  $0,0045\%$ . Сколько литров воздуха останется в цистерне, когда бензин будет иметь температуру  $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

### Справочные данные

Для нахождения объёма цистерны воспользуйтесь выражением  $V = \pi \frac{D^2}{4} \cdot h$ , где  $D$  — диаметр цистерны, а  $h$  — её длина. В условиях данной задачи принять  $\pi = 3,1416$ .

### Требования к ответу

Ответ выразите в литрах и представьте в виде числа, округлив с точностью до целых, без указания единиц измерения.

## Возможное решение

1. Объём цистерны:  $V_{\text{ц}} = H \cdot \pi \cdot r^2 = 8 \cdot \pi \cdot 1 = 25,133\text{ м}^3$ .

2. При нагревании цистерны бензин и цистерна будут при одинаковой температуре.

3. При нагревании цистерны на  $\Delta t = t - 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  её объём увеличится на долю  $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 20) = 0,0009$ .

4. При нагревании бензина на  $\Delta t = t - 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  его объём увеличится на долю  $\beta = 124 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 20) = 0,0248$ .

5. Объём воздуха после нагрева:

$$V_{\text{возд}} = V_{\text{ц}} (1 + \alpha) - V_6 (1 + \beta)$$

6. При подстановке данных и значений параметров  $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $x = 10\text{ м}^3$  в итоговую формулу, получим значение объёма в литрах:

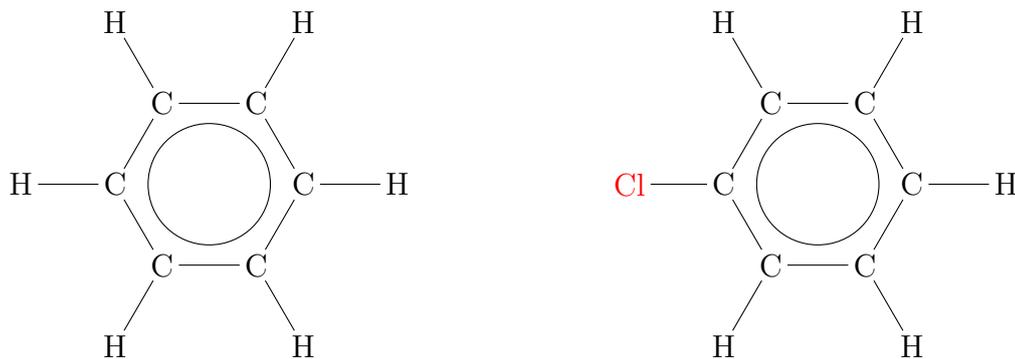
$$\begin{aligned} V_{\text{возд}} &= 8 \cdot 3,1416 \cdot 1 \cdot (1000 + 4,5 \cdot 10^{-2} \cdot (t - 20)) - x \cdot (1000 + 124 \cdot 10^{-2} \cdot (t - 20)) = \\ &= 8 \cdot 3,1416 \cdot 1 \cdot (1000 + 4,5 \cdot 10^{-2} \cdot 20) - 10 \cdot (1000 + 124 \cdot 10^{-2} \cdot 20) = 14907,41952 = 14907\text{ л.} \end{aligned}$$

## 2. Бензол (25 баллов)

Атомам углерода (их обозначают буквой C) удобно соединяться в кольцо, которое содержит шесть атомов (атомы расположены в вершинах правильного шестиугольника). Примером такого соединения атомов может служить молекула бензола, схематично изображённая на рисунке слева (такой рисунок называется структурной формулой). Атомы водорода обозначены буквой H, а химические связи — линиями. Химическая формула бензола выглядит так:  $C_6H_6$  — индексами обозначено число атомов данного типа. Можно получить молекулу хлорбензола, в которой один из атомов водорода замещён атомом хлора (см. рис. справа). Можно в молекуле заместить два и более атомов водорода атомами хлора. Сколько различных молекул можно получить из бензола путём замещения одного или нескольких атомов водорода атомами хлора? Молекулы считаются одинаковыми, если при повороте они становятся идентичными. Укажите в ответе число таких молекул, а в решении нарисуйте структурную формулу каждой из них.

### Требования к ответу

Количество различных молекул, которые можно получить из бензола путём замещения одного или нескольких атомов водорода атомами хлора, запишите в виде целого числа.

