Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2019/2020 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 класса с ответами и решениями

1.1. (2 балла) Средний возраст сотрудников фирмы, состоящей из 13 человек, составляет 35 лет. В фирму приняли на работу нового сотрудника, после чего средний возраст сотрудников составил 34 года. Найдите возраст нового сотрудника.

Ответ: 21.

Решение. Сумма возрастов сотрудников до принятия нового была равна $13 \cdot 35$, а после приема нового сотрудника сумма возрастов стала равна $14 \cdot 34$. Следовательно, возраст нового сотрудника равен $14 \cdot 34 - 13 \cdot 35 = 35 - 14 = 21$.

1.2. Средний возраст сотрудников фирмы, состоящей из 13 человек, составляет 36 лет. В фирму приняли на работу нового сотрудника, после чего средний возраст сотрудников составил 35 лет. Найдите возраст нового сотрудника.

Ответ: 22.

1.3. Средний возраст сотрудников фирмы, состоящей из 13 человек, составляет 37 лет. В фирму приняли на работу нового сотрудника, после чего средний возраст сотрудников составил 36 лет. Найдите возраст нового сотрудника.

Ответ: 23.

2.1. (2 балла) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что $\angle BAD = 50°$, $\angle CAD = 20°$ и $AD = BD$. Найдите $\cos\angle C$.

Ответ: $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Решение. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ABD = \angle BAD = 50°$, тогда $\angle C = 180° - 70° - 50° = 60°$, $\cos\angle C = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

2.2. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что $\angle BAD = 60°$, $\angle CAD = 15°$ и $AD = BD$. Найдите $\sin\angle C$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$.

2.3. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что $\angle BAD = 70°$, $\angle CAD = 10°$ и $AD = BD$. Найдите $\operatorname{tg}\angle C$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$.

3.1. (12 баллов) Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 240 рублей. Два ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 440 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластиков, 4 ручек и 6 фломастеров?

Ответ: 520.

Решение. Из условия следует, что 3 ластика, 8 ручек и 6 фломастеров стоят $440 + 240 = 680$ рублей. Кроме того, 2 ластика, 6 ручек и 4 фломастера обойдутся в $2 \cdot 240 = 480$ рублей. Значит, одна ручка стоит $480 - 440 = 40$ рублей. Тогда 3 ластика, 4 ручки и 6 фломастеров стоят $680 - 4 \cdot 40 = 520$ рублей.

3.2. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 250 рублей. Три ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 690 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластиков, 9 ручек и 8 фломастеров?

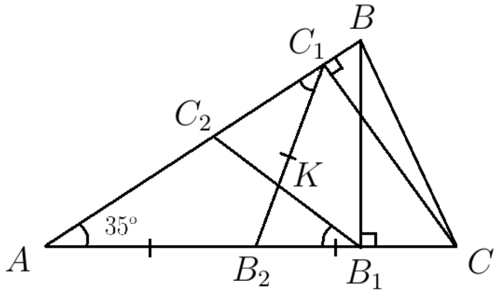
Ответ: 820.

3.3. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей. Два ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 420 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластиков, 4 ручек и 6 фломастеров?

Ответ: 490.

3.4. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей. Три ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 620 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластиков, 9 ручек и 8 фломастеров?

Ответ: 710.



4.1. (12 баллов) В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $35°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2.

Ответ: 75.

Решение. Заметим, что углы B и C треугольника ABC больше, чем $\angle A = 35°$ (в противном случае он был бы тупоугольным), поэтому точка C_1 лежит на стороне AB между точками B и C_2, а точка B_1 лежит на стороне AC между точками C и B_2. Поэтому точка K пересечения прямых B_1C_2 и C_1B_2 лежит внутри треугольника. Поскольку C_1B_2 — медиана прямоугольного треугольника CC_1A, треугольник C_1B_2A равнобедренный. Следовательно, $\angle AB_1C_2 = 35°$. Аналогично получаем $\angle AC_1B_2 = 35°$, откуда $\angle AB_2C_1 = 180° - 2 \cdot 35° = 110°$. Тогда $\angle B_1KB_2 = \angle AB_2K - \angle AB_1K = 110° - 35° = 75°$.

