

**Решения заданий отборочного этапа
Олимпиады «Ломоносов» по инженерным наукам 2019/2020
10-11 классы**

Задача 1 (10 баллов).

Погружной вибрационный электронасос, расположенный у поверхности воды, имеет диаметр выходного патрубка $d = 12$ мм (см. рисунок). К насосу подсоединен горизонтальный шланг длиной $L = 5$ м. Вода из шланга начинает литься через $t = 4$ с после включения насоса. Чему равен КПД насоса, если он потребляет из электросети мощность $P = 100$ Вт? Потерями на вязкое трение при движении воды в шланге пренебречь.



Решение:

Пусть ρ – плотность воды; тогда масса воды, выбрасываемая насосом в единицу времени, есть $\mu = \rho \frac{\pi d^2}{4} v$, где $v = \frac{L}{t}$ – скорость воды на выходе из насоса. Поскольку кинетическая энергия единицы массы воды равна $\frac{v^2}{2}$, полезная мощность, развиваемая насосом, равна $W = \frac{\mu v^2}{2} = \rho \frac{\pi d^2 v^3}{8} = \rho \frac{\pi d^2}{8} \frac{L^3}{t^3}$, а его КПД равен $\frac{W}{P} = \rho \frac{\pi d^2}{8P} \frac{L^3}{t^3} \approx 0,0011$, т.е. 0,11%.

Ответ: 0,11%.

Задача 2 (10 баллов).

Сосуд разделен вертикальными перегородками на три отсека. Одна из перегородок проницаема (какая – неизвестно), остальные две непроницаемы. В отсеки налили растворы гидроксида натрия, масляной кислоты и соляной кислоты (в разные отсеки налили разные растворы) и подождали некоторое время. После этого растворы в отсеках 1 и 2 стали окрашивать лакмусовую бумагу в синий цвет, раствор в отсеке 3 – в красный. Между какими

отсеками расположена проницаемая перегородка? В каком отсеке изначально был раствор соляной кислоты? Ответ обоснуйте. Считайте, что вещества в отсеках, разделенных проницаемой перегородкой, прореагировали полностью.

Решение:

Из условия получаем, что в двух отсеках должна быть щелочная среда, в оставшемся – кислая среда. Запишем уравнения возможных реакций между веществами, находящимися в отсеках, разделенных проницаемой перегородкой.



В третьем отсеке должен быть раствор $\text{C}_3\text{H}_7\text{COOH}$. Таким образом, в двух отсеках – нейтральная среда, в третьем – слабокислая среда. Данное распределение веществ по отсекам не удовлетворяет условию задачи.



В третьем отсеке должен быть раствор NaOH . Таким образом, в двух отсеках – кислая среда, в третьем – щелочная среда. Данное распределение веществ по отсекам не удовлетворяет условию задачи.



В третьем отсеке должен быть раствор HCl . Таким образом, в двух отсеках – слабощелочная среда, в третьем – сильнокислая среда. Данное распределение веществ по отсекам удовлетворяет условию задачи.

Это означает, что перегородка расположена между отсеками 1 и 2, а раствор соляной кислоты был в отсеке 3.

Задача 3 (20 баллов).

У мастера Феофана есть трехкулачковый патрон для дрели, который позволяет зажимать сверла диаметром от 1,5 мм до 13 мм (рисунок 1). Из максимально разведенного положения кулачки патрона за 30 оборотов ключа полностью зажимают сверло диаметром 1,5 мм. Длина рычага ключа $L = 5$ см (рисунок 2). Максимальная сила F , которую мастер Феофан может приложить к ключу, чтобы повернуть его, равна 5 кгс (рисунок 3). С какой силой при этом каждый кулачок патрона давит на сверло? Потерями на трение пренебречь.



