Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2019/2020 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями

1.1.1. (2 балла) Найдите сумму квадратов двух чисел, если известно, что их среднее арифметическое равно 8, а среднее геометрическое равно $2\sqrt{5}$.

Ответ: 216.

Решение. Если a и b — числа, о которых идёт речь в условии, то $a+b=16$, $ab=(2\sqrt{5})^2=20$, поэтому

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=256-40=216.$$

1.1.2. Найдите сумму квадратов двух чисел, если известно, что их среднее арифметическое равно 9, а среднее геометрическое равно $6\sqrt{2}$.

Ответ: 180.

1.1.3. Найдите сумму квадратов двух чисел, если известно, что их среднее арифметическое равно 7, а среднее геометрическое равно $2\sqrt{10}$.

Ответ: 116.

1.1.4. Найдите сумму квадратов двух чисел, если известно, что их среднее арифметическое равно 11, а среднее геометрическое равно $7\sqrt{2}$.

Ответ: 288.

1.2.1. (2 балла) Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $\sqrt{14}x^2-\sqrt{116}x+\sqrt{56}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

Ответ: $\frac{\sqrt{29}}{14}\approx 0.38$.

Решение. Для уравнения $ax^2+bx+c=0$ имеем

$$|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|=\frac{|x_2-x_1|\cdot|x_2+x_1|}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{|\frac{\sqrt{D}}{a}|\cdot|\frac{-b}{a}|}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{|b|\sqrt{D}}{c^2}$$

1.2.2. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $\sqrt{13}x^2-\sqrt{108}x+\sqrt{52}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$

Ответ: $\frac{\sqrt{27}}{13}\approx 0.40$.

1.2.3. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $\sqrt{14}x^2+\sqrt{172}x+\sqrt{126}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{43}}{63}\approx 0.21$.

1.2.4. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $\sqrt{13}x^2+\sqrt{172}x+\sqrt{117}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{43}}{117}\approx 0.45$.

1.2.5. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $\sqrt{7}x^2-\sqrt{116}x+\sqrt{112}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

Ответ: $\frac{\sqrt{29}}{28}\approx 0.19$.

1.2.6. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $\sqrt{11}x^2+\sqrt{180}x+\sqrt{176}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

Ответ: $\frac{\sqrt{45}}{44} \approx 0.15$.

2.1.1. (2 балла) Найти наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(6+5x+x^2)\sqrt{2x^2-x^3-x} \leqslant 0.$$

Ответ: 1.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2-x^3-x=0; \\ \begin{cases} 2x^2-x^3-x>0; \\ 6+5x+x^2 \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x(x-1)^2=0; \\ \begin{cases} -x(x-1)^2>0; \\ (x+2)(x+3) \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=1; \\ \begin{cases} x<0; \\ -3 \leqslant x \leqslant -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Все решения последней системы отрицательные. Поэтому наибольшим решением исходного неравенства будет 1.

2.1.2. Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(3x-x^2-2)\sqrt{4x+4x^2+x^3} \geqslant 0.$$

Ответ: -2.

2.1.3. Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(x^2+3-4x)\sqrt{6x^2+x^3+9x} \leqslant 0.$$

Ответ: -3.

2.1.4. Найти наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(2-x-x^2)\sqrt{4x^2-4x-x^3} \geqslant 0.$$

Ответ: 2.

2.1.5. Найти наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(x^2-2-x)\sqrt{6x^2-9x-x^3} \leqslant 0.$$

Ответ: 3.

2.1.6. Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(7x-x^2-12)\sqrt{x+x^3+2x^2} \geqslant 0.$$

Ответ: -1.

2.1.7. Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(5x - x^2 - 6)\sqrt{4x^2 + x^3 + 4x} \leqslant 0.$$

Ответ: -2.

2.1.8. Найти наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(3 - x^2 - 2x)\sqrt{6x^2 - x^3 - 9x} \geqslant 0.$$

Ответ: 3.

3.1.1. (12 баллов) Вычислите $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha + \cos\beta = \frac{1}{4}$ и $\cos\alpha + \sin\beta = -\frac{8}{5}$.

Ответ: $\frac{249}{800} \approx 0.31$.

Решение. Возводя данные равенства в квадрат и складывая, получаем

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{1}{16} + \frac{64}{25} = \frac{1049}{400},$$

откуда находим $2\sin(\alpha + \beta) + 2 = \frac{1049}{400}$, т.е. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{249}{800} \approx 0.31$.

3.1.2. Вычислите $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha - \cos\beta = \frac{3}{4}$ и $\cos\alpha + \sin\beta = -\frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{511}{800} \approx 0.64$.

3.1.3. Вычислите $\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{4}{5}$ и $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{281}{450} \approx -0.62$.

3.1.4. Вычислите $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha - \cos\beta = -\frac{3}{5}$ и $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{7}{4}$.

Ответ: $-\frac{569}{800} \approx -0.71$.

3.2.1. (12 баллов) Уравнение $x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{6}}{1 + x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{6}}{1 + x_1}\right)^2.$$

Ответ: 220.

