

**Решения заданий заключительного этапа
Олимпиады «Ломоносов» по инженерным наукам 2020/2021
5-7 классы**

Задача 1 (20 баллов)



В библиотеке живут 4 мышонка (Бурик, Белик, Гризлик и Пандик) и кот Пушистик. Однажды кот отлучился на 5 минут, и мышата решили полакомиться старыми книгами. Мышатам очень не нравится вкус типографской краски, поэтому они начинают грызть книги с полей и не переходят на текст, пока поля не закончатся. Бурик ест со скоростью 3 г за 36 секунд, Белик – 1 г за 20 секунд, Гризлик – 3 г за 45 секунд, Пандик – 2 г за 40 секунд. Успеют ли мышата съесть поля одной книги, пока Пушистик отсутствует, если в книге 350 листов, обложка книги утеряна, а поля занимают 10% площади страницы? Какую часть книги не успеют съесть мышата? Считайте, что плотность одного листа бумаги – 80 г/м^2 , размеры страницы – $200 \text{ мм} \times 150 \text{ мм}$.



Ответ подтвердите расчетами.

Решение:

1. За 1 минуту мышата съедают следующее количество граммов бумаги:

Бурик:

$36 : 3 = 12$ (сек) – потребуется, чтобы съесть 1 грамм бумаги

$60 : 12 = 5$ (раз) – по 1 грамму успеет съесть за 1 минуту

$1 \cdot 5 = 5$ (г) – съест за минуту Бурик

Белик:

$60 : 20 = 3$ (раза) – по 1 грамму успеет съесть за 1 минуту

$1 \cdot 3 = 3$ (г) – съест за минуту Белик

Гризлик:

$45 : 3 = 15$ (сек) – потребуется, чтобы съесть 1 грамм бумаги

$60 : 15 = 4$ (раза) – по 1 грамму успеет съесть за 1 минуту

$1 \cdot 4 = 4$ (г) – съест за минуту Гризлик

Пандик:

$40 : 2 = 20$ (сек) – потребуется, чтобы съесть 1 грамм бумаги

$60 : 20 = 3$ (раза) – по 1 грамму успеет съесть за 1 минуту

$1 \cdot 3 = 3$ (г) – съест за минуту Пандик

В общей сложности мышата съедят $5 + 3 + 4 + 3 = 15$ г бумаги за 1 минуту.

2. За время отсутствия кота Пушистика (5 минут) мышата съедят $15 \cdot 5 = 75$ г бумаги.

3. Рассчитаем массу всей книги и массу полей.

$200 \cdot 150 = 30000$ (мм^2) – площадь 1 страницы

$30000 \cdot 350 = 10500000 \text{ (мм}^2\text{)} = 10,5 \text{ (м}^2\text{)}$ – площадь всех страниц

$10,5 \cdot 80 = 840 \text{ (г)}$ – масса всей книги

10% от массы всей книги (840 г) составляют 84 г. Таким образом, масса всех полей равна 84 г. Значит, мышата не успеют съесть все поля, пока Пушистик отсутствует.

Найдем, какую часть книги не успеют съесть мышата:

$$\frac{840-75}{840} = \frac{765}{840} = \frac{51}{56}$$

Ответ: не успеют.

Задача 2 (20 баллов)

На рисунке изображена плашка для нарезания резьбы. Выполните эскизы фронтальной, горизонтальной и профильной проекций этой плашки. Считайте, что фронтальная проекция – это вид спереди, главный вид; горизонтальная – вид сверху; профильная – вид сбоку слева.



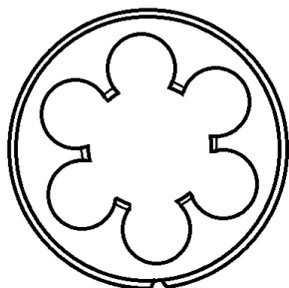
Одно из возможных решений:



Профильная проекция



Фронтальная проекция



Горизонтальная проекция

Задача 3 (20 баллов)

У химика Василия есть несколько упаковок одинаковых таблеток и сломанные электронные весы. С помощью этих весов можно определить, в каких пределах находится масса взвешиваемого образца: менее 2 граммов, более 9 граммов или от 2 до 9 граммов.