Рисунок 1



Рисунок 2



Рисунок 3

Решение:

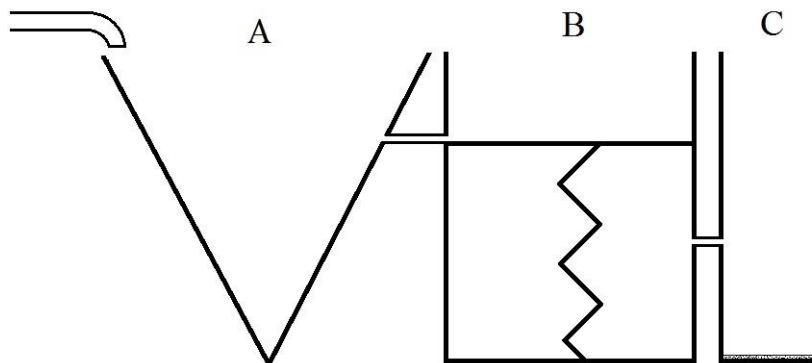
При повороте ключа на небольшой угол $\Delta\alpha$ Феофан совершает работу $FL\Delta\alpha$; при этом каждый из кулачков перемещается к оси на расстояние Δs , пропорциональное $\Delta\alpha$. Поэтому работа, совершаемая всеми тремя кулачками, равна $3F_1\Delta s$, где F_1 – искомая сила, с которой каждый кулачок давит на сверло. Считая, что механизм патрона является идеальным (в задаче сказано, что потерями на трение можно пренебречь), приходим к равенству $FL\Delta\alpha = 3F_1\Delta s$, откуда $F_1 = \frac{FL}{3} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. Но за $n = 30$ оборотов ключа (чему соответствует его поворот на $2\pi n$ радиан) каждый кулачок перемещается в радиальном направлении (к оси патрона) на расстояние $\Delta r = \frac{d_{max}}{2} - \frac{d_{min}}{2} = 5,75$ мм (здесь $d_{max} = 13$ мм и $d_{min} = 1,5$ мм – максимальный и минимальный диаметры зажимаемого патроном сверла). Поэтому $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{2\pi n}{\Delta r}$, так что $F_1 = \frac{FL}{3} \frac{2\pi n}{\Delta r} \approx 2732$ кгс.

Ответ: 2732 кгс.

Задача 4 (20 баллов).

В систему из трех сообщающихся сосудов А, В и С из крана со скоростью $1 \text{ см}^3/\text{с}$ льется теплая дистиллированная вода (см. рисунок). Дно всех трех сосудов находится на одной высоте над землей. Сосуд А имеет форму конуса с углом при вершине, равным 60° . Сосуд В имеет форму цилиндра с площадью основания, равной 80 см^2 . На высоте 10 см от дна сосуда В расположен тонкий легкий поршень, плотно прилегающий к стенкам сосуда В. Центры поршня и дна сосуда В соединены пружиной жесткостью 100 Н/м . Сосуд С имеет форму цилиндра с площадью основания, равной 10 см^2 . На дне сосуда С расположен слой спрессованного порошка карбида бериллия толщиной 4 мм.

Сосуды А и В соединены узкой трубкой на высоте 10 см от дна (выход трубки в сосуд В расположен сразу над поршнем), сосуды В и С соединены узкой трубкой на высоте 5 см от дна. Пропускная способность каждой из трубок не зависит от высоты уровня воды над трубкой и составляет $1 \text{ см}^3/\text{с}$. Известно также, что при наливании воды в сосуд С толщина слоя карбида бериллия уменьшается в среднем на 100 мкм в секунду.



Постройте в одной системе координат графики зависимости уровня воды в сосудах А, В и С от времени. Уровень воды в каждом сосуде отсчитывайте от дна сосуда. Кран перекрывают, как только уровень воды во всех трех сосудах становится одинаковым (ненулевым).

Какие меры предосторожности нужно предпринимать при работе с карбидом бериллия? Ответ поясните.