Решение. Так как $x_1^2 = -5x_1 - 1$, то $(1 + x_1)^2 = 1 + 2x_1 - 5x_1 - 1 = -3x_1$. Тогда

$$\left(\frac{x_1\sqrt{6}}{1 + x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{6}}{1 + x_1}\right)^2 = 6\left(\frac{-5x_1 - 1}{-3x_2} + \frac{-5x_2 - 1}{-3x_1}\right) = \frac{10(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} =$$

$$= \frac{10(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{10 \cdot 25 - 20 - 10}{1} = 220.$$

3.2.2. Уравнение $x^2 - 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{7}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{7}}{1+x_1}\right)^2.$$

Ответ: 110.

3.2.3. Уравнение $x^2 + 7x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3\sqrt{3}x_1}{1-x_2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}x_2}{1-x_1}\right)^2.$$

Ответ: 966.

3.2.4. Уравнение $x^2 - 7x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{5}}{1-x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{5}}{1-x_1}\right)^2.$$

Ответ: 322.

3.3.1. (12 баллов) Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}+3\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{3}}\right) : \frac{3+\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Ответ: 3.

Решение. Введем обозначение $a = \sqrt[3]{3}$. Тогда выражение преобразуется к виду

$$\left(\frac{2}{a}+3\right) - \left(\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} - \frac{2}{1-a}\right) : \frac{a^3+a^2+2a}{a^3-1}$$

и после упрощений и выполнений деления преобразуется к виду $\left(\frac{2}{a}+3\right) - \frac{2}{a}$.

3.3.2. Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}}+4\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{4}+1}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{4}}\right) : \frac{4+\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Ответ: 4.

3.3.3. Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{5}}+5\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{5}+1}{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{5}}\right) : \frac{5+\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}}{4}.$$

Ответ: 5.

3.3.4. Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{6}}+6\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{6}+1}{5}-\frac{1}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{6}+1}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{6}}\right):\frac{6+\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{6}}{5}.$$

Ответ: 6.

4.1.1. (12 баллов) Из пункта A в пункт B в 13:00 одновременно выехали автобус и велосипедист. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил велосипедиста в пункте C в 13:10. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал велосипедиста в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{2}{3}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и велосипедиста постоянны.

Ответ: 40.

Решение. Пусть v_1 и v_2 — скорости (в км/ч) велосипедиста и автобуса соответственно. К моменту первой встречи они суммарно проехали $\frac{1}{6}v_1+\frac{1}{6}v_2=8$ км. До момента следующей встречи прошло время, равное $\frac{s_0}{v_1}=\frac{2\cdot\frac{1}{6}v_1+s_0}{v_2}$ ч, где $s_0=\frac{1}{3}$ км. Отсюда находим $\frac{1}{4}v_1^2+v_1-24=0$, $v_1=8$ км/ч (второй корень отрицателен), $v_2=40$ км/ч.

4.1.2. Из пункта A в пункт B в 11:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 11:10. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{1}{3}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

Ответ: 42.

4.1.3. Из пункта A в пункт B в 10:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 10:15. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{1}{4}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 5 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

Ответ: 36.

4.1.4. Из пункта A в пункт B в 14:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 14:10. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{2}{15}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

Ответ: 44.

4.2.1. (12 баллов) Каждое утро каждый член семьи Ивановых выпивает 180-граммовую чашку кофе с молоком. Количество молока и кофе в чашках у них разное. Маша Иванова выяснила, что она выпила $\frac{2}{9}$ части всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{6}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

Ответ: 5.

Решение. Пусть всего было x (например, грамм) молока и y грамм кофе, а в семье n человек. Так как каждый член семьи выпил одно и то же количество кофе с молоком, то $\left(\frac{2x}{9}+\frac{y}{6}\right)n = = x+y \Leftrightarrow (4x+3y)n = 18x+18y \Leftrightarrow 2x(2n-9) = 3y(6-n)$. Отсюда следует, что $2n-9$ и $6-n$ имеют одинаковые знаки, то есть $4,5 < n < 6$. Так как n целое, то $n=5$.

4.2.2. Каждое утро каждый член семьи Петровых выпивает 240-граммовую кружку кофе с молоком. Количество молока и кофе в кружках у них разное. Олег Петров выяснил, что он выпил $\frac{2}{11}$ части всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{7}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

Ответ: 6.

4.2.3. Каждое утро каждый член семьи Ивановых выпивает 170-граммовую чашку кофе с молоком. Количество молока и кофе в чашках у них разное. Ира Иванова выяснила, что она выпила $\frac{2}{11}$ части всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{4}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

Ответ: 5.

4.2.4. Каждое утро каждый член семьи Петровых выпивает 230-граммовую кружку кофе с молоком. Количество молока и кофе в кружках у них разное. Кирилл Петров выяснил, что он выпил $\frac{2}{7}$ часть всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{5}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

Ответ: 4.

4.2.5. Каждое утро каждый член семьи Ивановых выпивает 190-граммовую чашку кофе с молоком. Количество молока и кофе в чашках у них разное. Оля Иванова выяснила, что она выпила $\frac{1}{5}$ часть всего выпитого в это утро молока и $\frac{2}{13}$ части всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

Ответ: 6.