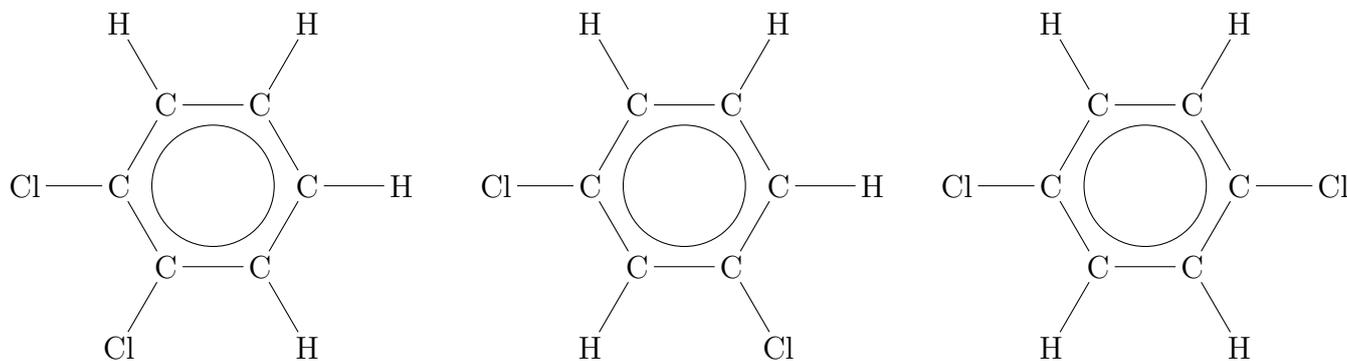


### Возможное решение

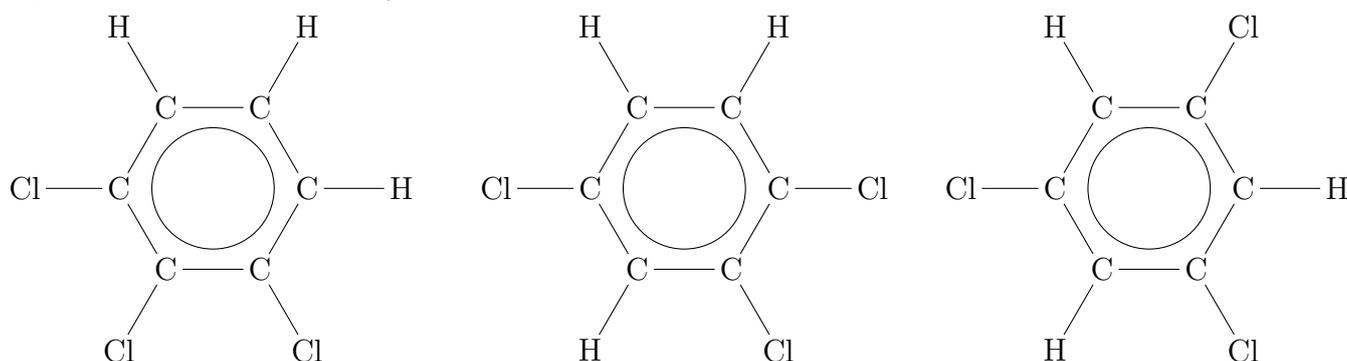
Можно определить число различных молекул простым перебором.

Хлорбензол — 1 молекула

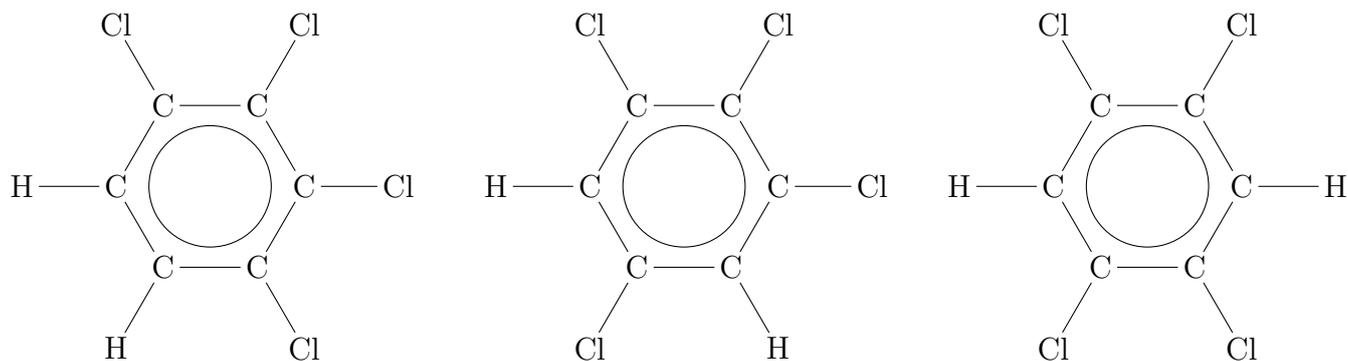
Дихлорбензол — 3 молекулы



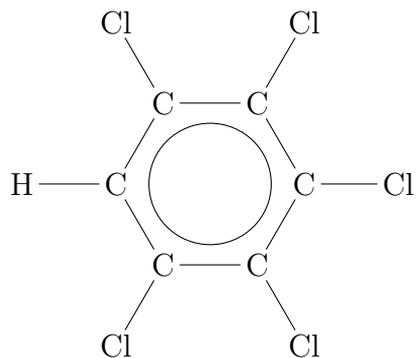
Трихлорбензол — 3 молекулы



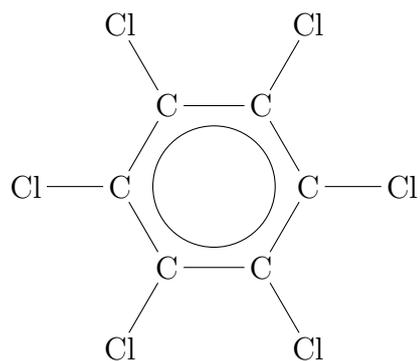
Тетрахлорбензол — 3 молекулы (структурные формулы получаются заменой в дихлорбензоле всех атомов хлора на атомы водорода и наоборот).



Пентахлорбензол — 1 молекула.



Гексахлорбензол — 1 молекула.



Всего — 12 различных молекул

### 3. Климат на планете Железяка (25 баллов)

Какова среднесуточная температура в первый день лета в некоторой точке на планете Железяке, если она равномерно растёт от  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  с полуночи до 10 часов утра по местному времени, затем до 3 часов дня остаётся равной  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  и, наконец, равномерно падает до  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$  до полуночи? Известно, что в сутках на планете Железяка 24 часа. Ответ выразите в единицах измерения, указанных в условии.

Требования к ответу

Значение среднесуточной температуры запишите в виде числа, округлив до целого, без указания единиц измерения.

