ПРАВИЛА ПРОВЕДЕНИЯ ОЧНОГО ТУРА УНИВЕРСИАДЫ "ЛОМОНОСОВ. КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ"

Очный тур универсиады проходит 14 апреля в 12:00 по московскому времени. Продолжительность тура 240 минут.

Вариант включает "Общую часть" (задания 1-4), часть "Механика и математическое моделирование" (задачи 5-8) и часть "Прикладная математика и информатика" (задания 9-12). Решение задач общей части обязательно для всех участников. Помимо этого, каждый участник может выбрать одно из направлений. Для этого он указывает выбранное направление на титульном листе работы и решает блок из четырех задач, соответствующий выбранному направлению. Участник может выбрать оба направления и решать оба блока задач. Итоговая оценка работы по данному направлению складывается из баллов, полученных участником за общую часть и за блок задач данного направления. Если участник указал оба направления, то он получает две оценки.

Определение победителей и призеров производится независимо по каждому направлению. Победителям и призерам предоставляются льготы при поступлении в 2019 году в магистратуру факультета космических исследований и магистратуру механико–математического факультета МГУ по соответствующему направлению, согласно правилам приема.

Подробную информацию можно получить в приемной комиссии факультетов или на сайтах.

Общая часть

Задача 1. *A) При каком значении вещественного параметра a кривая, заданная уравнением $x^2 + ay^2 - 2x + 2ay = 3 - a$, является окружностью?*
B) Найдите координаты центра и радиус полученной окружности.

Ответ:. A) $a = 1$. B) Центр $(1, -1)$, радиус 2.

Задача 2. *A) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{2xy-1}{x^2+1} = 0$.*
B) Среди всех решений найдите то, для которого $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} y(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Ответ:. A) $y(x) = \frac{c+x}{x^2+1}$. B) $\frac{1}{2}$.

Задача 3. *A) При каждом значении параметра $t \in \mathbb{R}$ найдите на прямой $y = tx$ ближайшую точку к точке $(0, 4)$. В ответе укажите координаты $x(t)$, $y(t)$ найденной точки.*
B) Найдите значение производной y'_x полученной параметрически заданной функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке $t = 0$.

Ответ:. A) $x(t) = \frac{4t}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{4t^2}{1+t^2}$ или $x^2 + (y-2)^2 = 4$. B) 0.

Задача 4. *A) Элементы матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — четыре независимые случайные величины, подчиненные закону распределения: $P(x = -1) = P(x = 0) = P(x = 1) = 1/3$ (т.е. каждая случайная величина принимает значения -1, 0 и 1 с равными вероятностями). Найдите закон распределения случайной величины bc.*
B) Найдите вероятность того, что матрица A положительно определена.

Ответ:. A) $P(x = -1) = P(x = 1) = 2/9$, $P(x = 0) = 5/9$. B) $1/9$.

Механика и математическое моделирование

Задача 5. *В области* $\mathbb{C} \setminus [-3,3]$ *выделена голоморфная ветвь* $f(z)$ *функции* $\sqrt[4]{(z^2-4)(z^2-9)}$. *Известно, что* $f(5) = 4\sqrt{21}$. *Найдите* $f(-5)$.

Ответ:. $f(-5) = -4\sqrt{21}$,

Задача 6. *Найдите функцию* $u(x,t)$ *— решение задачи Коши* $u'_t = 16u''_{xx}$ *при* $0 < x < 3$, $t > 0$, *с начальным условием* $u(x,0) = x$ *и граничными условиями* $u(0,t) = u(3,t) = 0$.

Ответ:. $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}6}{\pi n} e^{-16\pi^2 n^2 t/9} \sin \dfrac{\pi n x}{3}$.

Задача 7. *Материальная точка движется по плоскости по закону* $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t$, $y(t) = -2t^2$, $t \in [0, +\infty)$. *Найдите перемещение точки за время* $t \in [1,2]$. *Найдите путь, пройденный точкой за это время. Найдите работу, которую совершает сила* $F = (y, -x)$ *по перемещению точки вдоль данной кривой за это время.*

Ответ:. 6, $\frac{20}{3}$, $-\frac{88}{5}$.

Задача 8. *Является ли точка* $\lambda = 1/2$ *собственным значением оператора*

$$A: \, f(\cdot) \to g(\cdot), \quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt,$$

действующего в пространстве непрерывных функций с нормой $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$? *Найдите весь спектр этого оператора.*

Ответ:. Да. Окружность $|\lambda - 1/2| \leq 1/2$.

Прикладная математика и информатика

Задача 9. *А) Найдите общее решение разностного уравнения* $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$, $n = 0, 1, \ldots$.
В) Найдите все значения параметра $a \in \mathbb{R}$, *при которых все решения уравнения* $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$ *имеют конечный предел при* $n \to +\infty$*?*

Ответ:. А) $x_n = C_1 + C_2 n$ В) $a \in (-2, 2)$.

Задача 10. *Текст, в котором все слова состоят только из букв* a, b, c, d, e *закодировали по правилу*

$$a \mapsto 10 \quad b \mapsto 101 \quad c \mapsto 110 \quad d \mapsto 0101 \quad e \mapsto 1001.$$

Затем полученый код передали по каналу с возможными помехами в результате чего могла произойти ошибка в одном из битов.
А) Получено сообщение 1001010110001. *Какое сообщение было передано?*
В) Является ли схема кодирования однозначно декодируемой?

Ответ:. А) $edab$ В) нет.

Задача 11. *В витрине ювелирного магазина стоит манекен, на шею которого надето ожерелье. Оно состоит из N колечек, нанизанных на замкнутую нить. Все колечки имеют разные размеры. В зависимости от размера колечки пронумерованы числами от 1 до N, начиная с самого маленького и до самого большого. Колечки можно передвигать вдоль нити и протаскивать одно через другое, но только в том случае, если номера этих колечек отличаются более чем на единицу. Продавец хочет упорядочить колечки так, чтобы они располагались по возрастанию номеров вдоль нити по часовой стрелке. Снимать ожерелье с манекена нельзя. Требуется написать программу, которая по заданному начальному расположению колечек находит последовательность протаскиваний колечек одно через другое, приводящую исходное расположение колечек в желаемое.*

Входные данные. Первая строка входных данных содержит число N ($2 \le N \le 50$)*. Во второй строке через пробел следуют N различных чисел от 1 до N — номера колечек, расположенных вдоль нити по часовой стрелке.*

Выходные данные. Ваша программа должна вывести описание процесса упорядочения. В каждой строке выходных данных, кроме последней, должны быть записаны через пробел два числа, указывающие номера колечек, протаскиваемых друг через друга. В последней строке должен стоять ноль. Количество выводимых строк не должно превышать 50000.

Если требуемого упорядочения колечек достичь не удается, программа должна вывести одно число –1.

Примеры
входные данные
4
3 1 2 4
выходные данные
4 2
4 1
0

Задача 12. *Снимок поверхности представляет собой растр* $N \times M$, *который имеет элементы, раскрашенные в 256 оттенков серого. Как бы вы спроектировали алгоритм,* *анализирующий этот снимок и выделяющий на нем близкие по яркости области? Оцените сложность алгоритма по времени и памяти, опишите границы его применимости. Задача предполагает текстовое решение.*