

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Геологический факультет



НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

***ЛОМОНОСОВСКИЕ
ЧТЕНИЯ***

СЕКЦИЯ ГЕОЛОГИИ

Подсекция кристаллографии и кристаллохимии

Руководитель – зав. кафедрой, чл.-корр. РАН Еремин Н.Н.

СБОРНИК
ТЕЗИСОВ ДОКЛАДОВ

Москва
2020

Содержание:

1. Взаимодействие перидотита и океанического осадка в условиях мантии Земли
Бенделиани А.А., Бобров А.В., Бинди Л., Ирифуне Т. 2
2. Гидротермальная кристаллизация в фосфатных системах и кристаллические структуры $K_2Mn_3(H_2O)_2[P_2O_7]_2$ и $KMn(H_2O)_2[Al_2(PO_4)_3]$
Кочеткова Е.М., Кирюхина Г.В., Якубович О.В. 4
3. Одно-, двух- и трехмерные однопериодичные кристаллографические группы цветной симметрии
Антонов Д.И., Белоконева Е.Л. 6
4. Кристаллохимия катион-замещенных форм нового микропористого цирконосиликата $Na_6Zr_3[Si_9O_{27}]$
Артамонова А.А., Ксенофонтов Д.А. 8
5. Проблема элементарных ячеек в сферических пространственных группах и трёхмерные сферические многообразия
Кучериненко Я.В., Макарова В.С. 10

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЕРИДОТИТА И ОКЕАНИЧЕСКОГО ОСАДКА В УСЛОВИЯХ МАНТИИ ЗЕМЛИ

Бенделиани А.А., Бобров А.В., Бинди Л., Ирифуне Т.

Результаты экспериментального изучения реакционного взаимодействия в системе океанический осадок – перидотит в диапазоне давлений 7-24 ГПа и температурах 1000-1500°C моделируют корово-мантийное взаимодействие при субдукции океанической коры в условиях мантии Земли.

В системе GLOSS (Global Ocean Subducted Sediment) [1] – перидотит ($\text{Ol}_{60}\text{Opx}_{16}\text{Cr}_{12}\text{Grt}_{12}$) установлены особенности межфазового распределения главных и примесных элементов, что позволило охарактеризовать изоморфизм в фазах высокого давления, в том числе, водосодержащих.

Бриджманит, обнаруженный во всех экспериментах рассматриваемой системы в условиях нижней мантии (24 ГПа), наследует состав протолита по содержанию примесных компонентов. Накопление титана в фазах мантийной ассоциации, для которой в целом характерны невысокие концентрации этого элемента (~0.2 мас.% TiO_2), связано с погружением корового вещества на различные мантийные глубины (0.6 мас.% TiO_2 в GLOSS и 1.5 мас.% в MORB). Вхождение алюминия в структуру бриджманита подразумевает связанный (стехиометрический) механизм замещения с практически постоянным отношением $(\text{Mg,Fe})\text{O}/\text{SiO}_2$.

Образование водосодержащих фаз при реакционном взаимодействии изучаемых пород может привносить до 8 мас.% H_2O в нижнюю мантию Земли, что соответствует концентрациям воды в составе чистого GLOSS. В качестве минералогически возможных соединений-концентраторов H_2O была синтезирована новая фаза Mg-Egg ($\text{Al}_{0.63}\text{Mg}_{0.34}\text{Cr}_{0.02}\text{Fe}_{0.01}\text{Si}_{1.00}\text{O}_4\text{H}_{1.35}$), которая содержит более 10 мас.% H_2O . Кроме того, в нашем исследовании [2] было показано, что, состав твердого раствора может простирается вплоть до идеального крайнего члена MgSiH_2O_4 , который будет являться полиморфной модификацией фазы H.