#### Возможное решение

1. Для наглядности построим график температуры от времени

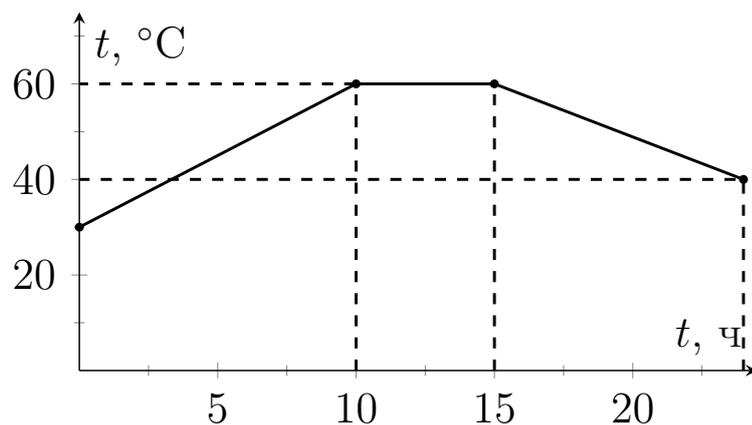
2. На первом участке — средняя температура равна полусумме начальной и конечной температур, т.е.  $45\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

3. На втором участке — средняя температура равна  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

4. На третьем участке — средняя температура равна  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

5. Средняя температура за сутки —

$$t = 1/24(45 \cdot 10 + 60 \cdot 5 + 50 \cdot 9) = 50\text{ }^{\circ}\text{C}.$$



## 4. Подготовка практикума для студентов (25 баллов)

Лаборанту поручили подготовить несколько вариантов задания для студенческого практикума. У лаборанта есть примерно 100 г некоторого вещества в виде порошка, а также 300 мл раствора А и 150 мл раствора В. В задании студентам будет нужно на каждый 1 г порошка добавить либо 3 мл раствора А, либо 4 мл раствора В.

Для взвешивания порций порошка имеются простые равноплечие рычажные весы и ёмкости для взвешивания. Если массы на чашках весов немного различаются, то весы можно уравновесить регулировочными винтами (длина плеч рычагов остаётся неизменной).

Например, чтобы взвесить 1 г порошка, нужно:

- 1) поместить на чаши весов две примерно одинаковые пустые ёмкости и уравновесить весы с помощью винтов,
- 2) поместить на одну чашу весов гирьку массой 1 г,
- 3) добавлять порошок в ёмкость на другой чаше до тех пор, пока весы вновь не придут в равновесие. В ёмкости для взвешивания окажется 1 г порошка.

Каждому студенту нужно было подготовить индивидуальный комплект: ёмкость с порошком известной массы и колбу с необходимым объёмом одного из растворов.

Подготовить колбы с раствором не составляло труда. Но, к сожалению, большинство гирек для взвешивания порошка было утеряно — у лаборанта есть лишь две гирьки массой 3 г и одна гирька массой 5 г. Лаборант может добавлять порошок в ёмкость одной или несколькими порциями, а также удалять избыток порошка. Однако масса порошка, не взвешенного на весах, считается недостоверной. Кроме того, все ёмкости для взвешивания незначительно отличаются по массе: различие в массе не выражается целым числом граммов.

Какое максимальное количество разных комплектов задания может составить лаборант? Варианты задачи, в которых выданы одинаковые массы порошка, но для определения предложены разные растворы (А или В), считаются разными.

### Требования к ответу

Максимальное количество разных вариантов задания, которые может составить лаборант, записать в виде целого числа.

## Возможное решение

1. Вначале покажем, как с использованием имеющихся гирек можно взвесить 1 г порошка:

- уравновесим на весах пустую ёмкость для взвешивания с помощью регулировочных винтов<sup>1</sup>.
- поместим на другую чашку весов трехграммовую гирьку и вновь уравновесим весы, добавляя порошок в ёмкость. Теперь в нашей ёмкости 3 г порошка.
- снимем гирьку с весов и вновь уравновесим их (не снимая ёмкость с порошком).
- поместим на чашу весов с ёмкостью с порошком пятиграммовую гирьку, а на пустую чашу весов — гирьку массой 3 г.
- чтобы теперь уравновесить весы, нужно отобрать из ёмкости 2 г порошка. Теперь в ёмкости 1 г порошка ровно.

---

<sup>1</sup>Если хода регулировочных винтов не хватит, то на вторую чашу можно поставить какую-нибудь ёмкость для взвешивания. Для решения здесь и далее не принципиально, как именно мы уравнивали весы — подстройкой винтов или размещением пустых ёмкостей на чашах. В дальнейшем в решении не будем конкретизировать, как именно мы уравниваем чаши.

Понятно, что, повторяя эти операции не с изначально пустой ёмкостью, а с ёмкостью, в которой уже есть 1 г порошка, в результате мы получим 2 г порошка в ёмкости. Таким образом, используя имеющееся оборудование, можно получить взвешенную порцию порошка массой, равной любому натуральному числу грамм (разумеется, пока не кончится порошок). При этом порошок можно использовать полностью. Например, если после приготовления последней порции порошка у нас останется всего 2 г, мы сможем взвесить их точно, уравновесив весы с пустой ёмкостью, а затем поместив гирьку массой 3 г на ту же чашу весов, что и ёмкость, и пятиграммовую гирьку — на вторую чашу весов.

2. Теперь разберемся, какие порции порошка нам нужно взвешивать, чтобы получить максимальное количество индивидуальных комплектов. Раствора А у лаборанта хватит на анализ всей массы порошка, а раствора В — не более чем на 37 г. Понятно, что максимальное число порций разной массы реализуется при последовательном приготовлении навесок порошка массой в целое число граммов, начиная с 1 грамма. Начинать нужно с навесок, которые потом будут укомплектованы раствором В, т.к. его хватит на меньшее количество порошка.