Решение:

Для начала рассмотрим зависимость уровня воды в сосуде А от времени до того, как вода начинает переливаться в сосуд В. Пусть h_A – уровень воды в сосуде А, $V_0 = 1 \text{ см}^3/\text{с}$ – скорость, с которой льется вода, t – время, прошедшее с момента открытия крана. Так как радиус круга, являющегося поверхностью воды в сосуде А, равен $h_A \cdot \text{tg } 30^\circ = \frac{h_A}{\sqrt{3}}$, по формуле объема конуса объем воды в сосуде А через время t равен $V_0 t = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h_A}{\sqrt{3}}\right)^2 h_A = \frac{\pi h_A^3}{9}$, поэтому $h_A = \sqrt[3]{\frac{9V_0 t}{\pi}}$. Через время $t_A = \frac{\pi h_1^3}{9V_0}$ уровень воды в сосуде А достигнет отметки $h_1 = 10 \text{ см}$, и вода начнет переливаться в сосуд В.

Подставляя значения величин, получаем, что нужно построить график функции

$t = 0,349h^3$ в пределах от $h = 0$ до $h = 10$ (здесь и далее при построении графика уровень воды измеряется в сантиметрах, время – в секундах).

Теперь посмотрим, как будет наливать вода в сосуд В. Пусть $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ – плотность воды, h_B – уровень воды в сосуде В, V_B – объем воды в сосуде В, $S_B = 80 \text{ см}^2$ – площадь основания сосуда В, $k = 100 \text{ Н/м}$ – жесткость пружины, x – сжатие пружины. Длина сжатой пружины равна $h_1 - x$, поэтому высота столба воды над поршнем составляет $h_B - h_1 + x$. Из равенства сил, действующих на поршень со стороны воды и пружины, получаем

$$\rho g(h_B - h_1 + x)S_B = kx. \quad (1)$$

Отсюда $h_B - h_1 + x > x$, так как $\rho g S_B < k$ ($1 \text{ г/см}^3 \cdot 980 \text{ см/с}^2 \cdot 80 \text{ см}^2 = 78,4 \text{ Н/м} < 100 \text{ Н/м}$). Поэтому уровень воды в сосуде В будет выше высоты, на которой расположена соединяющая сосуды А и В трубка, то есть уровень воды в сосуде А будет повышаться.

Пусть уровень воды в сосуде В будет равен h_B через время $t > t_A$. Уровень воды в сосуде А также будет равен h_B . Общий объем воды, поступившей за это время в сосуды, составит $\frac{\pi h_B^3}{9} + (h_B - h_1 + x)S_B = V_0 t$ (2)

Подставляя в (2) полученное из (1) значение $x = \frac{\rho g(h_B - h_1)S_B}{k - \rho g S_B}$, получаем:

$\frac{\pi h_B^3}{9} + \left(h_B - h_1 + \frac{\rho g(h_B - h_1)S_B}{k - \rho g S_B}\right) S_B = V_0 t$, или, представляя это уравнение в виде зависимости t от h_B :

$$t = \frac{\pi}{9V_0} h_B^3 + \frac{kS_B}{V_0(k - \rho g S_B)} h_B - \frac{kS_B h_1}{V_0(k - \rho g S_B)}.$$

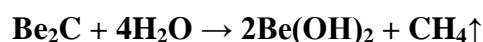
Заметим, что функция $t(h_B)$ монотонно возрастает при $h_B > 0$. Поэтому каждому значению t соответствует единственное значение h_B . Для того, чтобы построить график зависимости h_B от t , достаточно построить в тех же координатах график зависимости t от h_B в пределах от $h_B = h_1$ (что соответствует началу переливания воды из А в В) до

$h_B = h_2 + \frac{k(h_1 - h_2)}{\rho g S_B}$ (получено подстановкой в (1) $x = h_1 - h_2$ и соответствует опусканию поршня до отметки $h_2 = 5$ см, когда вода начинает переливаться в сосуд С).