Чтобы определить массу одной таблетки, Василий сначала кладет на весы одну таблетку, а затем поочередно добавляет по одной таблетке. После того, как он положил на весы пятую таблетку, они первый раз показали, что масса превысила 2 грамма. Сколько таблеток было на весах, когда весы первый раз показали, что масса превысила 9 граммов, если после этого Василий смог установить массу одной таблетки с ошибкой, не превышающей 5 миллиграммов?

Решение:

Пусть x граммов – масса одной таблетки, а масса таблеток первый раз превысила 9 граммов, когда на весах было n таблеток. Из условия получаем два двойных неравенства:

$4x \leq 2 < 5x$ и $(n-1)x \leq 9 < nx$, откуда $\frac{2}{5} < x \leq \frac{1}{2}$ и $\frac{9}{n} < x \leq \frac{9}{n-1}$. Пересечение двух

полуинтервалов $(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}]$ и $(\frac{9}{n}; \frac{9}{n-1}]$ задает диапазон, в котором может находиться значение x , а половина длины этого пересечения – возможная ошибка определения массы таблетки.

При $n \leq 18$ или $n \geq 24$ полуинтервалы не пересекаются, поэтому $19 \leq n \leq 23$. При $n \leq 22$:

$\frac{9}{n} > \frac{2}{5}$ и $\frac{9}{n-1} < \frac{1}{2}$, поэтому длина пересечения полуинтервалов равна $\frac{9}{n-1} - \frac{9}{n} = \frac{9}{n(n-1)} \geq \frac{9}{22 \cdot 21} > 0,01$, и в этом случае Василий не сможет определить массу таблетки с ошибкой, не превышающей 5 миллиграммов.

При $n = 23$:

$\frac{9}{n} < \frac{2}{5}$, поэтому длина пересечения полуинтервалов равна $\frac{9}{22} - \frac{2}{5} = \frac{1}{110} < 0,01$, и в этом случае Василий сможет определить массу таблетки с ошибкой, не превышающей 5 миллиграммов (например, назвав в качестве массы таблетки $(\frac{9}{22} + \frac{2}{5}) : 2 \approx 0,405 \text{ г} = 405 \text{ мг}$).

Ответ: 23.

Задача 4 (20 баллов)

Первоклассник Петя хочет купить маленькую машинку, которая стоит 125 рублей. Сто рублей у него уже есть, а чтобы накопить недостающую сумму, он собирал в пластиковой коробке все монеты, которые его родители получали как часть сдачи при покупках в магазине и отдавали ему. Через три месяца Петина копилка оказалась почти полной (см. фото). Оцените, хватит ли теперь у Пети денег на покупку машинки. Ответ поясните.



Решение:

Исходя из фотографий, приведенных в условии задачи, длину коробки можно принять равной $L = 15$ см, а ширину w взять равной 6 см. Для оценки можно считать, что все монеты имеют одинаковый диаметр $d = 1,5$ см и толщину $t = 1,5$ мм. Тогда высоту коробки можно оценить как $h = 3$ см (два диаметра монеты). Число видимых однокопеечных монет n_1 приблизительно равно числу пятикопеечных монет n_5 и числу пятидесятикопеечных монет n_{50} , а число десятикопеечных монет n_{10} приблизительно в три раза больше чем $n_1 = n_5 = n_{50}$, т.е. $n_{10} = 3n_1$. На фотографиях видно, что незаполненные промежутки между монетами занимают объем, сравнимый с объемом V , занимаемым самими монетами. Поэтому для оценки разумно считать, что монеты занимают половину всего объема коробки $V_0 = Lwh = 270$ см³, т.е. $V = \frac{V_0}{2} = 135$ см³. Тогда коробка содержит в общей сложности $n = \frac{V}{V_1} \approx 510$ монет, где $V_1 = \pi d^2 t / 4 \approx 0,265$ см³ — объем одной монеты (поскольку мы делаем грубую оценку числа монет, не будет ошибкой принять объем одной монеты и равным $d^2 t$, т.е. заменить монету прямоугольным параллелепипедом с квадратным основанием со стороной d и высотой t). Значит, $n_1 = n_5 = n_{50} = \frac{n}{6} = 85$, а $n_{10} = 3n_1 = 255$. Это означает, что общая сумма денег в коробке составляет $1 \cdot n_1 + 5 \cdot n_5 + 10 \cdot n_{10} + 50 \cdot n_{50} \approx 7300$ копеек = 73 рубля. Таким образом, собранных денег на покупку машинки Пете хватит.