3. Попробуем разбить 37 г на максимальное количество порций различной массы в виде последовательных натуральных чисел.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 \text{ г.}$$

Больше уникальных индивидуальных комплектов с использованием раствора В составить нельзя. Всего получится 8 комплектов с раствором В.

4. После составления 8 индивидуальных комплектов с использованием раствора В у нас останется не более 64 г порошка.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66.$$

Поэтому с использованием раствора А получится еще 10 различных индивидуальных комплектов.

5. Соответственно, общее количество различных индивидуальных комплектов —  $8 + 10 = 18$ .

## 2 Олимпиада «Ломоносов». Инженерные науки. 8 – 9 класс

### 1. Задача про спиртовку (25 баллов)

Инженер Гайкин придумал установку по измерению КПД горелок. В этой установке жидкость поступает непрерывно и с постоянной скоростью из одного большого резервуара в трубку, нагревается за счёт горелки и поступает в другой резервуар. При этом измеряется температура жидкости на входе и выходе из трубки, а также расход жидкости и расход топлива в минуту. Как только показания термометров перестают меняться, Гайкин записывает эти значения, фиксирует расход жидкости и расход топлива. Зная удельную теплоёмкость жидкости в трубке и удельную теплоту сгорания топлива, Гайкин определяет КПД горелки.

В лабораторном журнале Гайкина одна из записей выглядела так:

- Жидкость в трубке — вода,  
удельная теплоёмкость  $c_{\text{воды}} = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ,  
плотность  $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ .
- Топливо — бензин,  
удельная теплота сгорания  $q_{\text{бенз}} = 42 \text{ МДж}/\text{кг}$ ,  
плотность  $\rho_{\text{бенз}} = 750 \text{ кг}/\text{м}^3$ .
- Температура на входе —  $20 \text{ }^\circ\text{C}$
- Температура на выходе —  $t = 70 \text{ }^\circ\text{C}$
- Расход жидкости — 1,5 литра в минуту
- Расход топлива — 20 миллилитров в минуту

Чему равен КПД горелки в этом опыте?

Требования к ответу

Ответ выразите в процентах с точностью до целых. В ответ запишите целое число без символа, обозначающего проценты.

### Возможное решение

1. Энергия, которую нужно сообщить жидкости в единицу времени

$$\frac{\Delta Q_{\text{пол}}}{\Delta \tau} = c \frac{\Delta m_{\text{ж}}}{\Delta \tau_{\text{ж}}} \Delta T = c \frac{\Delta V_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}}}{\Delta \tau_{\text{ж}}} \Delta T,$$

где  $\Delta m_{\text{ж}}$  — масса жидкости, перетекающая по трубке за время  $\Delta \tau_{\text{ж}}$ , а  $\Delta T = t - 20 \text{ }^\circ\text{C}$  — разница температур воды на входе и выходе из трубки. Далее формула была преобразована к объёмному расходу жидкости.

2. Энергия, которая выделяется в результате сгорания топлива в единицу времени

$$\frac{\Delta Q_{\text{зат}}}{\Delta \tau} = q \frac{\Delta m_{\text{т}}}{\Delta \tau_{\text{т}}} = q \frac{\Delta V_{\text{т}} \rho_{\text{т}}}{\Delta \tau_{\text{т}}},$$

где  $\Delta m_{\text{т}}$  — масса топлива, сгоревшего за время  $\Delta \tau_{\text{т}}$ . Далее формула была преобразована к объёмному расходу жидкости.

3. КПД — по определению — отношение «полезной» энергии (энергии, потраченной для нагрева воды) к «затраченной» (энергии, полученной в результате сгорания топлива)

$$\eta = \frac{\Delta Q_{\text{пол}}}{\Delta Q_{\text{зат}}} = \frac{c \Delta T \Delta V_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}}}{q \Delta V_{\text{т}} \rho_{\text{т}}} = t - 20$$

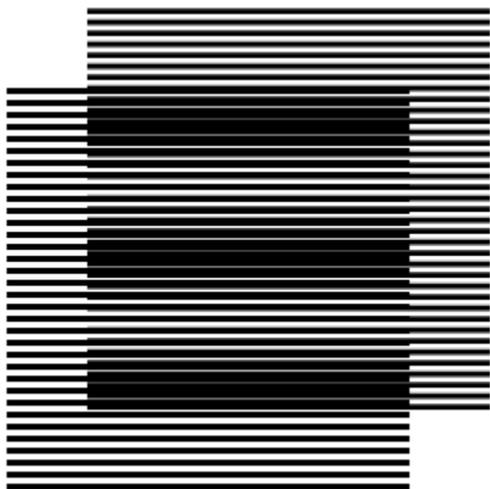
Здесь было учтено, что в условии  $\Delta \tau_{\text{ж}} = \Delta \tau_{\text{т}} = 1$  минута.

Для значения параметра  $t = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ , получаем  $\eta = 50\%$ .

## 2. Задача про муаровые узоры (25 баллов)

При фотографировании экрана монитора на полученном изображении видны муаровые полосы, аналогичные тем, что возникают на сетчатой или полосатой ткани при перекрытии двух её кусков. Возникновение муарового узора обусловлено тем, что нити одного слоя ткани в некоторых местах накладываются на нити второго слоя, а в других — на промежутки между этими нитями.

Визуализация муаровых полос представлена на рисунке:



На телефон, в матрице которого количество квадратных светочувствительных элементов равно 921600 (т.е. камера 0,9 мегапикселей) при соотношении сторон 16:9, полностью сфотографирован экран монитора. Изображение экрана занимает всю фотографию. В настройках компьютера выбрано оптимальное разрешение 1360\*765 (число пикселей равно 1040400). После кадрирования фотография распечатывается так, что на ней видны только  $x\% = 50\%$  исходного снимка по горизонтали.