Подставляя значения величин, получаем, что нужно построить график функции

$$t = 0,349h^3 + \frac{10^4}{27}h - \frac{10^5}{27} \text{ в пределах от } h = 10 \text{ до } h = 11,376.$$

Посмотрим, что будет происходить в сосуде С после времени $t = t_B = 1024$ с, соответствующего началу переливания воды из сосуда В в сосуд С. Известно, что гидролиз карбида бериллия происходит с выделением метана:



По условию в секунду с водой реагирует в среднем $100 \text{ мкм} \cdot 10 \text{ см}^2 = 0,1 \text{ см}^3$ карбида бериллия, или $\frac{0,1 \text{ см}^3 \cdot 2,24 \text{ г/см}^3}{30 \text{ г/моль}} = 0,0075$ моль карбида бериллия. Тогда в секунду с карбидом бериллия реагирует в среднем $0,0075 \cdot 4 = 0,03$ моль воды, или $\frac{0,03 \text{ моль} \cdot 18 \text{ г/моль}}{1 \text{ г/см}^3} = 0,54 \text{ см}^3$ воды. При этом образуется $\frac{0,0075 \text{ моль} \cdot 2 \cdot 43 \text{ г/моль}}{1,92 \text{ г/см}^3} = 0,334 \text{ см}^3$ гидроксида бериллия, не растворимого в воде. Общее увеличение объема в секунду составляет в среднем

$$V_0 - 0,54 \text{ см}^3 / \text{с} - 0,1 \text{ см}^3 / \text{с} + 0,334 \text{ см}^3 / \text{с} = 0,694 \text{ см}^3 / \text{с}.$$

Таким образом, в первые 40 секунд после начала наполнения сосуда С уровень воды будет меняться по закону $h_C = \frac{8 + 0,694(t - t_B)}{10}$ (здесь 8 см^3 – начальный объем карбида бериллия, 10 см^2 – площадь основания сосуда С) и достигнет значения $\frac{8 + 0,694 \cdot 40}{10} = 3,576$ см. После этого уровень воды будет увеличиваться на $1 \text{ см}^3 / 10 \text{ см}^2 = 0,1$ см каждую секунду до достижения уровня $h_2 + \frac{k(h_1 - h_2)}{\rho g S_B} = 11,376$ см, что произойдет в момент времени $t_C = \frac{11,376 - 3,576}{0,1} + 40 + 1024 = 1142$ (с).

Таким образом, график уровня воды в сосуде С будет являться графиком функций

$$h = 0,0694t - 70,2656 \text{ в пределах от } t = 1024 \text{ до } t = 1064 \text{ и}$$

$$h = 0,1t - 102,824 \text{ в пределах от } t = 1064 \text{ до } t = 1142.$$

Учитывая, что в процессе наполнения сосуда С уровень воды в сосудах А и В не менялся, построим все графики в одной системе координат:

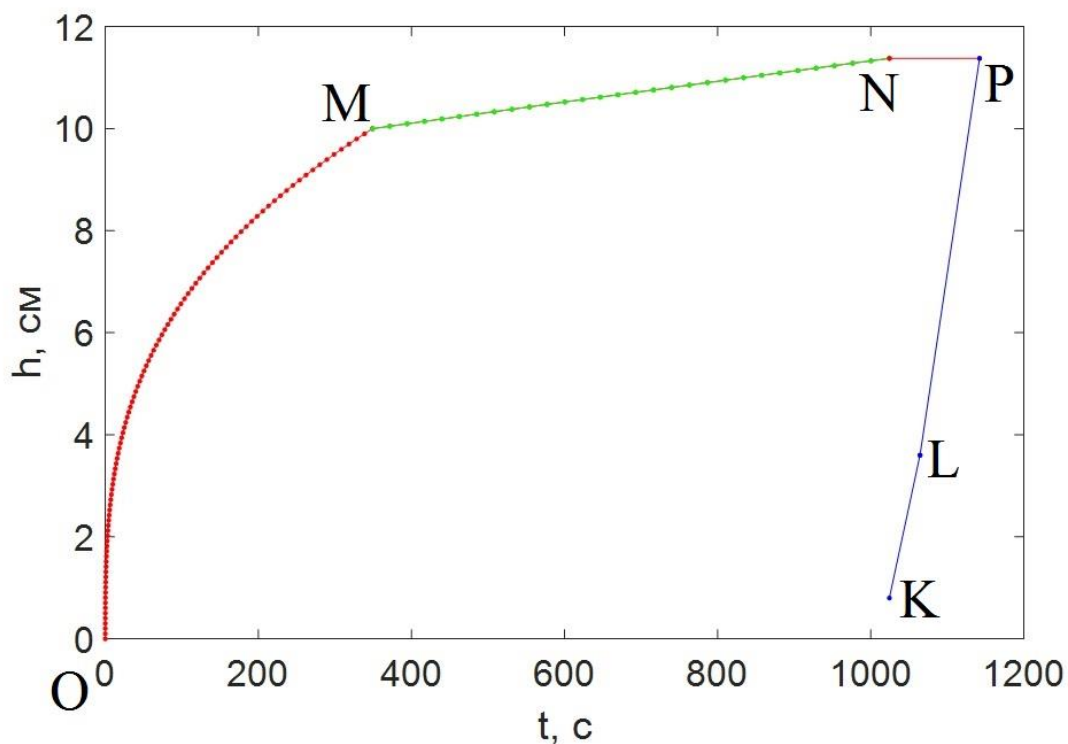


График уровня воды в сосуде А – траектория OMNP.

График уровня воды в сосуде В – траектория MNP.

График уровня воды в сосуде С – траектория KLP.

Карбид бериллия – огнеопасное и крайне токсичное вещество, поэтому работать с ним необходимо в закрытом боксе, используя индивидуальные средства защиты.

Задача 5 (20 баллов).

Солнечная панель – одно из устройств альтернативной энергетики. Основным элементом солнечной панели является ее активный слой. В нем происходит так называемый внутренний фотоэффект, когда при поглощении света в веществе появляются свободные электроны, которые можно использовать для получения электрического тока во внешней цепи, где солнечная панель используется как источник тока. Для простоты будем считать, что попадание каждого десятого фотона достаточной энергии в активный слой приводит к появлению одного электрона во внешней цепи.

Для каждого вещества, в котором наблюдается внутренний фотоэффект, есть характеристика, называемая красной границей внутреннего фотоэффекта. Чем больше длина волны света, тем меньше энергия фотона. Если на активный слой солнечной панели попадает фотон с небольшой энергией, то ее может оказаться недостаточно для порождения свободного электрона. Таким образом, существует максимальная длина волны света (своя

для каждого вещества), при которой всё еще происходит явление внутреннего фотоэффекта. Если длина волны падающего света больше этого значения, то фотоэффект не наблюдается.

Промышленные образцы солнечных панелей помимо активного слоя содержат защитный слой. Он необходим для изоляции активного слоя от внешних воздействий, но при этом должен пропускать солнечный свет. Материалом, который используется в качестве такого слоя, может быть полимер, синтезированный из соответствующего мономера. Производство мономера D осуществляется реакцией между растворами соляной и цианистой кислот с органическим веществом А до получения органического вещества В (1 стадия). Молекула вещества В содержит 56 протонов, причём распределение протонов по всем трем элементам, входящим в состав молекулы, описывается соотношением 3:1:3. Затем В подвергается дегидратации в вещество С (2 стадия), которое вступает в реакцию этерификации с метанолом для получения необходимого мономера D (3 стадия). Последующую реакцию полимеризации проводят при умеренных температурах в присутствии водорастворимых пероксидов с образованием полимера Е.