4.2.6. Каждое утро каждый член семьи Петровых выпивает 220-граммовую кружку кофе с молоком. Количество молока и кофе в кружках у них разное. Антон Петров выяснил, что он выпил $\frac{2}{5}$ части всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{4}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

Ответ: 3.

4.3.1. (12 баллов) На столе в ряд лежит 13 гирек, упорядоченных по массе (слева – самая легкая, справа – самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 5 грамм, а суммарная масса гирек не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки.

Ответ: 185.

Решение. Если масса самой тяжелой гирьки равна m, то массы остальных гирек будут не менее, чем $m-5$, $m-10$, $\ldots$, $m-60$ грамм, а их суммарная масса будет не менее, чем $13m-390$ грамм. Тогда $13m-390 \leq 2019$, откуда $m \leq 185$. Остается убедиться, что набор гирек с массами $185, 180, 175, 170, 165, 160, 155, 150, 145, 140, 135, 130$ и 129 грамм удовлетворяет условию задачи.

4.3.2. На столе в ряд лежит 13 гирек, упорядоченных по массе (слева – самая легкая, справа – самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 6 грамм, а суммарная масса гирек не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки.

Ответ: 191.

4.3.3. На столе в ряд лежит 14 гирек, упорядоченных по массе (слева – самая легкая, справа – самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 5 грамм, а суммарная масса гирек не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки.

Ответ: 176.

4.3.4. На столе в ряд лежит 14 гирек, упорядоченных по массе (слева – самая легкая, справа – самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 6 грамм, а суммарная масса гирек не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки.

Ответ: 183.

4.4.1. (12 баллов) Коза съедает 1 воз сена за 6 недель, овца — за 8, а корова — за 3. За сколько недель съедят 30 таких возов сена 5 коз, 3 овцы и 2 коровы вместе?

Ответ: 16.

Решение. Коза поедает сено со скоростью $1/6$ воза в неделю, овца — со скоростью $1/8$ воза в неделю, корова — со скоростью $1/3$ воза в неделю. Тогда 5 коз, 3 овцы и 2 коровы вместе будут поедать сено со скоростью $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{2}{3}=\frac{20+9+16}{24}=\frac{45}{24}=\frac{15}{8}$ воза в неделю. Значит, 30 возов сена они съедят за $30:\frac{15}{8}=16$ недель.

4.4.2. Собака съедает 1 упаковку корма за 4 дня, кошка — за 5, а хомяк — за 10. За сколько дней съедят 63 такие упаковки корма 3 собаки, 7 кошек и 1 хомяк вместе?

Ответ: 28.

4.4.3. Лошадь выпивает 1 бочонок воды за 6 дней, верблюд — за 2, а осел — за 9. За сколько дней выпьют 75 таких бочонков воды 5 лошадей, 3 верблюда и 4 осла вместе?

Ответ: 27.

4.4.4. Курица съедает 1 мешок зерна за 10 недель, утка — за 8, а гусь — за 5. За сколько недель съедят 45 таких мешков зерна 7 куриц, 3 утки и 4 гуся вместе?

Ответ: 24.

5.1.1. (12 баллов) В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 35°, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2.

Ответ: 75.

Решение. Заметим, что углы B и C треугольника ABC больше, чем $\angle A=35^\circ$ (в противном случае он был бы тупоугольным), поэтому точка C_1 лежит на стороне AB между точками B и C_2, а точка B_1 лежит на стороне AC между точками C и B_2. Поэтому точка K пересечения прямых B_1C_2 и C_1B_2 лежит внутри треугольника. Поскольку C_1B_2 — медиана прямоугольного треугольника CC_1A, треугольник C_1B_2A равнобедренный. Следовательно,

$\angle AB_1C_2 = 35°$. Аналогично получаем $\angle AC_1B_2 = 35°$, откуда $\angle AB_2C_1 = 180° - 2 \cdot 35° = 110°$. Тогда $\angle B_1KB_2 = \angle AB_2K - \angle AB_1K = 110° - 35° = 75°$.

5.1.2. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $25°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла C_1KC_2.

Ответ: 105.

5.1.3. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $40°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2.

Ответ: 60.

5.1.4. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $20°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла C_1KC_2.

Ответ: 120.

5.2.1. (12 баллов) BL – биссектриса треугольника ABC. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 2$, $|BL| = 3\sqrt{10}$, $|CL| = 3$.

Ответ: $\dfrac{15\sqrt{15}}{4} \approx 14.52$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника, $AB : BC = AL : LC = 2 : 3$, значит, если $AB = 2x$, то $BC = 3x$. Тогда, поскольку $BL^2 = AB \cdot BC - AL \cdot LC$, получаем $90 = 6x^2 - 6$, откуда $x = 4$. Таким образом, треугольник ABC имеет стороны 8, 12 и 5. Отсюда по формуле Герона площадь треугольника ABC равна

$$S = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - BC) \cdot (p - AC)} = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2}} = \frac{15\sqrt{15}}{4}.$$

5.2.2. BL – биссектриса треугольника ABC. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 3$, $|BL| = 6\sqrt{5}$, $|CL| = 4$.

Ответ: $\dfrac{21\sqrt{55}}{4} \approx 38.94$.

