

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2020/21 учебного года для 5–6 классов

Задача 1.

В-1

Мама сказала Диме, что он должен съесть 13 ложек каши. Дима сказал своему другу, что съел 26 ложек каши. Дальше каждый ребёнок, рассказывая о подвиге Димы, увеличивал количество съеденной Димой каши в 2 или 3 раза. В результате один из детей рассказал маме Димы о 33696 ложках каши. Сколько всего раз дети, включая Диму, рассказывали о подвиге?

Ответ: 9

Решение. $33696 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 13$. Отсюда следует, что история о подвиге была пересказана 5 раз с удвоением количества каши и 4 раза — с утроением, итого 9 раз.

В-2

Папа уговорил Наташу съесть 11 ложек каши. Наташа сказала своей подруге, что съела 22 ложки каши. Дальше каждый ребёнок, рассказывая о подвиге Наташи, увеличивал количество съеденной ею каши в 2 или 3 раза. В результате один из детей рассказал папе Наташи о 21384 ложках каши. Сколько всего раз дети, включая Наташу, рассказывали о подвиге?

Ответ: 8

В-3

Мама сказала Грише, что он должен съесть 3 ложки каши. Гриша сказал своему другу, что съел 9 ложек каши. Дальше каждый ребёнок, рассказывая о подвиге Гриши, увеличивал количество съеденной Гришей каши в 3 или 5 раз. В результате один из детей рассказал маме Гриши о 18225 ложках каши. Сколько всего раз дети, включая Гришу, рассказывали о подвиге?

Ответ: 7

В-4

Папа уговорил Таню съесть 7 ложек каши. Таня сказала своей подруге, что съела 21 ложку каши. Дальше каждый ребёнок, рассказывая о подвиге Тани, увеличивал количество съеденной ею каши в 2 или 3 раза. В результате один из детей рассказал папе Тани о 27216 ложках каши. Сколько всего раз дети, включая Таню, рассказывали о подвиге?

Ответ: 9

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2020/21 учебного года для 5–6 классов

Задача 2.

В-1.

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в получасе от него. Через какое-то время все трое встретились в одной точке, после чего продолжили свой путь. Через сколько минут после встречи черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 28

Решение. Примем весь путь черепахи за 1 и пусть x — скорость 1-го львенка. Тогда скорость 2-го львенка равна $1,5x$, а скорость черепахи — $1/30$. Весь путь до водопоя для 1-го львенка составил $5x$. Значит, встреча со 2-м львенком произошла через $5x/(x+1,5x) = 2$ минуты после начала движения. Столько же времени двигалась до встречи и черепаха. Оставшееся расстояние черепаха прошла за $30 - 2 = 28$ мин.

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 7,5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в получасе от него. Через какое-то время все трое встретились в одной точке, после чего продолжили свой путь. Через сколько минут после встречи черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 27,5

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 7 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в получасе от него. Через какое-то время все трое встретились в одной точке, после чего продолжили свой путь. Через сколько минут после встречи черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 28

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 3 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в получасе от него. Через какое-то время все трое встретились в одной точке, после чего продолжили свой путь. Через сколько минут после встречи черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 38,5

Задача 3.

В-1

Квадрат со стороной 75 мм разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из этих прямоугольников вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему равен этот периметр? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 20

Решение. У трёх прямоугольников одна из сторон одинакова и равна 75 мм. Сумма длин двух таких сторон у одного из прямоугольников равна полусумме длин всех таких сторон у двух других. Значит, другая сторона первого прямоугольника также равна полусумме других сторон двух других прямоугольников. Значит, она равна $75 : 3 = 25$ мм, откуда периметр первого прямоугольника равен $2 \cdot (25 + 75) = 200$ мм = 20 см.

В-2

Квадрат со стороной 105 мм разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из этих прямоугольников вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему равен этот периметр? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 28

В-3

Квадрат со стороной 135 мм разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из этих прямоугольников вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему равен этот периметр? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 36

В-4

Квадрат со стороной 165 мм разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из этих прямоугольников вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему равен этот периметр? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 44

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2020/21 учебного года для 5–6 классов

Задача 4.

В-1

Найдите наименьшее 12-значное натуральное число, которое делится на 36 и содержит в своей десятичной записи все 10 цифр.