Найти, сколько муаровых вертикальных полос будет видно на этой распечатке.

Требования к ответу

Ответ запишите в виде целого числа.

### Решение:

1. В качестве периодических накладывающихся элементов выступают ряды пикселей экрана и ряды пикселей на дисплее устройства, на который делаем снимок. Пиксели — это квадратики экрана, которые могут светиться разными цветами и являться точкой изображения. Квадратики пикселей образуют сетку (матрицу). Получается, что есть светящиеся полосы из квадратиков, между которыми располагаются тёмные полосы границ между пикселями. Матрица фотоаппарата, в том числе в телефоне, состоит из светочувствительных элементов — квадратиков, которые могут ловить свет и передавать в компьютер информацию о том, сколько и какого света поймал каждый квадратик. Эти светочувствительные квадраты тоже образуют сетку (матрицу), и компьютер, получая из каждого квадратика сетки информацию о полученном им свете, строит изображение. Но между светочувствительными элементами тоже есть граница, поэтому полученное при фотографии на цифровой фотоаппарат или телефон изображение — это тоже полосы света с тёмными полосками границы. Когда мы помещаем весь экран в кадр фотографии, мы словно смотрим на периодические светящиеся полосы через периодические отверстия, совсем как при взгляде на муаровую ткань. Часть светящихся полосок мы не видим не потому, что их нет, а потому, что их закрывает непрозрачная граница между отверстиями. Эти тёмные полосы встречаются периодически, и этот период мы можем найти.

2. Количество пикселей в каждой строке и столбце пропорционально длине строки и столбца. Число элементов в строках и столбцах матрицы телефона относится как 16:9. Пусть число элементов в строке равно  $16y$ , в столбце  $9y$ . Тогда общее число элементов матрицы равно  $144y^2$  и  $y = \sqrt{\frac{921600}{144}} = 80$  штук.

3. При параллельном наложении двух решёток с разными периодами образуются тёмные полосы там, где линии решёток не совпадают в положении, и светлые полосы там, где их положения совпадают. Совпадение полос происходит через интервал, на котором у одной решётки укладывается на одну полосу больше, чем у второй.

Длина изображения  $n$  пикселей экрана монитора укладывается в  $n+1$  ячейках матрицы телефона. Нам известно, что всё изображение монитора укладывается на матрице телефона:  $L_{\text{мон}} = knd_{\text{т}} = k(n+1)d_{\text{м}}$ ,  $n = 16$ , т.е. на каждые 16 пикселей матрицы телефона приходится одна тёмная полоса.

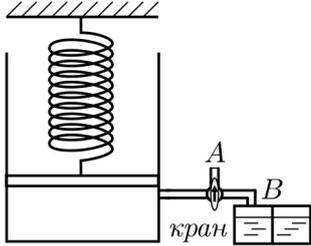
5. Всего на фотографии после кадрирования будет тёмных полос:

$$N = \left[ \frac{80 \cdot x \cdot 16}{100 \cdot 16} \right] = [0,8 \cdot x], \text{ где квадратные скобки обозначают взятие целой части числа.}$$

Для значения параметра  $x = 50\%$  получаем  $N = 40$  тёмных полос.

### 3. Задача про химическую реакцию с выделением газа (25 баллов)

Для получения некоторого количества газа в результате химической реакции используется следующая установка. Массивный поршень массы  $M = 1,7$  кг площади  $S = 26$  см<sup>2</sup> подвешивается на пружине жёсткости  $k = 1,5$  Н/м. С помощью крана цилиндрический сосуд под этим поршнем вначале был соединён с атмосферой (кран в положении А). В резервуаре находится перегородка, препятствующая смешиванию растворов пищевой соды и соляной кислоты равных молярных концентраций.



В начале эксперимента поршень находился на расстоянии  $h = 2$  см от дна сосуда, а кран в положении А. Далее кран переключается в положение В так, что сосуд соединяется с резервуаром, а потом в резервуаре убирают перегородку.

После завершения реакции поршень поднялся и пружина оказалась недеформированной. Считая, что в реакции все вещества прореагировали полностью, а процесс подъёма поршня был изотермическим, найти количество вещества пищевой соды, израсходованного в этой реакции.

При этом начальным объёмом воздуха над реакционной смесью в резервуаре, объёмом соединительных трубок по сравнению с объёмом цилиндрического сосуда, а также трением в системе пренебречь.

#### Справочные данные

Для нахождения объёма цилиндра воспользуйтесь выражением  $V = S \cdot h$ , где  $S$  — площадь основания цилиндра, а  $h$  — его высота.

Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К).

Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Комнатная температура  $t = 27$  °С.

Давление в комнате  $p = 10^5$  Па

#### Требования к ответу

Ответ выразите в молях и округлите до сотых. В поле ответа введите число без указания единиц измерения.

### Возможное решение

1. Пружина растянута, кран в положении А (атмосфера). Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$Mg = kx$$

2. Химическая реакция:



3. Количество вещества соды, израсходованного в этой реакции, и количество вещества углекислого газа, выделившегося в реакции, равны друг другу.

4. После завершения химической реакции пружина оказалась недеформированной, следовательно, поршень переместился на  $x$  вверх.