4.2. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $25°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла C_1KC_2.

Ответ: 105.

4.3. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $40°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2.

Ответ: 60.

4.4. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $20°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла C_1KC_2.

Ответ: 120.

5.1. (12 баллов) Уравнение $x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{6}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{6}}{1+x_1}\right)^2.$$

Ответ: 220.

Решение. Так как $x_1^2 = -5x_1 - 1$, то $(1+x_1)^2 = 1 + 2x_1 - 5x_1 - 1 = -3x_1$. Тогда

$$\left(\frac{x_1\sqrt{6}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{6}}{1+x_1}\right)^2 = 6\left(\frac{-5x_1-1}{-3x_2} + \frac{-5x_2-1}{-3x_1}\right) = \frac{10(x_1^2+x_2^2)+2(x_1+x_2)}{x_1x_2} =$$

$$= \frac{10(x_1+x_2)^2 - 20x_1x_2 + 2(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{10 \cdot 25 - 20 - 10}{1} = 220.$$

5.2. Уравнение $x^2 - 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{7}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{7}}{1+x_1}\right)^2.$$

Ответ: 110.

5.3. Уравнение $x^2 + 7x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3\sqrt{3}x_1}{1-x_2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}x_2}{1-x_1}\right)^2.$$

Ответ: 966.

5.4. Уравнение $x^2 - 7x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{5}}{1-x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{5}}{1-x_1}\right)^2.$$

Ответ: 322.

6.1. (12 баллов) Из пункта A в пункт B в 13:00 одновременно выехали автобус и велосипедист. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил велосипедиста в пункте C в 13:10. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал велосипедиста в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{2}{3}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и велосипедиста постоянны.

Ответ: 40.

Решение. Пусть v_1 и v_2 — скорости (в км/ч) велосипедиста и автобуса соответственно. К моменту первой встречи они суммарно проехали $\frac{1}{6}v_1 + \frac{1}{6}v_2 = 8$ км. До момента следующей встречи прошло время, равное $\frac{s_0}{v_1} = \frac{2\cdot\frac{1}{6}v_1 + s_0}{v_2}$ ч, где $s_0 = \frac{1}{3}$ км. Отсюда находим $\frac{1}{4}v_1^2 + v_1 - 24 = 0$, $v_1 = 8$ км/ч (второй корень отрицателен), $v_2 = 40$ км/ч.

6.2. Из пункта A в пункт B в 11:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 11:10. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{1}{3}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

Ответ: 42.

6.3. Из пункта A в пункт B в 10:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 10:15. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{1}{4}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 5 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

Ответ: 36.

6.4. Из пункта A в пункт B в 14:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 14:10. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{2}{15}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

Ответ: 44.

7.1. (12 баллов) Числа a и b таковы, что многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b.

Ответ: $\frac{49}{64} \approx 0{,}77$.

Решение. Многочлен, квадратом которого является данный, есть квадратный трёхчлен с коэффициентом 1 или -1 при x^2. Можно считать, что старший коэффициент равен 1 (в противном случае вынесем -1 за скобку со сменой знаков остальных коэффициентов). Пусть $(x^2 + Ax + B)^2 = x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$. Раскрывая скобки, получаем

$$x^4 + 2Ax^3 + (A^2 + 2B)x^2 + 2ABx + B^2 = x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b,$$

поэтому, приравнивая коэффициенты при степенях, находим $2A = 1$, $A^2 + 2B = 2$, $2AB = a$, $B^2 = b$. Отсюда $A = \frac{1}{2}$, $B = 1 - \frac{A^2}{2} = \frac{7}{8}$, $b = B^2 = \frac{49}{64} \approx 0{,}77$.

7.2. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4 + 3x^3 + x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b.

Ответ: $\frac{25}{64} \approx 0{,}39$.

7.3. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b.

Ответ: $\frac{81}{64} \approx 1{,}27$.

8.1. (12 баллов) В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Найдите площадь треугольника, если известно, что $AL = 2$, $BL = 3\sqrt{10}$ и $CL = 3$.