Синтезированная в ходе настоящих экспериментов фаза D $\text{Mg}_{1.14}\text{Si}_{1.73}\text{H}_{2.81}\text{O}_6$, сосуществующая с бриджманитом, содержит до 7 мас.% H_2O . Увеличение отношения Al/Fe в фазе D расширяет ее термическую стабильность и сопровождается обеднением глиноземом сосуществующего бриджманита. Кроме того, вхождение алюминия в структуру фазы D, расширяет поле стабильности фазы в более низкобарную область.

Фаза δ , представляющая твердый раствор AlOОН-фаза H, содержит до 5 мас.% H_2O и является главным концентратором титана (до 1 мас.% TiO_2) наряду с бриджманитом.

Алюминий-содержащая суперводная фаза В (SuB) $Mg_{12}Si_4H_2O_{21}$, концентрации алюминия в которой достигают 3 мас.% Al_2O_3 , характеризуется содержанием воды до 10 мас.% H_2O .

Впервые рассмотренные реакции между мантийным перидотитом и GLOSS, приводящие к образованию высокоглиноземистых водосодержащих фаз высокого давления на различных уровнях мантии Земли, моделируют возможный механизм поступления воды в нижнюю мантию Земли в составе погружающейся океанической плиты.

1. Plank T., Langmuir C.H. The chemical composition of subducting sediment and its consequences for the crust and mantle // *Chemical Geology*. V. 145, p. 325-394. 1998
2. Bindi L., **Bendeliani A.**, Bobrov A., Matrosova E., Irifune T. (2020) Incorporation of Mg in Phase Egg, $AlSiO_3OH$: Toward a new polymorph of Phase H, $MgSiH_2O_4$, a carrier of water in the deep mantle. *American Mineralogist*, v. 105, p. 132-135.

ГИДРОТЕРМАЛЬНАЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ В ФОСФАТНЫХ СИСТЕМАХ И КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ



Е.М. Кочеткова, Г.В. Кирюхина, О.В. Якубович

В настоящий момент известно более 500 минеральных видов фосфатов (по оценке базы данных Международной минералогической ассоциации) [1]. Характерным отличием природных фосфатов от синтетических является почти полное отсутствие конденсированных фосфатов среди минералов. В немногочисленную группу последних входят минералы накафит, $\text{Na}_2\text{CaP}_2\text{O}_7 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, вулдриджит, $\text{Na}_2\text{CaCu}_2(\text{P}_2\text{O}_7)_2 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$, канонеровит $\text{MnNa}_3\text{P}_3\text{O}_{10} \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ и хилброунит $\text{MgNa}_3\text{P}_3\text{O}_{10} \cdot 12\text{H}_2\text{O}$.

Марганец является одним из наиболее часто встречаемых катионов в составе фосфатных минералов (106 минеральных видов) [1], причем большая часть фосфатов марганца приурочена к пегматитовым телам. Фосфаты марганца активно исследуются в качестве катодных материалов для литий-ионных батарей (например, литиофилит LiMnPO_4), что связано с относительно низкой стоимостью материала и его экологичностью [2]. В ювелирном деле в качестве поделочных камней используются наиболее чистые и прозрачные кристаллы вайриненита $\text{BeMnPO}_4(\text{OH},\text{F})$ и эсфорита $\text{Mn}^{2+}\text{AlPO}_4(\text{OH})_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$, например. Фосфаты марганца являются перспективными магнитными материалами, так синтетический аналог триплоидита $\text{Mn}_2(\text{PO}_4)\text{OH}$ обладает силой магнитной фрустрацией, сравнимой с таковой у шпинелей, пироксенов и гранатов [3].

Эксперименты по гидротермальному синтезу проводились при $T = 270\text{-}280^\circ\text{C}$ и $P = 90\text{-}100$ атм. в фосфатных системах $\text{A}_2\text{O} - \text{MeO}/(\text{Me}_2\text{O}_3) - \text{P}_2\text{O}_5 - (\text{V}_2\text{O}_5) - \text{Z} - \text{H}_2\text{O}$, где A^+ – ионы щелочных металлов Li^+ , K^+ ; Me^{2+} – ионы переходных металлов Mn^{2+} и Co^{2+} , Me^{3+} – ионы Al^{3+} ; Z – анионы Cl^- , CO_3^{2-} , борная кислота H_3BO_3 .