Ответ: 100023457896

Решение. Число делится на 4 и на 9. Так как сумма десяти цифр равна 45 (делится на 9), то к этим десяти цифрам должны быть добавлены такие две цифры, сумма которых равна 0, 9 или 18. Так как нам требуется наименьшее число, то добавим две цифры 0 и поставим число 10002345 в начале требуемого числа (это минимальное возможное «начало» числа). Оставшиеся цифры 6, 7, 8 и 9 нужно расположить так, чтобы число делилось на 4. Значит, последние две цифры должны быть 68, 76 или 96. Минимум — 7896.

В-2

Найдите наименьшее 13-значное натуральное число, которое делится на 75 и содержит в своей записи все 10 цифр.

Ответ: 1000023468975

Решение. Число делится на 3 и на 25. Сумма десяти цифр равна 45, (делится на три), так что три дополнительные цифры записи числа в сумме должны дать 0, 3, 6, ..., 27. Чем старше разряд, тем меньшую цифру лучше в него ставить, поэтому возьмём три нуля и поставим число 10000 в начале требуемого числа. Чтобы число делилось на 25, нужно чтобы в конце числа стояло 25, 50 или 75. Первые два варианта тратят маленькие цифры, которые лучше поставить в разрядах постарше, поэтому выбираем 75 и получаем ответ: 1000023468975.

В-3

Найдите наибольшее 12-значное натуральное число, которое делится на 36 и содержит в своей десятичной записи все 10 цифр.

Ответ: 999876543120

Число делится на 4 и на 9. Так как сумма десяти цифр равна 45 (делится на 9), то к этим десяти цифрам должны быть добавлены такие две цифры, сумма которых равна 0, 9 или 18. Чем старше разряд, тем большую цифру стоит в него ставить, поэтому добавим к десяти цифрам две девятки и начнём число так: 999.... Для делимости на 4 нужно, чтобы последние две цифры образовывали делящееся на 4 число: 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, ..., 96. Из этих вариантов лучше всего 20, потому что он оставляет большие цифры для старших разрядов (у нас всего один ноль, так что 00 отпадает). В итоге получаем число 999876543120.

В-4

Найдите наибольшее 13-значное натуральное число, которое делится на 75 и содержит в своей записи все 10 цифр.

Ответ: 9999876432150

Решение. Число делится на 3 и на 25. Сумма десяти цифр равна 45, (делится на три), так что три дополнительные цифры записи числа в сумме должны дать 0, 3, 6, ... 27. Чем старше разряд, тем большую цифру лучше в него ставить, поэтому возьмём три девятки и начнём число так: 9999.... Чтобы число делилось на 25, нужно, чтобы в конце числа стояло 25, 50 или 75. Пятёрка тратится в любом случае, и лучше всего выбрать 50, чтобы оставить для старших

разрядов не 0, а 7 и 2. В итоге получаем число 9999876432150.

Задача 5.

В-1

Птенцы вылупляются в ночь с воскресенья на понедельник. Две недели птенец сидит, раскрыв клюв, третью неделю молча обрастает перьями, а на четвёртую улетает из гнезда. На прошлой неделе в гнезде 20 птенцов сидели, раскрыв клюв, а 14 обрастали перьями, а на этой неделе 15 сидели с раскрытым клювом и 11 обрастали перьями. а) Сколько птенцов сидели с раскрытым клювом на позапрошлой неделе? б) Сколько птенцов будут обрастать перьями на следующей неделе? В ответ запишите произведение этих чисел.

Ответ: 225

Решение. На самом деле птенцов стоит разбить на три категории: однонедельные, двухнедельные и трёхнедельные. С новой неделей каждый птенец переходит в следующую категорию. Значит, если на этой неделе обрастают перьями 11, то на прошлой было 11 двухнедельных, и, следовательно, 9 однонедельных ($9+11=20$). Значит, на этой неделе есть 9 двухнедельных, и именно они будут обрастать перьями на следующей неделе. На прошлой неделе было 11 двухнедельных и 14 трёхнедельных — значит, на позапрошлой было 11 однонедельных и 14 двухнедельных, и именно они раскрывали клюв. Ответом будет $9(11+14)$.

В-2

В мастерской изготавливают деревянных лошадок. Два дня фигурка окрашивается, на третий её покрывают лаком, а на четвёртый — отгружают в магазин. Сегодня окрашиваются 12 фигурок, а лакируются — 7. Вчера же окрашивались 11 фигурок, а лакировались 10. а) Сколько фигурок окрашивалось позавчера? б) Сколько фигурок будут лакировать завтра? В ответ запишите произведение этих чисел.