Ответ: $\frac{15\sqrt{15}}{4} \approx 14{,}52$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $AB : BC = AL : LC = 2 : 3$. Значит, если $AB = 2x$, то $BC = 3x$. Тогда, поскольку $BL^2 = AB \cdot BC - AL \cdot LC$, получаем $90 = 6x^2 - 6$, откуда $x = 4$. Таким образом, треугольник ABC имеет стороны 8, 12 и 5. Отсюда по формуле Герона площадь треугольника ABC равна

$$S = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - BC) \cdot (p - AC)} = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2}} = \frac{15\sqrt{15}}{4} \approx 14{,}52.$$

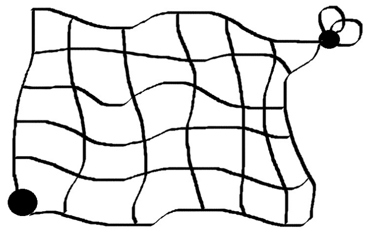
8.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Найдите площадь треугольника, если известно, что $AL = 3$, $BL = 6\sqrt{5}$ и $CL = 4$.

Ответ: $\frac{21\sqrt{55}}{4} \approx 38{,}94$.

8.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Найдите площадь треугольника, если известно, что $AL = 2$, $BL = \sqrt{30}$ и $CL = 5$.

Ответ: $\frac{7\sqrt{39}}{4} \approx 10{,}93$.

9.1. (12 баллов) Целеустремлённый паук хочет доползти до мухи, попавшей в его паутину (см. рисунок). При этом ползти он может только вверх и вправо по нитям паутины. Сколько есть различных способов у паука достигнуть свою цель?

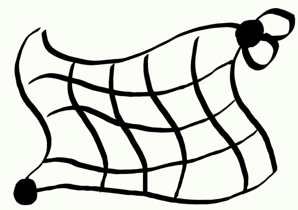


Ответ: 462.

Решение. Для достижения цели пауку нужно сделать 5 шагов вверх и 6 шагов вправо, т. е. в общей сложности 11 шагов. Искомое число способов добраться до мухи равно числу различных способов выбрать 5 шагов вверх из возможных 11, т. е. всего $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5!} = 462$ способа (это число называется числом сочетаний без повторений из 11 элементов по 5 и обозначается C_{11}^5).

Ответ можно получить также, последовательно подписывая возле узлов паутины (начиная с ближайших к пауку), сколькими способами в них можно попасть; получится фрагмент так называемого *треугольника Паскаля*, который образуют числа C_n^k, $k = 0, 1, \ldots, n$.

9.2. Целеустрёмленный паук хочет доползти до мухи, попавшей в его паутину (см. рисунок). При этом ползти он может только вверх и вправо по нитям паутины. Сколько есть различных способов у паука достигнуть свою цель?



Ответ: 126.

10.1. (12 баллов) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 3x + \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} - 1$ на луче $x > 0$.

Ответ: $3 + 6\sqrt{2} \approx 11{,}49$.

Решение. При $x > 0$ имеем $t = x + \frac{2}{x} \geqslant 2\sqrt{2}$ (равенство достигается при $x = \sqrt{2}$), при этом $f(x) = (x+\frac{2}{x})^2 - 3(x+\frac{2}{x}) - 5$. Значит, нужно найти наименьшее значение функции $g(t) = t^2 - 3t - 5$ при $t \geqslant 2\sqrt{2}$. Функция $g(t)$ возрастает при $t \geqslant \frac{3}{2}$, а $2\sqrt{2} \geqslant \frac{3}{2}$, поэтому искомое наименьшее значение равно $g(2\sqrt{2}) = 3 + 6\sqrt{2} \approx 11{,}49$.

10.2. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4x - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2} - 3$ на луче $x < 0$.

Ответ: $3 + 8\sqrt{3} \approx 16{,}86$.

10.3. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4x - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} + 5$ на луче $x < 0$.

Ответ: $9 + 8\sqrt{2} \approx 20{,}31$.

10.4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2x + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + 4$ на луче $x > 0$.

Ответ: $10 + 4\sqrt{3} \approx 16{,}93$.