Рентгенофазовый анализ и качественный рентгеноспектральный анализ (для определения химического состава) были использованы для идентификации полученных фаз. Методом рентгеновской дифракции на монокристалльных образцах были определены симметрия и параметры элементарных ячеек синтезированных соединений.

В результате проведенных экспериментов были идентифицированы Со-аналог трифилин-литофилитовой серии LiCoPO_4 , синтетические литиофосфат Li_3PO_4 , печкаит $\text{Mn}_5(\text{PO}_4)_3\text{Cl}$ и берлинит AlPO_4 . Среди аналогов минералов, не относящихся к классу фосфатов, были установлены: чемберсит $\text{Mn}_3\text{V}_7\text{O}_{13}\text{Cl}$ и родохрозит MnCO_3 . Были также синтезированы пиррофосфат марганца $\text{Mn}_2\text{P}_2\text{O}_7$ и его V-аналог $\text{Mn}_2\text{V}_2\text{O}_7$, фаза смешанного состава $\text{Mn}_2(\text{P}_x\text{V}_{1-x})(\text{V}_y\text{P}_{1-y})\text{O}_7$, а также $(\text{Mn},\text{Co})_6(\text{PO}_4)_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ и KAlPO_4OH (Al-аналог КТР).

В одном из опытов в системе $\text{MnCl}_2\text{--K}_4\text{P}_2\text{O}_7\text{--Al}_2\text{O}_3\text{--H}_2\text{O}$ были получены две новые фазы гидрат фосфатов калия и марганца: $\text{KMnAl}_2(\text{PO}_4)_3(\text{H}_2\text{O})_2$ (светло-кремовые кубики) и $\text{K}_2\text{Mn}_3(\text{H}_2\text{O})_2[\text{P}_2\text{O}_7]$ (бледно-зеленые уплощенные кристаллы). Их кристаллические структуры были установлены в результате рентгенодифракционного исследования на базе монокристалльного экспериментального материала [4].

Кристаллическая структура $\text{K}_2\text{Mn}_3(\text{H}_2\text{O})_2[\text{P}_2\text{O}_7]_2$ ($a=9.1944(1)$ Å, $b=8.3134(1)$ Å, $c=9.3798(2)$ Å, $\beta=98.924(1)^\circ$, $P2_1/c$, $Z=2$, $\rho_{\text{выч}}=2.940$ г/см³) образована ступенчатыми трехзвенными колонками Mn-центрированных октаэдров, делящими общие ребра, вытянутыми вдоль оси y . Вдоль оси z колонки объединены дифосфатными группами P_2O_7 в двумерные блоки (гофрированные слои), которые в направлении оси x переложены крупными атомами К в центрах семивершинников.

Кристаллическая постройка $\text{KMn}(\text{H}_2\text{O})_2[\text{Al}_2(\text{PO}_4)_3]$ ($a=13.3117(3)$ Å, $b=10.0949(2)$ Å, $c=8.7261(2)$ Å, $\beta=108.057(2)^\circ$, $C2/c$, $Z=4$, $\rho_{\text{выч}}=2.794$ г/см³) представляет собой анионный алюмофосфатный паракаркас из бипирамид AlO_5 и тетраэдров PO_4 , катионная часть которого представлена Mn-центрированными октаэдрами и К-центрированными 12-вершинниками.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-03-00908 А.