5.2.3. BL – биссектриса треугольника ABC. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 2$, $|BL| = \sqrt{30}$, $|CL| = 5$.

Ответ: $\dfrac{7\sqrt{39}}{4} \approx 10.93$.

5.2.4. BL – биссектриса треугольника ABC. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 4$, $|BL| = 2\sqrt{15}$, $|CL| = 5$.

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{231}}{4} \approx 34.2$.

5.3.1. (12 баллов) Среди всевозможных треугольников ABC таких, что $BC = 2\sqrt[4]{3}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, найдите тот, площадь которого максимальна. Чему равна эта площадь?

Ответ: 3.

Решение. ГМТ точек , из которых отрезок BC "виден"под углом α, состоит из дуг двух окружностей, из центра которых отрезок BC "виден"под углом $2\pi - 2\alpha$. Наиболее удаленные от отрезка точки этих дуг — их середины. Значит, искомый треугольник — равнобедренный, и его площадь равна $\frac{a^2}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

5.3.2. Среди всевозможных треугольников ABC таких, что $BC = 4\sqrt[4]{3}$, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, найдите тот, площадь которого максимальна. Чему равна эта площадь?

Ответ: 4.

5.3.3. Среди всевозможных треугольников ABC таких, что $BC = 8\sqrt[4]{3}$, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, найдите тот, площадь которого максимальна. Чему равна эта площадь?

Ответ: 16.

6.1.1. (12 баллов) Решите уравнение

$$5^{\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}} = \sqrt{\left(5^{\sqrt[4]{(x+1)^5}}\right)^3}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько.

Ответ: $\frac{49}{16} \approx 3.06$.

Решение. Уравнение равносильно следующему: $(x+1)^{3/2} = \frac{3}{2}(x+1)^{5/4}$, или $(x+1)((x+1)^{1/4} - \frac{3}{2}) = 0$, откуда находим корни: $x = -1$, $x = \frac{81}{16} - 1 = \frac{65}{16}$. Их сумма равна $\frac{49}{16} \approx 3.06$.

6.1.2. Решите уравнение

$$3^{\sqrt[3]{x^2-2x+1}} = \sqrt[5]{\left(3^{\sqrt[6]{x-1}}\right)^2}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько.

Ответ: $\frac{54}{25} = 2.16$.

6.1.3. Решите уравнение

$$5^{\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}} = \sqrt[3]{\left(5^{\sqrt[6]{(x-1)^7}}\right)^4}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько.

Ответ: $\frac{118}{27} \approx 4.37$.

6.1.4. Решите уравнение

$$3^{\sqrt[3]{x^2+2x+1}} = \sqrt{\left(3^{\sqrt{x+1}}\right)^3}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько.

Ответ: $\frac{601}{64} \approx 9.39$.

6.2.1. (12 баллов) Решите систему уравнений $\begin{cases} 9y^2 - 4x^2 = 144 - 48x, \\ 9y^2 + 4x^2 = 144 + 18xy. \end{cases}$

Получив решение $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$, в ответ запишите сумму квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Ответ: 68.

Решение. Из первого уравнения получаем $(3y)^2 = (2x-12)^2$ и поочередно подставляем во второе уравнение $y = \frac{2x-12}{3}$ и $y = \frac{12-2x}{3}$. Получаются решения: $(x;y) = (0;4),(0;-4),(6;0)$. Ответ: $6^2+4^2+(-4)^2 = 68$.

6.2.2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4y^2 - x^2 = 36 + 12x, \\ 4y^2 + x^2 = 36 - 6xy. \end{cases}$

Получив решение $(x_1;y_1),(x_2;y_2),...,(x_n;y_n)$, в ответ запишите сумму квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2.$$

Ответ: 54.

6.2.3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9y^2 - x^2 = 144 + 24x, \\ 9y^2 + x^2 = 144 - 9xy. \end{cases}$

Получив решение $(x_1;y_1),(x_2;y_2),...,(x_n;y_n)$, в ответ запишите сумму квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2.$$

Ответ: 176.

6.2.4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4y^2 - 9x^2 = 36 + 36x, \\ 4y^2 + 9x^2 = 36 - 18xy. \end{cases}$

Получив решение $(x_1;y_1),(x_2;y_2),...,(x_n;y_n)$, в ответ запишите сумму квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2.$$

Ответ: 22.

6.3.1. (12 баллов) Решите уравнение $2x^3 + 24x = 3 - 12x^2$.

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{19}{2}} - 2 \approx 0.12$.

Решение. $2x^3+24x = 3-12x^2 \Leftrightarrow 2(x^3+6x^2+12x+8)-16-3 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^3 = \frac{19}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{19}{2}}-2$.

6.3.2. Решите уравнение $2x^3 + 24x = 5 + 12x^2$.

Ответ: $2 - \sqrt[3]{\dfrac{11}{2}} \approx 0.23$.

6.3.3. Решите уравнение $2x^3 + 54x = -5 - 18x^2$.

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{49}{2}} - 3 \approx -0.10$.

6.3.4. Решите уравнение $2x^3 + 54x = 9 + 18x^2$.

Ответ: $3 - \sqrt[3]{\dfrac{45}{2}} \approx 0.18$.