5. Давление под поршнем — давление  $p$  смеси газа и воздуха в сосуде. Давление над поршнем  $p_{\text{атм}}$  — атмосферное. Поршень не движется. Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$p_{\text{атм}}S + Mg = pS$$

6. Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$\text{до реакции } p_{\text{атм}}V_0 = \nu_{\text{возд}}RT, V_0 = Sh$$

$$\text{после реакции } pV_1 = (\nu_{\text{газа}} + \nu_{\text{возд}})RT, V_1 = S(h + x)$$

7. Выражаем  $\nu_{\text{соды}}$  через  $\nu_{\text{газа}}$ :

$$\nu_{\text{газа}} + \nu_{\text{возд}} = \frac{pS(h+x)}{RT}$$

$$\nu_{\text{газа}} = \frac{pS(h+x)}{RT} - \nu_{\text{возд}}$$

$$\nu_{\text{возд}} = \frac{p_{\text{атм}}Sh}{RT}$$

$$= \nu_{\text{газа}} = \frac{(p_{\text{атм}} + Mg/S)S(h+x) - p_{\text{атм}}Sh}{RT}$$

$$\nu_{\text{газа}} = \frac{(p_{\text{атм}}S + Mg)Mg/k + Mgh}{RT}$$

$$\nu_{\text{соды}} = \frac{(p_{\text{атм}}S + Mg)Mg/k + Mgh}{RT}$$

Подставляя данные задачи ( $S$  — в квадратных сантиметрах,  $M$  — в килограммах,  $k$  — в ньютонах, делённых на метр  $h$  — в сантиметрах), получим:

$$\nu_{\text{соды}} = \frac{(10^5 S \cdot 10^{-4} + M \cdot 10) M \cdot 10/k + M \cdot h/10}{8,31 \cdot 300} = \frac{(10S + 10M) M \cdot 10/k + M \cdot h/10}{8,31 \cdot 300}$$

Для значений параметров, указанных в условии, получаем:

$$\nu_{\text{соды}} = 1,26 \text{ моль.}$$

## 4. Определение металлов (25 баллов)

Студент решил прогулять практикум вместо этого поучаствовав в соревнованиях по спортивному ориентированию. У него было с собой всё, что необходимо для ориентирования в лесу: фонарик, компас, нож и бутылка с водой. Он уже разминался в стартовом городке, когда его настиг злой лаборант и сказал, что отпустит студента на соревнования только после решения сложной задачи. Студенту пришлось вернуться в лабораторию.

Студенту были выданы образцы металлов в неподписанных склянках: висмут, галлий, железо, индий, осмий, никель, ртуть, тербий. Времени на проведение качественных реакций не было, и различать металлы пришлось исключительно физическими методами. Так как лаборант был злым, то из оборудования студенту было предложено использовать только самое простое: рычажные весы без гирь, нагревательную плитку (максимальная температура  $+200\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) и холодильник ( $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) с морозилкой ( $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Кроме того, имеется обычный набор стеклянной лабораторной (не мерной) посуды и пластиковые стаканчики. Температура в лаборатории студенту неизвестна.

Лаборант был хоть и злым, но справедливым. Сколько металлов он мог попросить определить студента, чтобы у того был реальный шанс на успех? В ответе укажите число металлов, а в решении опишите, как их можно определить. Необходимые справочные данные найдите в открытых источниках и укажите ссылку на эти источники.

### Требования к ответу

В ответ запишите число металлов, которые можно гарантированно определить, используя физические методы исследования с помощью оборудования, данного в задаче.

### Возможное решение

1. Очевидным образом из всего набора определяются ртуть и галлий — только они являются жидкостями при температуре около комнатной. Если в лаборатории слишком жарко и галлий тоже жидкий (температура плавления  $29,8\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), то отличим его от ртути, поместив оба жидких металла в холодильник — замёрзнет только галлий. Если же галлий твердый, погреем его в руках.

2. С помощью плитки можно также определить индий (температура плавления  $157\text{ }^{\circ}\text{C}$ , то есть он расплавится, но заметно позже галлия, если поместить их на плитку рядом), на плавление остальных металлов мощности имеющейся плитки не хватит.

3. Наличие рычажных весов, простой посуды и пластиковых стаканчиков позволяет использовать метод гидростатического взвешивания для сравнения плотности металлов.

- Подготовим одинаковые по массе навески металлов, используя один и тот же противовес для всех образцов.

- Так как металл может быть в порошке, будем использовать пластиковый стакан.

- Уравновесим весы, на которых стоят ёмкости с водой, достаточные, чтобы в них поместился пластиковый стаканчик с отверстиями в боковых стенках, чтобы через них вода могла свободно просачиваться в стакан или из него.

- Опустим в эти ёмкости стаканчик так, чтобы он оказался в воде, но не касался при этом дна. Закрепим стаканчики на штативах в выбранном положении. Снова уравновесим весы, если это необходимо, доливая воду в одну из ёмкостей.

- Положим в один пластиковый стакан навеску одного из металлов, а в другой - навеску другого металла так, чтобы образцы оказались в воде целиком.

- Металл, у которого плотность меньше, вытеснит больше воды из стаканчика и эта чашка весов опустится.

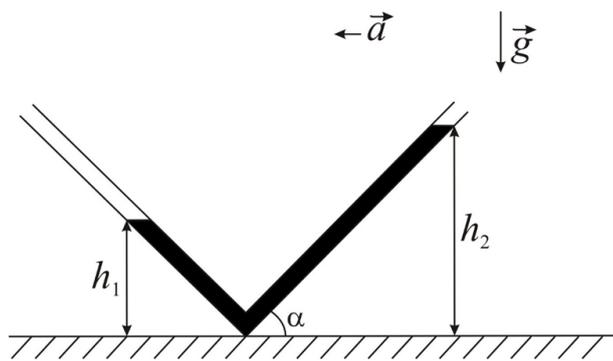
4. С помощью метода гидростатического взвешивания можно расставить образцы в порядке возрастания плотности.

5. Среди данных металлов все заметно отличаются по плотности и точности метода гидростатического взвешивания достаточно, чтобы определить все металлы. Таким образом, честный лаборант может требовать от студента точно определить все восемь металлов.