Литература

1. <https://www.ima-mineralogy.org/Minlist.htm>
2. Oh S. M., Oh S. W., Yoon C. S., Scrosati B., Amine K., Sun Y. K. // *Adv. Funct. Mater.* 2010. V. 20, № 19, P. 3260-3265.
3. Yakubovich O.V., Shvanskaya L.V., Dimitrova O.V., Volkova O.S., Vasiliev A.N. // *Dalton Transactions* 2017. V. 46, P. 8680-8686.
4. Kiriukhina G.V., Yakubovich O.V., Shvanskaya L. V. Kochetkova E. M., Dimitrova O.V., Volkov A. S., Simonov S.V. // *Acta Cryst. C.* 2019. V. 76., P. 302-310.

ОДНО-, ДВУХ- И ТРЁХМЕРНЫЕ ОДНОПЕРИОДИЧНЫЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ЦВЕТНОЙ АНТИСИММЕТРИИ

Д.И. Антонов, Е.Л. Белоконева

Из теории симметрии известно определение группы симметрии по свойствам симметричного пространства – G_n^m [1], где m – размерность пространства (число измерений), n – тип пространства (число трансляций). Рассмотрим кристаллографические группы симметрии при $n = 1$ в одномерном, двумерном и трёхмерном симметричных пространствах: G_1^1 – одномерное однородное пространство – $p111$ и $p\bar{1}$ [1]; G_1^2 – двумерное неоднородное пространство с однородным подпространством – группы симметрии бордюров [1]; G_1^3 – трёхмерное неоднородное пространство с однородным подпространством – группы симметрии рядов [1, 4]. Эти группы известны и не нуждаются в представлении.

Иногда для описания физических объектов может оказаться недостаточным признак геометрического равенства, тогда возникает необходимость введения дополнительных негеометрических переменных. Так, при введении операции антитождества, получаются группы антисимметрии, количество которых кратно превышает количество групп классической симметрии: $G_1^{1'}$ – 7 групп, $G_1^{2'}$ – 31 группа, $G_1^{3'}$ – 394 группы [1]. Наличие у некоторых групп симметрии рядов винтовых осей высшего порядка делает возможным введение понятия многоцветной симметрии [2]. Это позволяет говорить о цветной антисимметрии однопериодических групп.

В работе представлен вывод всех одно-, двух- и трёхмерных однопериодических кристаллографических групп цветной антисимметрии, включая сопоставление антисимметричных и «переворачивающих» групп, а также даны геометрические иллюстрации для всех полученных однопериодических групп. Предложена обобщённая систематика названий, основанная на представлениях Шубникова А.В. [3, 4], призванная убрать сложившуюся искажённую систематику, которая составлена с консультациями Белоконевой Е.Л., за что автор выражает благодарность.

Список литературы:

1. Вайнштейн Б. К. Современная кристаллография (в четырех томах). Том 1. Симметрия кристаллов //М.: Изд-во «Наука» Москва. – 1979.
2. Егоров-Тисменко Ю. К., Литвинская Г. П. Теория симметрии кристаллов //М.: ГЕОС. – 2000. – Т. 394. – С. 9.

3. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве: 3-е изд., доп //М.:
Инт компьютер. исслед. – 2004.

4. Шубников А. В. Атлас кристаллографических групп симметрии. – АН СССР,
1946.

КРИСТАЛЛОХИМИЯ КАТИОН-ЗАМЕЩЕННЫХ ФОРМ НОВОГО МИКРОПОРИСТОГО ЦИРКОНОСИЛИКАТА $\text{Na}_6\text{Zr}_3[\text{Si}_9\text{O}_{27}]$.

А.А. Артамонова¹, Д.А. Ксенофонтов¹, А.Ю. Бычков¹, Кошлякова Н.Н.¹

¹- Геологический факультет, Московский государственный университет имени.

М.В. Ломоносова, Геологический факультет, Воробьевы горы, 119991, г. Москва,
Россия.

