№ 1. Фирма производит продукт при помощи капитала K и труда L, покупая их по фиксированным ценам $r > 0$ и $w > 0$, соответственно. Выпуск продукта равен $K^{\alpha}L^{\beta}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, а его цена равна 1.

(а) Запишите функцию прибыли фирмы.

(б) Если фирма максимизирует прибыль, сколько она купит капитала и труда?

(в) Как изменится выпуск продукта, если увеличится цена капитала?

(г) Как изменится выпуск продукта, если уменьшится цена труда?

№ 2. Несколько фирм ловят рыбу в одном водоёме. Каждая фирма владеет одним рыболовецким катером и продаёт улов по 10 руб. за килограмм. При этом издержки на содержание катера составляют 1000 руб. в год. Количество рыбы, вылавливаемой каждым катером в год, зависит от числа катеров N и составляет $q = 500 - N$.

(а) Предположим, что количество фирм увеличивается до тех пор, пока прибыль каждой фирмы не станет равной нулю. Найдите совокупную добычу всех фирм при их максимальном количестве.

(б) Предположим, что государство национализировало добычу в этом водоеме. Сколько катеров будет использовать государство, чтобы получить максимальную совокупную прибыль от ловли рыбы всеми катерами? Чему будет равна добыча рыбы в целом и каждого катера в отдельности?

(в) В качестве альтернативы национализации рассмотрите выдачу годовых лицензий на один катер. Какова должна быть цена одной лицензии, чтобы в водоеме действовало общественно оптимальное количество рыболовецких катеров?

№ 3. Пусть в экономике выпуск в единицу времени задаётся функцией $[K(t)]^{\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$. Постоянная доля $0 < s < 1$ этого выпуска направляется на создание дополнительного капитала, при этом доля $\delta > 0$ имеющегося капитала выбывает (изнашивается). Начальный уровень капитала $K(0) = K_0 \geq 0$.

(а) Запишите уравнение изменения капитала в непрерывном времени.

(б) Найдите стационарные уровни капитала, т. е. такие, при которых его значение не изменяется во времени.

(в) Пусть начальный уровень капитала $K(0) = K_0 > 0$ немного выше его стационарного значения. Как будет меняться уровень капитала во времени?

№ 4. Пусть домохозяйство хочет иметь максимально возможное постоянное во времени $t \in [0, \infty)$ потребление c . Динамика накопленных денежных сбережений $a(t)$ на банковском счету домохозяйства описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{a}(t) = r \cdot a(t) + y(t) - c, \qquad a(0) = a_0,$$

где точка над переменной обозначает производную по времени, $r > 0$ – постоянная положительная процентная ставка в экономике, $y(t) > 0$ – переменный по времени положительный доход, растущий с темпом меньше r, a_0 – начальные сбережения домохозяйства. При этом выполнено условие отсутствия финансовых пирамид

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} a(t) \geq 0.$$

(а) Найдите выражение для максимального постоянного потребления домохозяйства через функцию $y(\cdot)$ и константы r и a_0?

(б) Предположим, что государство взимает с домохозяйства паушальный налог $\tau(t)$, так что бюджетное ограничение домохозяйства принимает вид:

$$\dot{a}(t) = r \cdot a(t) + y(t) - \tau(t) - c, \qquad a(0) = a_0, \qquad \lim_{t \to \infty} e^{-rt} a(t) \geq 0,$$

при этом часть сбережений может храниться в государственных долговых облигациях $b(t)$, при помощи которых государство финансирует текущий дефицит бюджета и по которым выплачивает тот же процент r. Государственные расходы в расчёте на одно домохозяйство равны $g(t) < y(t)$, при этом выполнено межвременное бюджетное ограничение

$$\dot{b}(t) = r \cdot b(t) + g(t) - \tau(t), \qquad b(0) = b_0, \qquad \lim_{t \to \infty} e^{-rt} b(t) = 0,$$

Покажите, что имеет место Рикардианская эквивалентность, т.е. при заданных $y(\cdot)$, $g(\cdot)$, a_0, b_0 и выполненных бюджетных ограничениях домохозяйства и государства максимальное постоянное потребление домохозяйства не зависит от распределения налогов во времени $\tau(\cdot)$.