Ответ: 68

В-3

В огороженном участке Вселенной вспыхивают звёзды. Каждая звезда два миллиардолетия светит ярко, потом миллиард лет светит тускло, а потом и вовсе гаснет. Сегодня в том участке Вселенной 7 ярких и 12 тусклых светил, миллиард лет назад было 16 ярких и 8 тусклых. а) Сколько тусклых звёзд вы там насчитаете через миллиард лет? б) Сколько ярких звёзд там было два миллиарда лет назад? В ответ запишите произведение полученных чисел.

Ответ: 80

В-4

Каждый год на рынке появляются новые модели телефонов. В первый год после выхода модель считают острием прогресса, на второй и третий год модель разжалуется в просто «пристойные», после чего она безнадёжно устаревает. В этом году на острие прогресса — 8 моделей, и 11 пристойных. В прошлом году было 4 модели на острие прогресса и 17 пристойных. а) Сколько моделей было на острие прогресса по меркам позапрошлого года? б) Сколько пристойных моделей будет в следующем году? В ответ запишите произведение полученных чисел.

Ответ: 84

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2020/21 учебного года для 5–6 классов

Задача 6.

В-1

В алфавите жителей сказочной планеты АБВ2020 всего три буквы: А, Б и В, из которых составляются все слова. При этом в любом слове не могут соседствовать две одинаковые буквы, а также в любом слове обязательно имеется каждая из трёх букв. Например, слова АББ, ВАБАВА, БВБВБВА являются допустимыми, а слова ВАВ, АБААВА, АВАББ — нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Ответ: 1572858

Решение. Первая буква может быть любой из трёх, для каждой следующей буквы — выбор из двух вариантов. Получается $3 \cdot 2^{19}$ слов. Но нужно еще вычесть отсюда те слова, которые составлены всего из двух букв, а не из трёх. Таких слов 6. Получается $3 \cdot 2^{19} - 6 = 1572858$ различных слов.

В-2

В алфавите жителей сказочной планеты АБВ2020 всего три буквы: А, Б и В, из которых составляются все слова. При этом в любом слове не могут соседствовать две одинаковые буквы, также в любом слове обязательно имеется каждая из трёх букв. Например, слова АББ, ВАБАВА, БВБВБВА являются допустимыми, а слова ВАВ, АБААВА, АВАББ — нет. Сколько 18-буквенных слов в словаре этой планеты?

Ответ: 393210

В-3

В алфавите жителей сказочной планеты АБВ2020 всего три буквы: А, Б и В, из которых составляются все слова. При этом в любом слове не могут соседствовать две одинаковые буквы, также в любом слове обязательно имеется каждая из трёх букв. Например, слова АББ, ВАБАВА, БВБВБВА являются допустимыми, а слова ВАВ, АБААВА, АВАББ — нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Ответ: 786426

В-4

В алфавите жителей сказочной планеты АБВ2020 всего три буквы: А, Б и В, из которых составляются все слова. При этом в любом слове не могут соседствовать две одинаковые буквы, также в любом слове обязательно имеется каждая из трёх букв. Например, слова АББ, ВАБАВА, БВБВБВА являются допустимыми, а слова ВАВ, АБААВА, АВАББ — нет. Сколько 17-буквенных слов в словаре этой планеты?

Ответ: 196602

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2020/21 учебного года для 5–6 классов

Задача 7.

В-1

За круглым столом сидят 1001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей может сидеть за столом?

Ответ: 502

Решение. Из условия следует, что рыцарь не может сидеть между двумя рыцарями или двумя лжецами, а лжец не может сидеть между двумя лжецами. Таким образом, при обходе вокруг стола рыцари будут встречаться нам по двое подряд, а лжецы — по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому лжецу можно найти в пару по рыцарю (и после этого ещё останутся рыцари, не вошедшие ни в одну пару). Значит, рыцарей за столом больше половины от общего числа сидящих и к тому же чётное число, то есть хотя бы 502.

Пример рассадки 502 рыцарей и 499 лжецов, удовлетворяющий условию: сначала посадим 248 групп вида «рыцарь, рыцарь, лжец, лжец», затем — ещё три группы вида «рыцарь, рыцарь, лжец».

В-2

За круглым столом сидят 2001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наибольшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 999

В-3

За круглым столом сидят 3001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей может сидеть за столом?

Ответ: 1502

В-4

За круглым столом сидят 4001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наибольшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 1999