Одной из актуальных проблем современных материаловедения и кристаллохимии является получение и исследование новых микропористых материалов, обладающих рядом технологически важных свойств: ионообменных, сорбционных и др. Подобные соединения часто обладают гетерополиэдрическими каркасами смешанного типа, состоящими преимущественно из тетраэдров и октаэдров переходных элементов [1]. К подобным соединениям может быть отнесен новый цирконосиликат с идеализированной формулой $\text{Na}_6\text{Zr}_3[\text{Si}_9\text{O}_{27}]$.

В 2017 г. Д.А. Ксенофонтовым с соавторами были получены данные о высокотемпературной трансформации катаплеита $\text{Na}_2\text{Zr}[\text{Si}_3\text{O}_9] \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ [2]. Новый микропористый цирконосиликат с упрощенной формулой $(\text{Na}_{6-2x}\text{Ca}_x\text{□}_x)\text{Zr}_3[\text{Si}_9\text{O}_{27}]$, где $x < 1$ получен в результате нагревания катаплеита до 1000 °С и характеризуется гексагональной сингонией, пространственная группа $P6_3/mc$, параметры элементарной ячейки: $a = 11.6065(3)$, $c = 9.9895(4)$ Å, $V = 1165.40(7)$ Å³, $Z = 2$. В основе его кристаллической структуры лежит гетерополиэдрический каркас, построенный из девятичленных колец тетраэдров $[\text{Si}_9\text{O}_{27}]$, соединенных изолированными октаэдрами $[\text{ZrO}_6]$. Катионы Na располагаются в пустотах каркаса и между кольцами кремнекислородных тетраэдров. Топология каркаса позволила предположить, что для этого соединения характерны ионообменные свойства [2].

Нами были проведены две серии опытов по ионному обмену: (1) опыты с 10% растворами SrCl_2 при температуре 350 °С в течение трех недель; (2) опыт с 1М раствором AgNO_3 при температуре 250 °С на протяжении 30 дней. Состав продуктов ионного обмена, изученный электронно-зондовым методом, приведен в Таблице 1.

Sr-замещенная форма продукта термической трансформации катаплеита характеризуется гексагональной сингонией, пространственная группа $P6_3cm$, уточненные параметры элементарной ячейки: $a = 23.285(4)$ Å, $c = 9.942(3)$ Å, $V = 4668(6)$ Å³. Для Ag-замещенной формы $a = 23.3462(3)$, $c = 10.10640(10)$ Å, пространственная группа $P6_3cm$.

Как и в случае продукта высокотемпературной трансформации катаплеита, в основе кристаллических структур его катион-замещенных форм лежит гетерополиэдрический каркас из тетраэдров SiO_4 и октаэдров ZrO_6 . Однако, по сравнению со структурой продукта

термической трансформации катаплеита, гетерополиэдрический каркас у Sr- и Ag-замещенных форм существенно искажен, что, вместе с расположением внекаркасных катионов, по-видимому, и обуславливает удвоение параметров a и b элементарной ячейки.

В структуре Sr-замещенной формы выделяется 4 кристаллографически неэквивалентных позиций внекаркасных катионов (Sr, Ca с небольшой примесью Na), характеризующихся частичной заселенностью. Помимо этих четырех позиций внекаркасных катионов была выявлена еще одна позиция, обозначенная как X, которая может являться позицией атома кислорода молекулы воды, вошедшей в структуру при ионном обмене.

В структуре Ag-замещенной формы выделено 6 неэквивалентных позиций Ag. Пять из них расщеплены на две (Ag1 (65%) и Ag1a (25%), Ag2 (74%) и Ag2a (24%)) или три (Ag4 (68%), Ag4a (19%) и Ag4b (6%), Agб (68%), Agба (4%) и Agбб (4%)) дополнительных подпозиции. Позиция Ag3 характеризуется частичной заселенностью (26%), а позиция Ag5 заселена полностью [3].

Таблица 1. Химический состав катион-замещенных форм продукта жотемпературной трансформации катаплеита с растворами AgNO₃ и SrCl₂ (весовые %).