6.4.1. (12 баллов) Решите неравенство $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}-\sqrt{33-x}>4$. В ответ запишите сумму всех его целочисленных решений.

Ответ: 525.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}>\sqrt{33-x}+4.$$

Найдём область допустимых значений переменной x:

$$\begin{cases} x-4 \geqslant 0, \\ x+1 \geqslant 0, \\ 2x \geqslant 0, \\ 33-x \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $x \in [4,33]$. Нас интересуют целые значения из этого отрезка, удовлетворяющие неравенству. Заметим, что левая часть полученного неравенства возрастает, а правая строго убывает. Они совпадают при $x=8$. При $x \in \{4,5,6,7\}$ левая часть меньше правой, при $x \in \{9,10,\ldots,33\}$ левая часть больше правой. Вычисляем сумму. $9+10+\ldots+33=\frac{9+33}{2}\cdot 25=525$.

6.4.2. Решите неравенство $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{32-x}>4$. В ответ запишите сумму всех его целочисленных решений.

Ответ: 500.

6.4.3. Решите неравенство $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}-\sqrt{38-x}>7$. В ответ запишите сумму всех его целочисленных решений.

Ответ: 650.

6.4.4. Решите неравенство $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+3}-\sqrt{36-x}>7$. В ответ запишите сумму всех его целочисленных решений.

Ответ: 600.

7.1.1. (12 баллов) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\frac{\sin \pi x-\cos 2\pi x}{(\sin \pi x-1)^2+\cos^2 \pi x-1}=0.$$

Ответ: -0.5.

Решение. Преобразуя уравнение, получаем

$$\frac{\sin \pi x-1+2\sin^2 \pi x}{2\sin \pi x-1}=0, \qquad \frac{(\sin \pi x+1)(2\sin \pi x-1)}{2\sin \pi x-1}=0,$$

откуда $\sin \pi x=-1$, $x=-\frac{1}{2}+2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Наибольшее отрицательное среди этих чисел равно $-\frac{1}{2}$.

7.1.2. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\frac{\sin \pi x+\cos 2\pi x}{(\sin \pi x+1)^2+\cos^2 \pi x-1}=0.$$

Ответ: -1.5.

7.1.3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\frac{\sin \pi x-\cos 2\pi x}{(\sin \pi x+1)^2+\cos^2 \pi x}=0.$$

Ответ: $-\frac{7}{6}\approx -1.17$.

7.1.4. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\sin \pi x+\cos 2\pi x}{(\sin \pi x-1)^2+\cos^2 \pi x}=0.$$

Ответ: $\frac{7}{6}\approx 1.17$.

7.2.1. (12 баллов) Вычислите значение выражения $\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где a и b - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a-b|$.

Ответ: 7.

Решение. Так как $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и $\beta=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $A=\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $\sin A=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$. После вычислений получаем $\sin A=-\frac{1}{2}$, откуда следует, что $A=-\frac{\pi}{6}$. Значит, $a=-1$, $b=6$, и $|a-b|=7$. Заметим, что возможна также запись ответа в виде $a=1$, $b=-6$, но модуль разности остаётся тем же.

7.2.2. Вычислите значение выражения $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где a и b - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a-b|$.

Ответ: 5.

7.2.3. Вычислите значение выражения $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)-\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где a и b - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a-b|$.

Ответ: 4.

7.2.4. Вычислите значение выражения $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}-\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где a и b - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a+b|$.

Ответ: 3.

7.2.5. Вычислите значение выражения $\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где a и b - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a+b|$.

Ответ: 5.

7.3.1. (12 баллов) Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2-x+1))=\sin(\pi(x-1)),$$

принадлежащих отрезку $[0;2]$.

Ответ: 4.73.

Решение. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\pi(x^2-x+1)=\pi(x-1)+2\pi k,\\ \pi(x^2-x+1)=\pi-(x-1)\pi+2\pi n\end{array}\right. \quad (k,n\in\mathbb{Z}).$$

Преобразуя совокупность, получим, что

$$\left[\begin{array}{l}x^2-x+1=(x-1)+2k,\\ x^2-x+1=1-(x-1)+2n,\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=2k-1,\\ x^2=2n+1,\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=1\pm\sqrt{2k-1},\\ x=\pm\sqrt{2n+1}.\end{array}\right.$$

Если $0\le 1\pm\sqrt{2k-1}\le 2$, то $-1\le\pm\sqrt{2k-1}\le 1 \ \Leftrightarrow\ 0\le 2k-1\le 1 \ \Leftrightarrow\ k=1$, тогда $x=0$ или $x=2$. Если $0\le\sqrt{2n+1}\le 2$, то $0\le 2n+1\le 4 \ \Leftrightarrow\ n=0$ или $n=1$; тогда $x=1$ или $x=\sqrt{3}$. Ответ: $0+1+2+\sqrt{3}$.

7.3.2. Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2-3x+3))=\sin(\pi(x-2)),$$

принадлежащих отрезку $[1;3]$.

Ответ: 8.73.

7.3.3. Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2+3x+3))=\sin(\pi(x+1)),$$

принадлежащих отрезку $[-2;0]$.

Ответ: -3.27.