### 3 Олимпиада «Ломоносов». Инженерные науки. 10 – 11 класс

#### 1. Акселерометр (25 баллов)

Для изучения прямолинейного равноускоренного движения инженер Моторкин использует прибор, называемый акселерометром. Прибор представляет собой изогнутую под прямым углом тонкую трубку, в которую залито масло. Трубка расположена в вертикальной плоскости, угол наклона правого колена трубки к горизонтали  $\alpha = 45^\circ$ . При движении трубки с постоянным ускорением  $\vec{a}$  в горизонтальном направлении в указанной плоскости уровни масла в коленах трубки равны  $h_1 = 6$  см и  $h_2 = 10$  см соответственно (см. рис.). Считая, что ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, найдите модуль ускорения  $a$ .



#### Требования к ответу

Ответ выразите в метрах на секунду в квадрате и представьте в виде числа, округлив до сотых, без указания единиц измерения.

#### Возможные решения

##### Способ 1 (принцип эквивалентности Эйнштейна)

1. Поступательное движение с ускорением эквивалентно наличию дополнительной силы тяжести, т.е. можно ввести эффективное ускорение свободного падения:  $\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} - \vec{a}$ .

2. Поверхность жидкости в равновесии перпендикулярна ускорению свободного падения. Если поверхность жидкости направлена под углом к ускорению свободного падения, то на элементарный объём жидкости у поверхности будет действовать сила вдоль поверхности, под действием которой форма поверхности изменилась бы.

3. Если провести через поверхность жидкости прямую, она будет наклонена под углом  $\beta$ , тангенс которого выражается через  $a$  и  $g$ :  $\text{tg } \beta = \frac{a}{g}$ .

4. Пусть эта прямая пересекает горизонталь, на которой установлена трубка, на расстоянии  $x$  от угла трубки. Рассмотрим подобные треугольники:

$$\frac{x}{h_1} = \frac{x + h_2/\text{tg } \alpha + h_1/\text{tg } (\pi/2 - \alpha)}{h_2}$$

$$x = \frac{h_1}{h_2 - h_1} [h_2/\text{tg } \alpha + h_1/\text{tg } (\pi/2 - \alpha)]$$

5. Подставляем значение  $\text{tg } \beta$ :

$$\text{tg } \beta = \frac{a}{g} = \frac{h_1}{x} = \frac{h_2 - h_1}{h_2/\text{tg } \alpha + h_1/\text{tg } (\pi/2 - \alpha)} \Rightarrow a = g \frac{h_2 - h_1}{h_2/\text{tg } \alpha + h_1/\text{tg } (\pi/2 - \alpha)}$$

6. Подставляем числовые значения:

$$a = 10 \cdot \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} = 2,5 \text{ м/с}^2.$$

## Способ 2

1. Достроим нашу систему, как показано на рисунке. Т.к. мы добавили сообщающийся сосуд, который стыкуется с данным в условии на границе атмосфера-масло, то уровни будут одинаковыми. Далее будем рассматривать сосуд П-образной формы.

2. Гидростатическое давление в правом и левом коленях П-образного сосуда, определяемое силой тяжести:

$$p_1 = \rho g h_1, p_2 = \rho g h_2.$$

3. Запишем второй закон Ньютона для жидкости в горизонтальной части трубки в проекции на горизонтальную ось, направленную налево:

$$ma = S(p_2 - p_1)$$

4. Из прямоугольных треугольников:  $l_1 = h_1 / \operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha)$ ,  $l_2 = h_2 / \operatorname{tg} \alpha$

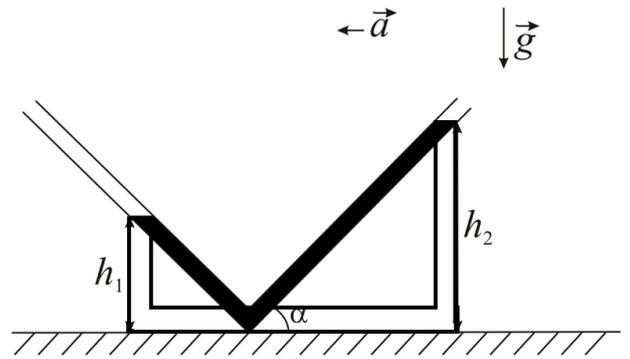
5. Подставляем в выражение для второго закона Ньютона

$$\rho S(l_1 + l_2)a = S\rho g(h_2 - h_1)$$

$$a = g \frac{h_2 - h_1}{h_2 / \operatorname{tg} \alpha + h_1 / \operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha)}$$

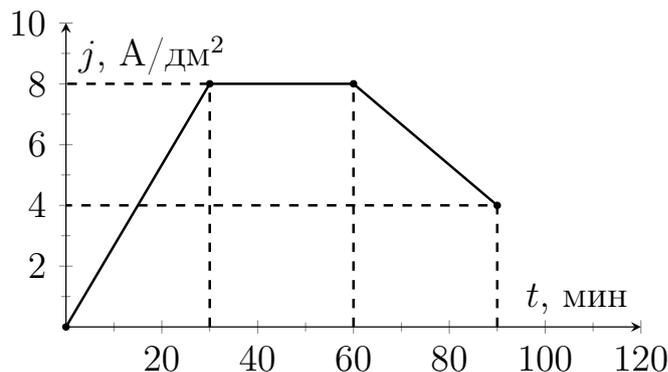
6. Подставляем числовые значения:

$$a = g \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} = 2,5 \text{ м/с}^2.$$



## 2. Электролиз

В электролитической ванне в течение 90 минут происходит электролиз раствора медного купороса  $\text{CuSO}_4$ . При этом плотность тока  $j$  меняется с течением времени  $t$  так, как показано на рисунке. Какая масса меди осядет за это время на катоде, если его площадь  $S = 20 \text{ см}^2$ ? Молярная масса меди  $M = 63,5 \text{ г/моль}$ , число Авогадро принять равным  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ , модуль заряда электрона —  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .



