Задача 1. *Найдите предел последовательности*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^n}{3^{n+3}-1}.$$

Приведите полное решение.

Ответ:. $\dfrac{1}{27}$

Задача 2. *Найдите обратную матрицу A^{-1}, если*

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Приведите полное решение.

Ответ:.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1,6 & 0,6 & 2,4\\ -1,4 & 0,4 & 1,6\\ -0,4 & 0,4 & 0,6\end{pmatrix}.$$

Задача 3. *Найдите решение дифференциального уравнения*

$$-y''+y=x^2, \qquad x\in\mathbb{R}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y'(0)=2$. Приведите полное решение.

Ответ:.

$$y(x)=e^x-e^{-x}+x^2+2$$

Задача 4. *Напишите уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$, которая содержит прямую $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ и при этом параллельна прямой $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$. Приведите полное решение.*

Ответ:. $x-y-z+4=0$.

Задача 5. *Найдите все одномерные подпространства в $\mathbb{R}^2$, инвариантные относительно оператора A, заданного матрицей $\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ в стандартном базисе. Приведите полное решение.*

Ответ:. Линейная оболочка вектора $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ и вектора $\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$.

Задача 6. *Плотность вероятности случайной величины X равна*

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\notin[-1,1],\\ ax^2+bx+c, & \text{если } x\in[-1,1].\end{cases}$$

Найдите a, b и c, если математическое ожидание $E(X)=0$, а дисперсия $D(X)=\frac{19}{45}$. Приведите полное решение.

Ответ:. $a = 1/2$, $b = 0$, $c = 1/3$.

Задача 7. *Найдите дважды непрерывно дифференцируемую функцию* $u(t, x)$*, определенную при* $x \geq 0$*,* $t \geq 0$*, такую, что*

$$\begin{cases} u''_{tt} = 9u''_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u'_t(x, 0) = 1 - x^2, \\ u'_x(0, t) = 0. \end{cases}$$

Приведите полное решение.

Ответ:. $u(t, x) = -3t^3 + t - tx^2$.

Задача 8. *Сколько существует попарно неизоморфных простых графов (без петель и кратных ребер) с 6 вершинами и 12 ребрами? Приведите подробное решение.*

Ответ:. 5.

Задача 9. *Найдите координаты центра массы дуги однородной кривой*

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

где $a > 0$ *фиксировано. Приведите подробное решение.*

Ответ:. $x = 0$, $y = \dfrac{3a}{\pi}$.

Задача 10. *Найдите норму линейного функционала*

$$F(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt - x(0),$$

действующего из пространства непрерывных функций $x \in C[-1, 1]$ *с нормой* $\|x\| = \max\limits_{t\in[-1,1]} |x(t)|$ *в* $\mathbb{R}$*. Приведите подробное решение.*

Ответ:. 2.

Задача 11. *В области* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *зафиксирована голоморфная ветвь* $f(z)$ *многозначной аналитической функции* $\dfrac{\ln z}{z - i}$*. Известно, что* $f(1) = 0$*. Найдите*

$$\int\limits_{|z-i|=1/2} f(z)\,dz$$

(окружность $|z - i| = 1/2$ *проходится один раз против часовой стрелки). Приведите подробное решение.*

Ответ:. $-\pi^2$.

Задача 12. *Громозека рассматривал старинные карты Ганимеда. Карты были выполнены в различном масштабе, но Громозека помнил со студенческих времен рассказ учителя геометрии о том, что если взять две карты одной и той же области, сделанные с разным масштабом, и расположить меньшую поверх большей так, что меньшая карта окажется строго внутри большей, то можно найти такую точку (она называется "неподвижная точка"), что то, что изображено в этой точке на обеих картах соответствует одной и той же точке местности.*

Помогите Громозеке найти неподвижную точку двух карт. Решение этой задачи должно быть сдано как программа на вашем любимом языке программирования.

Входные данные Все карты имеют форму прямоугольника. Первая строка входного файла содержит два вещественных числа: ширину X и длину Y большей карты $(1 \leq X \leq 1000, 1 \leq Y \leq 1000)$. *Карта нарисована в декартовой прямоугольной системе координат так, что углы карты расположены в точках с координатами* $(0,0)$, $(X,0)$, (X,Y), $(0,Y)$.

Вторая строка содержит восемь вещественных чисел, описывающих положение углов меньшей карты в той же самой системе координат. Сначала задаются координаты того угла плана, который соответствует углу бльшей карты с координатами $(0,0)$, *затем* $(X,0)$, (X,Y), *наконец,* $(0,Y)$. *Гарантируется, что входные данные корректны, то есть план является прямоугольником, линейные размеры плана находятся в полном соответствии с линейными размерами карты.*

Все числа во входном файле вещественные.

Выходные данные В первую строку выходного файла выведите 2 вещественных числа — координаты неподвижной точки.

Примеры. входные данные:

10.00000 5.00000

3.00000 2.50000 1.00000 2.50000 1.00000 1.50000 3.00000 1.50000

выходные данные:

2.500 2.083