7.3.4. Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2+5x+7))=\sin(\pi(x+2)),$$

принадлежащих отрезку $[-3;-1]$.

Ответ: -7.27.

7.4.1. (12 баллов) Сколько целочисленных корней уравнения

$$\cos 2\pi x+\cos\pi x=\sin 3\pi x+\sin\pi x$$

лежит между корнями уравнения $x^2+10x-17=0$?

Ответ: 7.

Решение. Если $x=2k$, $k\in\mathbb{Z}$, то $\cos 2\pi x+\cos\pi x=\cos 4\pi k+\cos 2\pi k=2$, $\sin 3\pi x+\sin\pi x=\sin 6\pi k+\sin 2\pi k=0$, поэтому чётных чисел среди корней первого уравнения нет.
Если же $x=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$, то $\cos 2\pi x+\cos\pi x=\cos(4\pi k+2\pi)+\cos(2\pi k+\pi)=0$, $\sin 3\pi x+\sin\pi x=\sin(6\pi k+3\pi)+\sin(2\pi k+\pi)=0$, поэтому все нечётные числа являются корнями первого уравнения.
Корни второго уравнения равны $-5\pm\sqrt{42}$; меньший из них лежит между -12 и -11, а больший — между 1 и 2. Таким образом, между корнями второго уравнения лежат 7 нечётных чисел $-11,-9,-7,-5,-3,-1,1$, то есть 7 целочисленных корней первого уравнения.

7.4.2. Сколько целочисленных корней уравнения

$$\sin\pi x+\sin 2\pi x+1=\cos\pi x+\cos 3\pi x-1$$

лежит между корнями уравнения $x^2+12x-29=0$?

Ответ: 9.

7.4.3. Сколько целочисленных корней уравнения

$$\sin \pi x+\cos \frac{\pi x}{2}=\cos \frac{3\pi x}{2}+\sin \frac{\pi x}{2}$$

лежит между корнями уравнения $x^2+14x-33=0$?

Ответ: 10.

7.4.4. Сколько целочисленных корней уравнения

$$\cos 2\pi x+\sin 3\pi x-1=\sin \pi x+\cos \pi x+1$$

лежит между корнями уравнения $x^2+18x-21=0$?

Ответ: 11.

8.1.1. (12 баллов) Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $3, 7, 11, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $2, 9, 16, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 2870.

Решение.

$$a_n=a_1+(n-1)d_1=3+(n-1)\cdot 4$$

$$b_m=b_1+(m-1)d_2=2+(m-1)\cdot 7$$

$$3+(n-1)\cdot 4=2+(m-1)\cdot 7$$

$$4(n+1)=7m, \quad m=4k, \quad n=7k-1.$$

Рассмотрим последовательность совпадающих членов прогрессий A_k. При $k=1$ находим $n=6$, $m=4$. При $k=2$ находим $n=13, m=8$. Первый член $A_1=a_6=23$, разность $d=a_{13}-a_6=51-23=28$. Всего в последовательности $[100:7]=14$ членов, и их сумма равна

$$S=\frac{2\cdot 23+13\cdot 28}{2}\cdot 15=2870.$$

8.1.2. Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $2, 9, 16, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $3, 7, 11, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 8975.

8.1.3. Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $4, 9, 14, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $1, 8, 15, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 3591.

8.1.4. Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $1, 8, 15, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $4, 9, 14, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 7230.

8.1.5. Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $1, 4, 7, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $3, 8, 13, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 3110.

8.1.6. Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $3, 8, 13, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $1, 4, 7, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 8349.

8.1.7. Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $2, 5, 8, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $3, 10, 17, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 2149.

8.1.8. Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $3, 10, 17, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $2, 5, 8, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 11649.

8.2.1. (12 баллов) Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии попарно различны и равны соответственно второму, четвертому и седьмому членам некоторой арифметической прогрессии, а произведение этих трех чисел равно 64. Найти первый член геометрической прогрессии.

Ответ: $\frac{8}{3} \approx 2.67$.

Решение. Обозначим первый член геометрической прогрессии через b. Тогда второй член геометрической прогрессии равен $bq = b + 2d$, а третий - $bq^2 = b + 5d$. Произведение трех чисел есть $(bq)^3 = 64$, откуда получаем $bq = 4$. Следовательно $b = 4 - 2d$ и $bq^2 = 4 + 3d$. Перемножая эти равенства, приходим к квадратному уравнению $(bq)^2 = (4 - 2d)(4 + 3d) \Leftrightarrow 16 = 16 + 4d - 6d^2$. Находим $d = \frac{2}{3}$, а значит, $b = 4 - 2d = \frac{8}{3}$.

8.2.2. Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии попарно различны и равны соответственно третьему, шестому и десятому членам некоторой арифметической прогрессии, а произведение этих трех чисел равно 125. Найти первый член геометрической прогрессии.

Ответ: 3.75.

8.2.3. Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии попарно различны и равны соответственно третьему, пятому и восьмому членам некоторой арифметической прогрессии, а произведение этих трех чисел равно 27. Найти первый член геометрической прогрессии.

Ответ: 2.

8.2.4. Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии попарно различны и равны соответственно четвертому, восьмому и тринадцатому членам некоторой арифметической прогрессии, а произведение этих трех чисел равно 216. Найти первый член геометрической прогрессии.