### Требования к ответу

Ответ выразите в граммах и представьте в виде числа, округлив до сотых, без указания единиц измерения.

### Возможное решение

1. Масса выделившегося вещества за время электролиза  $\Delta t$  при силе тока  $I$ :  $m = kq = kI\Delta t$ , где  $k = \frac{M}{e \cdot N_A \cdot n}$  выражается через параметры вещества ( $M$  — молярная масса вещества,  $n$  — валентность ионов) и постоянные ( $N_A$  — число Авогадро,  $e$  — заряд электрона).

2. Зная плотность тока  $j(t)$  можно найти мгновенное значение силы тока при электролизе:  $I(t) = jS$ , где  $S$  — площадь катода.

3. Чтобы найти заряд, протекший за время электролиза, нужно посчитать площадь под графиком зависимости силы тока от времени  $I(t)$ . График состоит из линейных участков. Площадь можно найти как сумму площади треугольника, прямоугольника и трапеции:  $q = q_1 + q_2 + q_3 = S \left[ \frac{j(30) \cdot 30}{2} + j(60)(60 - 30) + \frac{j(90) + j(60)}{2} (90 - 60) \right]$

4. Подставляем численные значения и выражаем заряд в кулонах с учётом того, что площадь  $S$  дана в квадратных сантиметрах, а плотность тока  $j$  — в амперах, делённых на квадратный дециметр:  $q = S [8 \cdot 15 + 8 \cdot 30 + 6 \cdot 30] \cdot 60/100 = 324 \cdot S$

5. Валентность ионов меди:  $n = 2$ .

6. Масса меди:  $m = \frac{M \cdot q}{e \cdot N_A \cdot n}$ .

7. Подставляем числовые данные ( $S$  — в квадратных сантиметрах):

$$m = \frac{63,5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 2} \cdot 324 \cdot S = 0,1068S = 2,14 \text{ (г)}.$$

### 3. Задача про кран (25 баллов)

Из плохо закрытого крана каждые  $t = 10$  секунд падает капля. Перед отрывом от сетки аэратора капля имеет примерно полусферическую форму. Считая смачивание сетки аэратора крана полным, оценить объёмный расход воды в сутки через этот кран. Плотность воды принять  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ , а коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ . Считать ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\pi = 3,14$ .

Требования к ответу

Выразите ответ в литрах и представьте в виде числа, округлив до десятых, без указания единиц измерения.

#### Возможное решение:

1. Сила тяжести полусферической капли равна  $F_{\text{т}} = mg = \rho_{\text{в}} \frac{2}{3} \pi R^3 g$

2. Она уравнивается силой поверхностного натяжения, приложенной к границе воды, сетки и воздуха. Угол смачивания равен нулю, следовательно, сила равна произведению коэффициента поверхностного натяжения воды на длину границы:

$$F_{\text{п.н.}} = \sigma \cdot L, \quad L = 2\pi R$$

3. Радиус капли, при котором она ещё держится определяется из условия равенства силы тяжести и силы поверхностного натяжения:

$$R = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho_{\text{в}} g}}$$

4. Расход воды:

$$V = \frac{2}{3} \pi \left( \frac{3\sigma}{\rho_{\text{в}} g} \right)^{3/2} \frac{24 \cdot 60 \cdot 60}{t}$$

5. Подставляя данные задачи, получим ( $t$  — в секундах):

$$V = \frac{2}{3} \cdot 3,14 \cdot \left( \frac{3 \cdot 73 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10} \right)^{3/2} \frac{24 \cdot 60 \cdot 60}{t} = \frac{18,5}{t} = 1,9 \text{ л}$$

#### 4. Сварка (25 баллов)

Одним из применений ацетилена является газовая сварка. До промышленного производства сварочных аппаратов с возможностью подключения баллонов с ацетиленом и кислородом для сварки ацетилен получали в результате реакции некоторого твёрдого вещества с молярной массой примерно 64 г/моль с водой.

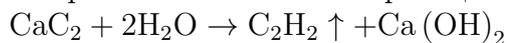
Александрю потребовалось сварить забор на дачном участке. Для этого нужна непрерывная работа сварочной горелки в течении времени  $t = 1$  час с расходом ацетилена 2 литра в минуту. Определить, какое твёрдое вещество должен использовать Александр, и указать это в решении. Найти минимальную массу этого вещества, которую нужно заготовить заранее, чтобы её хватило на все сварочные работы. Считать условия проведения работ нормальными.

##### Требования к ответу

Ответ выразите в граммах и представьте в виде числа, округлив до целых, без указания единиц измерения.

#### Возможное решение

1. Уравнение химической реакции для получения ацетилена (вещество — карбид кальция):



2. Объём ацетилена, необходимый для сварки:

$$V = 120t \text{ литров, где } t \text{ — в часах.}$$

3. Будем считать, что условия сварки стандартные. При этом 1 моль газа занимает 22,4 литра.

Количество молей ацетилена:

$$\nu = t \cdot 120/22,4 \approx 5,36t \text{ моль}$$

4. Количество вещества карбида кальция и количество вещества ацетилена равны друг другу.

5. Искомая масса карбида кальция равна ( $t$  — в часах):

$$m = \nu \cdot M = 5,36t \cdot 64 \approx 343t = 343 \text{ г.}$$