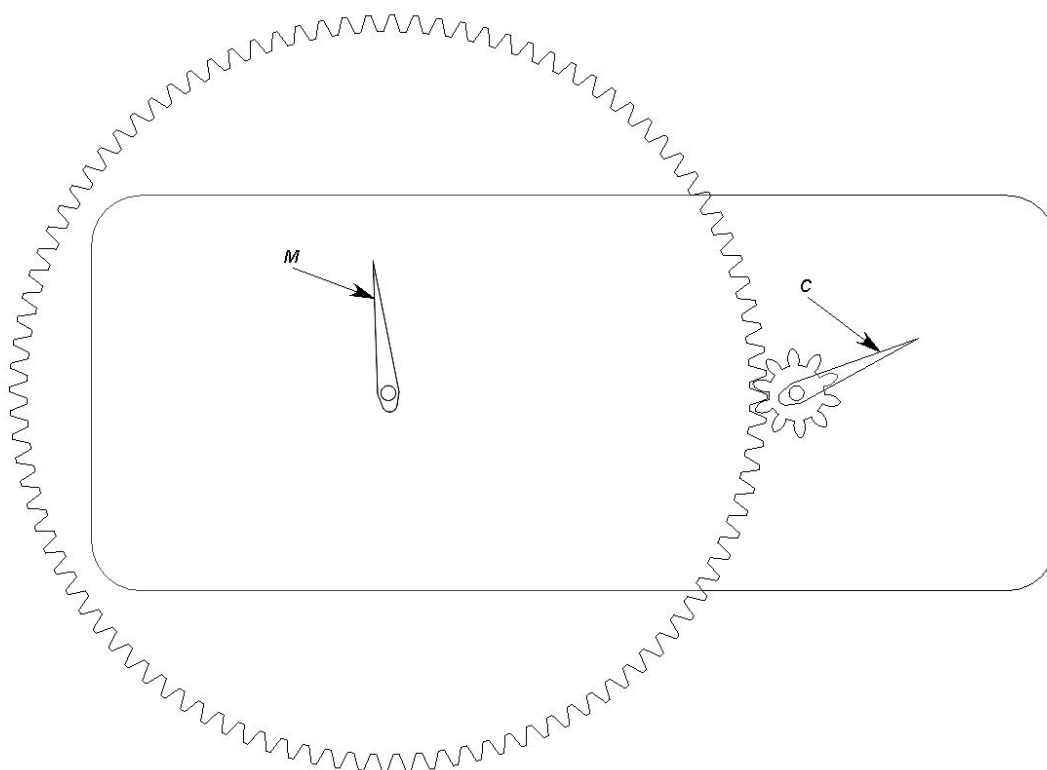
Ответ: денег на покупку машинки Пете хватит.

Примечание:

На самом деле в коробке было 66 рублей 27 копеек, а объем пустого пространства между монетами составляет приблизительно 46% всего объема коробки.

Задача 5 (20 баллов)

Жители планеты Астера используют необычные часы с двумя стрелками С и М, которые равномерно движутся в противоположных направлениях (см. рисунок). Промежуток времени, в течение которого один полный оборот совершает стрелка С, называется астерианской минутой, а промежуток времени, в течение которого один полный оборот совершает стрелка М, называется астерианским часом. Сколько астерианских минут содержит один астерианский час?



Решение:

Один час – это один полный оборот минутной стрелки. У малой шестерни 10 зубьев, у большой – 100. Это означает, что один полный оборот минутная стрелка делает за 10 полных оборотов секундной стрелки. Один оборот секундной стрелки – это одна минута. Следовательно, в одном астерианском часе 10 астерианских минут.

Ответ: один астерианский час содержит 10 астерианских минут.