Ответ: 4.8.

8.3.1. (12 баллов) Пять чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма квадратов — 70. Найдите наименьшее их этих чисел.

Ответ: $-2\sqrt{7} \approx -5.29$.

Решение. Представим члены прогрессии как

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d.$$

Тогда сумма квадратов равна

$$(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2 = 5a^2+10d^2 = 70,$$

а сумма кубов равна

$$(a-2d)^3+(a-d)^3+a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3 = 5a^3+30ad^2 = a(5a^2+30d^2) = 0.$$

Отсюда $a=0$, $d=\sqrt{7}$, и наименьший член последовательности $a-2d=-2\sqrt{7}$.

8.3.2. Семь чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма квадратов — 224. Найдите наибольшее их этих чисел.

Ответ: $6\sqrt{2} \approx 8.49$.

8.3.3. Пять чисел образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма четвертых степеней — 136. Найдите наименьшее их этих чисел.

Ответ: $-2\sqrt{2} \approx -2.83$.

8.3.4. Семь чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма квадратов — 756. Найдите наибольшее их этих чисел.

Ответ: $9\sqrt{3} \approx 15.59$.

8.3.5. Пять чисел образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма четвертых степеней — 306. Найдите наименьшее их этих чисел.

Ответ: $-2\sqrt{3} \approx -3.46$.

9.1.1. (12 баллов) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg}^2 x - 1$ на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$.

Ответ: $3+6\sqrt{2} \approx 11.49$.

Решение. При $x>0$ имеем $t = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x \geqslant 2\sqrt{2}$ (равенство достигается при $x = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$), при этом $f(x) = (\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x)^2 - 3(\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x) - 5$. Значит, нужно найти наименьшее значение функции $g(t) = t^2 - 3t - 5$ при $t \geqslant 2\sqrt{2}$. Функция $g(t)$ возрастает при $t \geqslant \frac{3}{2}$, а $2\sqrt{2} \geqslant \frac{3}{2}$, поэтому искомое наименьшее значение равно $g(2\sqrt{2}) = 3+6\sqrt{2} \approx 11.49$.

9.1.2. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 12\operatorname{ctg} x + 9\operatorname{ctg}^2 x - 3$ на интервале $(-\frac{\pi}{2}; 0)$.

Ответ: $3+8\sqrt{3} \approx 16.86$.

9.1.3. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 8\operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg}^2 x + 5$ на интервале $(\frac{\pi}{2}; \pi)$.

Ответ: $9+8\sqrt{2} \approx 20.31$.

9.1.4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x + 9\operatorname{ctg}^2 x + 4$ на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$.

Ответ: $10+4\sqrt{3}\approx 16.93$.

9.2.1. (12 баллов) Найдите минимальное значение выражения $\cos(x+y)$, если известно, что $\cos x+\cos y=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{17}{18}\approx -0.94$.

Решение. Имеем $2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{3}$, откуда $\left|\cos\dfrac{x+y}{2}\right|\geqslant\dfrac{1}{6}$, поэтому по формуле косинуса двойного аргумента $\cos(x+y)=2\left|\cos\dfrac{x+y}{2}\right|^2-1\geqslant-\dfrac{17}{18}$. Минимальное значение достигается при $x=y$.

9.2.2. Найдите максимальное значение выражения $\cos(x+y)$, если известно, что $\cos x-\cos y=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{31}{32}\approx 0.97$.

9.2.3. Найдите минимальное значение выражения $\cos(x-y)$, если известно, что $\sin x+\sin y=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{7}{9}\approx -0.78$.

9.2.4. Найдите максимальное значение выражения $\cos(x-y)$, если известно, что $\sin x-\sin y=\dfrac{3}{4}$.

Ответ: $\dfrac{23}{32}\approx 0.72$.

10.1.1. (12 баллов) Числа a и b таковы, что многочлен $x^4+x^3+2x^2+ax+b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b.

Ответ: $\frac{49}{64}\approx 0.77$.

Решение. Пусть $(x^2+Ax+B)^2=x^4+x^3+2x^2+ax+b$. Раскрывая скобки, получаем

$$x^4+2Ax^3+(A^2+2B)x^2+2ABx+B^2=x^4+x^3+2x^2+ax+b,$$

поэтому, приравнивая коэффициенты при степенях, находим $2A=1$, $A^2+2B=2$, $2AB=a$, $B^2=b$. Отсюда $A=\frac{1}{2}$, $B=1-\frac{A^2}{2}=\frac{7}{8}$, $b=B^2=\frac{49}{64}\approx 0.77$.

10.1.2. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4+3x^3+x^2+ax+b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b.

Ответ: $\frac{25}{64}\approx 0.39$.

10.1.3. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4+x^3-x^2+ax+b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b.

Ответ: $\frac{25}{64}\approx 0.39$.

10.1.4. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4-x^3+x^2+ax+b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b.

Ответ: $\frac{9}{64} \approx 0.14$.

10.2.1. (12 баллов) Найдите наибольшее из целых значений a, при которых уравнение

$$\sqrt[3]{x^2-(a+7)x+7a}+\sqrt[3]{3}=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: 11.