	<i>Серия 1</i>	<i>Серия 2</i>
Na ₂ O	-	1.68
Ag ₂ O	37.99	-
SrO ₂	-	8.19
CaO	1.40	4.56
SiO ₂	35.52	48.16
ZrO ₂	23.66	32.81
Сумма	98.57	97.15
Формула	(Ag _{5.04} Ca _{0.38}) _{Σ5.42} Zr _{2.95} [Si _{9.10} O ₂₇]	(Na _{0.61} Ca _{0.91} Sr _{0.88}) _{Σ2.88} H _{3.12} Zr _{3.00} Si ₉ O ₂₇

Список литературы:

1. Зубкова Н.В. Сравнительная кристаллохимия новых и редких цирконосиликатов, силикатов щелочных и щелочноземельных элементов и минералов с изолированными тетраэдрическими и треугольными оксокомплексами. Дисс. докт. геол.-минер. наук, МГУ, 2012, 307 с.
2. Ксенофонов Д.А., Кабалов Ю.К., Пеков И.В., Зубкова Н.В., Казанцев С.С. Трансформации катаплеита при нагревании: кристаллохимический аспект. Статья в сборнике "Минеральное разнообразие- исследование и сохранение" 2015, вып. 7, 55-58.
3. Zubkova N.V., Ksenofontov D.A., Chukanov N.V., Pekov I.V., Artamonova A.A., Koshlyakova N.N., Bychkov A.Yu, Pushcharovsky D.Yu. Crystal chemistry of the microporous zirconosilicate Na₆Zr₃[Si₉O₂₇], a product of high-temperature transformation of catapleite, and its Ag-exchanged form. Minerals, том 10, № 3(243), с. 1-10 DOI

ПРОБЛЕМА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЯЧЕЕК В СФЕРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРУППАХ И ТРЁХМЕРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Я.В. Кучериненко, В.С. Макаров

В монографии [1] сообщается, о начале вывода фёдоровских групп для неевклидовых пространств. Хотя имелись ввиду фёдоровские группы в пространстве Лобачевского (L^3), в равной мере можно рассматривать и группы на сфере S^3 . Последние (в двумерном случае – в S^2), например, группу куба, можно легко представить, спроецировав грани куба и элементы его симметрии на вписанную сферу. Оси симметрии станут точками поворотов, плоскости – сферическими прямыми (окружностями большого круга), зеркальные оси (в кубе это $\bar{3} = 6^\circ$) – линиями скользящего отражения, которые можно обозначить пунктирными линиями, по аналогии с тем, как это принято для 17 фёдоровских групп в E^2 . Аналогично можно представить четырёхмерные точечные группы с помощью проекции на S^3 . Можно предположить (и это будет верное предположение), что в этом случае появятся дополнительные элементы симметрии – винтовые оси, подобно тому, как они появляются при переходе от 17-ти двумерных к 230-ти трёхмерным пространственным группам.

Четырёхмерные точечные группы (они же – фёдоровские группы в S^3) оказались полезны при описании взаимных ориентаций индивидов в двойниках и сростках кристаллов [2]. В свою очередь, представляется полезным дать их наглядное описание в виде таблиц и чертежей элементов симметрии, как это сделано в Международных таблицах [3] (см. также [4]). Однако при этом возникает проблема выбора фрагмента трёхмерной сферы, который мог бы служить аналогом элементарной ячейки. Если для евклидова пространства справедлива теорема Шёнфлиса, утверждающая, что всякая пространственная группа содержит подгруппы параллельных переносов конечного индекса [5] (что позволило Фёдорову и Шёнфлису вывести все 230 групп, а также составить их чертежи [6]), то на сфере нет ни параллельных линий, ни параллельных переносов. Вместе с тем существует и другая аналогичная теорема, утверждающая, что для любой фёдоровской группы в S^3 , L^3 и E^3 существует подгруппа конечного индекса, все операции которой, за исключением тождественного преобразования, не оставляют на месте ни одну точку (для сферы это очевидно).

