

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2020/21 учебного года для 5-6 классов

Задача 1. Всякий раз, когда мой брат говорит правду, наша бабушка чихает. Однажды брат сказал, что он получил по математике «5», но бабушка не чихнула. Тогда он, слегка засомневавшись в своих первых словах, сказал, что получил «4», и бабушка чихнула. Приободрившись от бабушкиного чихания, он подтвердил, что уж точно получил не менее 3, но бабушка больше не чихала. Так какую же всё-таки оценку получил брат по математике?

Ответ: «2».

Решение. Если бабушка не чихнула, то брат точно соврал, следовательно, он получил не «5» и даже более того, менее 3. Если же бабушка чихнула, то не факт, что он при этом сказал правду, так как условие не запрещает бабушке чихать, когда брат врёт.

Задача 2. Баба-Яга должна прибыть на Лысую Гору ровно в полночь. Она рассчитала, что если полетит на ступе со скоростью 50 км/ч, то опоздает на 2 часа, а если на электровенике со скоростью 150 км/ч, то прилетит на 2 часа раньше. А чтобы прибыть на Лысую Гору точно в срок, Баба-Яга воспользовалась метлой. В котором часу Баба-Яга вылетела и с какой скоростью летела на метле?

Ответ: В 20:00 со скоростью 75 км/ч.

Решение. На электровенике лететь втрое быстрее, чем в ступе, и при этом экономится 4 часа времени. Значит, две трети времени полёта в ступе составляют 4 часа, весь полёт в ступе занял бы 6 часов, а весь полёт на электровенике — втрое меньше, то есть 2 часа. При этом Баба-Яга вылетела бы за 6 часов до двух часов ночи, то есть в 20 часов вечера. Чтобы прилететь точно вовремя, Баба-Яге нужно провести в полёте 4 часа, то есть вдвое больше, чем на электровенике. Значит, лететь на метле нужно вдвое медленнее, чем на электровенике, то есть со скоростью 75 км/ч.

Задача 3. В одной школе учатся четверо приятелей — все в разных классах: самый младший — в первом классе, а самый старший — в четвёртом. Определите имя, фамилию и класс каждого из них, если известно, что:

- 1) Боря — не первоклассник;
- 2) когда Вася идёт в бассейн на соседнюю с его улицей улицу Южную, Иванов гуляет с собакой у себя во дворе на улице Зелёной;
- 3) Миша на год старше Димы;
- 4) Боря и Орлов — соседи и живут на улице Северной;
- 5) Крылов познакомился с Петровым ровно год назад, будучи еще первоклассником;
- 6) Вася отдал Боре учебник, по которому сам занимался в прошлом году.

Ответ: Дима Иванов учится в первом классе, Миша Крылов — во втором, Боря Петров — в третьем, Вася Орлов — в четвёртом.

Решение. Сначала соотнесём имена ребят с классами. Из условий 1, 3 и 6 следует, что только Дима может быть первоклассником. Тогда из условия 3 Миша во втором классе. Из условия 6 Вася старше Бори, значит, Вася в четвертом классе, а Боря в третьем.

Теперь соотнесём имена с фамилиями. Из условия 5 следует, что Крылов сейчас учится во втором классе, значит, это Миша. Из условий 2 и 4 следует, что Боря — не Орлов и не Иванов, значит, он Петров. Из условия 2 следует, что Вася — не Иванов, значит, он Орлов. Тогда Дима — Иванов.

Задача 4. Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

Ответ: 81.

Решение. Пусть задуманное число равно $\overline{mn} = 10m + n$. Тогда $4\overline{mn} = \overline{mn}^2$. Значит, \overline{mn}^2 делится на 4, а \overline{mn} — на 2, поэтому цифры m чётна (и отлична от нуля). Кроме того, $\overline{mn} = \overline{mn}^2 : 4 = (\overline{mn} : 2)^2$, то есть \overline{mn} — квадрат натурального числа, начинающийся с чётной цифры. Значит, \overline{mn} может равняться 25, 49, 64 или 81. Проверка показывает, что из этих четырёх вариантов условию удовлетворяет только последний.

Задача 5. Марсианский светофор состоит из шести одинаковых лампочек, расположенных в двух горизонтальных рядах (один под другим) по три лампочки в каждом. Водитель марсохода в тумане может различить количество и взаимное расположение горящих лампочек светофора (например, если горят две лампочки, — находятся ли они в одном горизонтальном ряду или в разных, находятся ли они в одном вертикальном ряду, или в соседних вертикальных рядах, или в двух крайних вертикальных рядах). Однако он не может различить негорящие лампочки и корпус светофора. Поэтому, если, например, горит всего одна лампочка, невозможно определить, какая именно из шести). Сколько сигналов марсианского светофора может отличить друг от друга в тумане водитель марсохода? Если ни одна лампочка светофора не горит, водитель его не видит.

Ответ: 44.

Решение. Если два сигнала светофора отличаются только сдвигом горящих лампочек, то водитель их не различает (и наоборот). Поэтому любой сигнал либо можно сдвигом влево и/или вверх превратить в неотличимый от него сигнал, у которого хотя бы одна лампочка горит в верхнем горизонтальном ряду и хотя бы одна — в левом вертикальном ряду, либо сигнал уже обладает этим свойством. Возможны два случая.

1. Горит верхняя левая лампочка. Тогда каждая из остальных лампочек может гореть или не гореть, и все такие сигналы будут отличимы друг от друга, поскольку получить их друг из друга сдвигом по горизонтали и/или вертикали нельзя. Значит, таких сигналов будет $2^5 = 32$.

2. Не горит верхняя левая лампочка. Тогда обязательно должна гореть левая нижняя лампочка и ещё одна или обе оставшиеся лампочки в верхнем ряду (3 способа), а каждая из двух остальных лампочек в нижнем ряду может гореть или не гореть ($2^2 = 4$ способа). Итого $3 \cdot 2^2 = 12$ сигналов.

Всего получаем $32 + 12 = 44$ различимых сигнала.