Решение. При искомых значениях a числа $x-a$ и $x-7$ целые, а их произведение равно -3, поэтому возможны 4 случая:

$$\begin{cases} x-a=1, \\ x-7=-3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-a=3, \\ x-7=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-a=-1, \\ x-7=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-a=-3, \\ x-7=1, \end{cases}$$

откуда находим соответственно

$$\begin{cases} a=3, \\ x=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=3, \\ x=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=11, \\ x=10; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=11, \\ x=8. \end{cases}$$

Значит, искомыми значениями являются $a=3$ и $a=11$, из которых наибольшее равно 11.

10.2.2. Найдите наибольшее из целых значений a, при которых уравнение

$$\sqrt[5]{x^2-(a+9)x+9a}+\sqrt[5]{3}=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: 13.

10.2.3. Найдите наименьшее из целых значений a, при которых уравнение

$$\sqrt[3]{x^2-(a-8)x-8a}+\sqrt[3]{5}=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: -14.

10.2.4. Найдите наименьшее из целых значений a, при которых уравнение

$$\sqrt[5]{x^2-(a-9)x-9a}+\sqrt[5]{5}=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: -15.

10.3.1. (12 баллов) Кривая, заданная уравнением $y=2^p x^2+5px-2^{p^2}$, пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Найдите сумму всех значений параметра p, при которых центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на оси Ox.

Ответ: -1.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c ($c \neq 0$), график которого пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy – в точке C. Тогда $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$, $C(0;c)$. Принадлежность центра окружности, описанной около треугольника ABC, оси Ox эквивалентна тому, что угол ACB – прямой. Нетрудно найти, что угловой коэффициент прямой AC равен $k_1=-\dfrac{c}{x_1}$, а угловой коэффициент прямой BC равен $k_2=-\dfrac{c}{x_2}$. Перпендикулярность этих прямых равносильна условию $k_1 \cdot k_2=-1$, то есть $x_1x_2=-c^2$, что, с учетом теоремы Виета, можно переписать в виде $ac=-1$.

Для трехчлена из условия задачи условие $ac=-1$ приобретает вид $2^{p+p^2}=1$, откуда $p=0$, $p=-1$.

10.3.2. Кривая, заданная уравнением $y=4^p x^2+3px-2^{p^2}$, пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Найдите сумму всех значений параметра p, при которых центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на оси Ox.

Ответ: -2.

10.3.3. Кривая, заданная уравнением $y=8^p x^2+px-2^{p^2}$, пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Найдите сумму всех значений параметра p, при которых центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на оси Ox.

Ответ: -3.

10.3.4. Кривая, заданная уравнением $y=16^p x^2-px-2^{p^2}$, пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Найдите сумму всех значений параметра p, при которых центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на оси Ox.

Ответ: -4.

10.4.1. (12 баллов) Найдите все пары целых чисел (x,y), являющиеся решениями уравнения

$$7xy-13x+15y-37=0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Ответ: 4.

Решение. Домножив обе части уравнения на 7, получим

$$7\cdot 7xy-13\cdot 7x+15\cdot 7y-37\cdot 7=0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(7x+15)(7y-13)=64.$$

Если x и y целые, то числа $7x+15$ и $7y-13$ тоже целые и делятся на 7 с остатком 1. Всевозможные разложения числа 64 в произведение двух целых множителей выглядят так:

$$64=1\cdot 64=2\cdot 32=4\cdot 16=8\cdot 8=-1\cdot(-64)=-2\cdot(-32)=-4\cdot(-16)=-8\cdot(-8).$$

Из имеющихся среди этих множителей чисел на 7 с остатком 1 делятся 1, 8 и 64. Поэтому возможны варианты

$$7x+15=1,\ 7y-13=64\Rightarrow(x,y)=(-2,11);$$

$$7x+15=8,\ 7y-13=8\Rightarrow(x,y)=(-1,3);$$

$$7x+15=64,\ 7y-13=1\Rightarrow(x,y)=(7,2).$$

Таким образом, сумма возможных значений x равна $-2-1+7=4$.

10.4.2. Найдите все пары целых чисел (x,y), являющиеся решениями уравнения

$$7xy+15x-13y-37=0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Ответ: 16.

10.4.3. Найдите все пары целых чисел (x, y), являющиеся решениями уравнения

$$7xy + 6x - 22y - 28 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Ответ: -1.

10.4.4. Найдите все пары целых чисел (x, y), являющиеся решениями уравнения

$$7xy - 22x + 6y - 28 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Ответ: -13.

10.4.5. Найдите все пары целых чисел (x, y), являющиеся решениями уравнения

$$4xy - 23x + 9y - 58 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Ответ: 1.

10.4.6. Найдите все пары целых чисел (x, y), являющиеся решениями уравнения

$$4xy + 9x - 23y - 58 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Ответ: 25.

10.4.7. Найдите все пары целых чисел (x, y), являющиеся решениями уравнения

$$4xy + 11x - 21y - 64 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Ответ: 8.

10.4.8. Найдите все пары целых чисел (x, y), являющиеся решениями уравнения

$$4xy - 21x + 11y - 64 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Ответ: -16.