Перечисление таких групп и их фактор-пространств является одной из важных задач в топологии – разделе математики, изначально основанном на фёдоровских группах [7], но впоследствии развившем свою терминологию, задачи и технические приёмы, так, что теперь, когда говорят о геометрии многообразий, то обычно имеют в виду довольно сложный алгебраический аппарат [7, 8]. М.М. Постников решил вернуться к истокам задачи и дать описание трёхмерных сферических многообразий с помощью геометрического описания

многогранников Дирихле для групп, не оставляющих неподвижными точки трёхмерной сферы [8]. Всего имеется пять счётных серий таких групп: $C_n \times C_m$, $D_n^* \times C_m$, $T^* \times C_m$, $O^* \times C_m$, и $I^* \times C_m$ (звёздочка означает удвоение группы при переходе к её описанию с помощью кватернионов, см. также [2, 9]). Из них Постникову удалось привести по многограннику Дирихле для каждой группы первых двух серий (линз и призм), а для остальных трёх серий – только для первых членов.

Подход, применённый для описания ориентаций компонентов двойников и сростков кристаллов, позволил нам понять работу [8], а также предъявить форму ячеек Дирихле для каждой группы остальных трёх серий [2, 9]. В данной работе мы нашли геометрическое доказательство того, что форма упомянутых многогранников Дирихле именно такова, как мы её описали в [2, 9]. Доказательство использует взаимодействие операций симметрии сферических групп и символику элементов симметрии, аналогичную используемой в 230 фёдоровских группах. Кроме того, для каждой группы найдены все операции симметрии, переводящие ячейку в соседнюю по общей грани (и, одновременно, показывающие пары граней многогранника отождествляемые этими операциями). Всего получилось 17 подсерий групп без неподвижных точек и, следовательно, 17 подсерий сферических 3-многообразий.

Работу можно рассматривать также как небольшое продвижение в задаче перечисления четырёхмерных простых форм – всё ещё нерешённой проблеме [10].

Литература

1. Шубников А.В., Копчик В.А. Симметрия в науке и искусстве. Изд 3-е. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 560 С. § "Границы теории симметрии", стр. 320.
2. Кучериненко Я.В., Макаров В.С. Теория двойников и сростков кристаллов как раздел четырехмерной кристаллографии. в сб. Трудов XIII Всероссийской научной школы "Математические исследования в естественных науках", Апатиты, 2016, с. 52-63, <http://geoksc.apatity.ru/index.php/math/263-matematicheskie-issledovaniya-v-estestvennykh-naukakh-trudy-xiii-vserossijskoj-s-mezhdunarodnym-uchastiem-nauchnoj-shkoly>
3. International Tables for Crystallography. Volume A: Space-group symmetry Second online edition (2016) <https://it.iucr.org/A/>
4. A Hypertext Book of Crystallographic Space Group. Diagrams and Tables. <http://img.chem.ucl.ac.uk/sgp/mainmenu.htm>
5. Галиулин Р.В. Кристаллографическая геометрия. М.: КомКнига, 2005. –136с. §2.2.3 "Теорема о параллельных переносах", с. 54
6. Фёдоров Е.С. Правильное деление плоскости и пространства. Л.: Наука, 1979. <https://sheba.spb.ru/vuz/prav-delenie-1979.djvu>
7. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982. 480 с.
8. М. М. Постников, Трёхмерные сферические формы. Тр. МИАН СССР, 196, Наука, М., 1991, с.114–146, <http://mi.mathnet.ru/tm1458>

9. Кучериненко Я.В., Макаров В.С. Геометрия бикристаллов и трехмерные сферические многообразия. в сб. Материалы XII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения". М.: МГУ, 2016, с. 360-362, <http://new.math.msu.su/department/dm/index.php?id=-l-r>.
10. Н.П. Долбилин. О правильных разбиениях Дирихле сферы. Москва.1972.