Определите вещества А, В, С, D, Е. Напишите уравнения вышеописанных химических процессов. Приведите необходимые расчеты.

Найдите, какую массу вещества А необходимо взять для получения покрытия из вещества Е массой 3,2 кг. Практические выходы стадий 1, 2, 3 считать равными соответственно 13,2%, 45,3% и 24,3%. Степень полимеризации равна 10000, выход реакции полимеризации равен 30,2%.

Оцените максимальную силу тока, которую можно получить от солнечной панели с защитным покрытием из вещества Е, если на нее падает свет, спектр которого представлен на рисунке 1. Общее количество фотонов, поступающих на солнечную панель в секунду, равно 0,002 моль. Красную границу внутреннего фотоэффекта для активного слоя такой солнечной панели считайте равной 700 нм.

Рисунки 2-5 показывают выраженную в процентах способность защитного покрытия солнечной панели, изготовленного из того или иного вещества, поглощать свет в зависимости от его длины волны. Например, если какой-либо длине волны соответствует столбик высотой 30%, то это значит, что 30% поступающих фотонов с такой длиной волны поглощаются, а остальные 70% проходят через покрытие и попадают на активный слой солнечной панели, т.е. могут участвовать во внутреннем фотоэффекте.

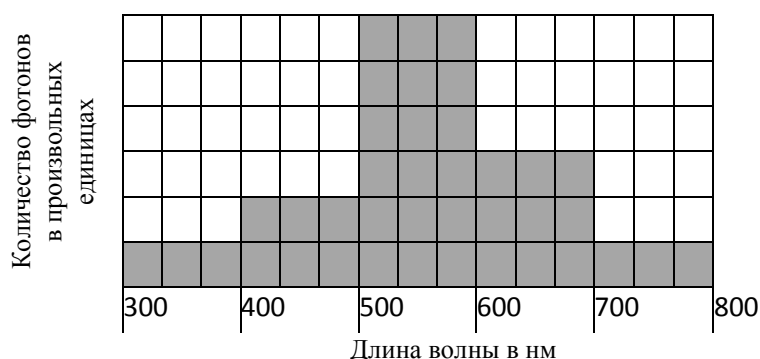


Рисунок 1. Спектр падающего света

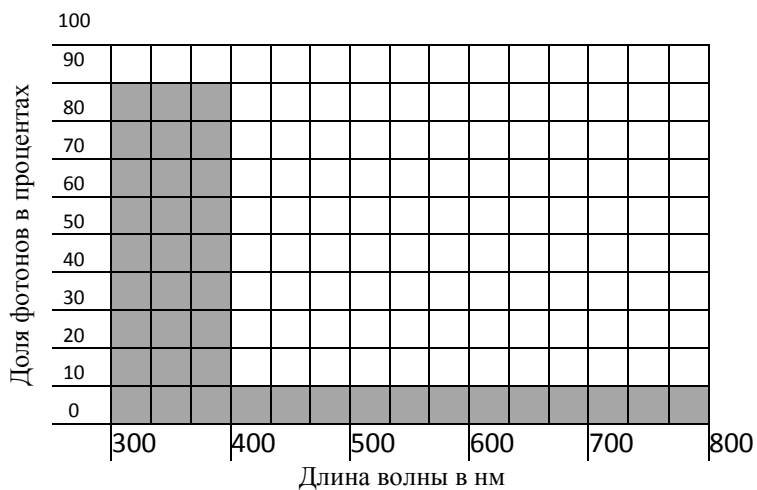


Рисунок 2. Поглощающая способность полиметакрилата

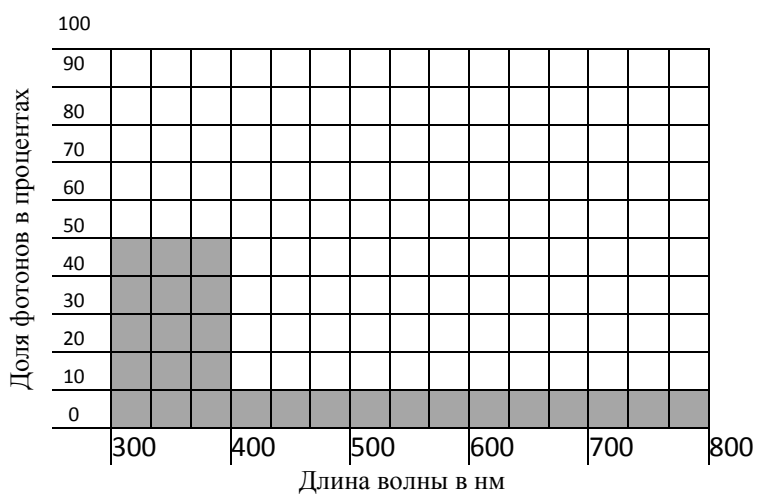


Рисунок 3. Поглощающая способность полистирола

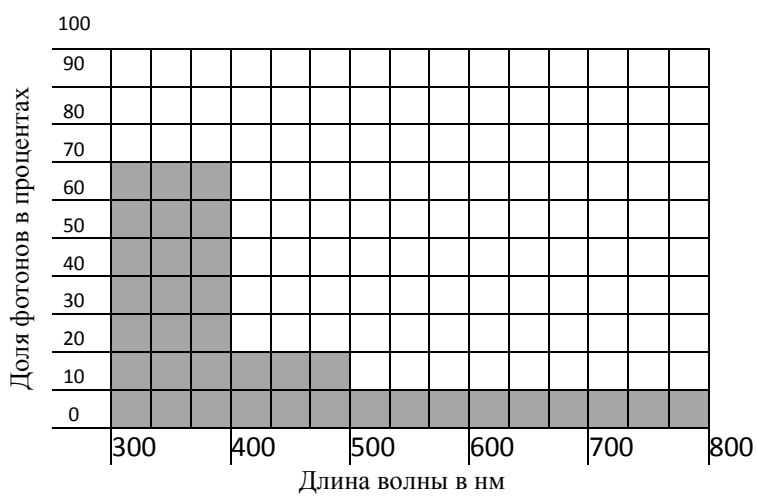


Рисунок 4. Поглощающая способность поливинилхлорида

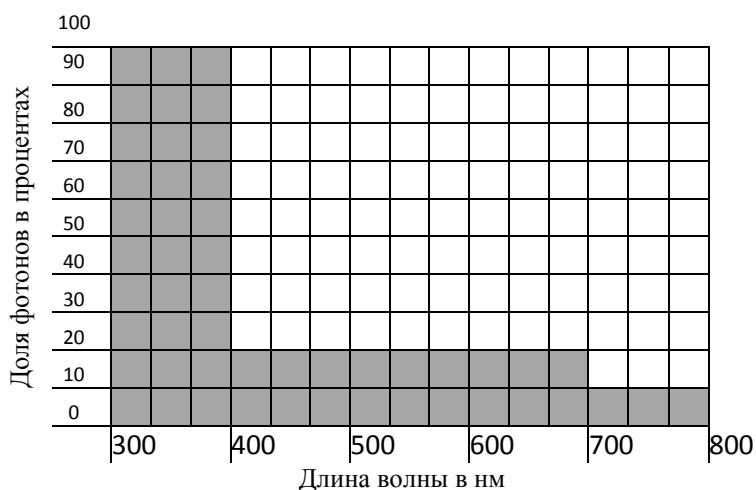


Рисунок 5. Поглощающая способность поликарбоната

Решение:

Молекула вещества В содержит 56 протонов, причем их распределение по всем трем элементам X, Y, Z, входящим в состав молекулы, описывается соотношением 3:1:3, значит:

на X приходится $56:7 \cdot 3 = 24$ протона;

на Y приходится $56:7 \cdot 1 = 8$ протонов;

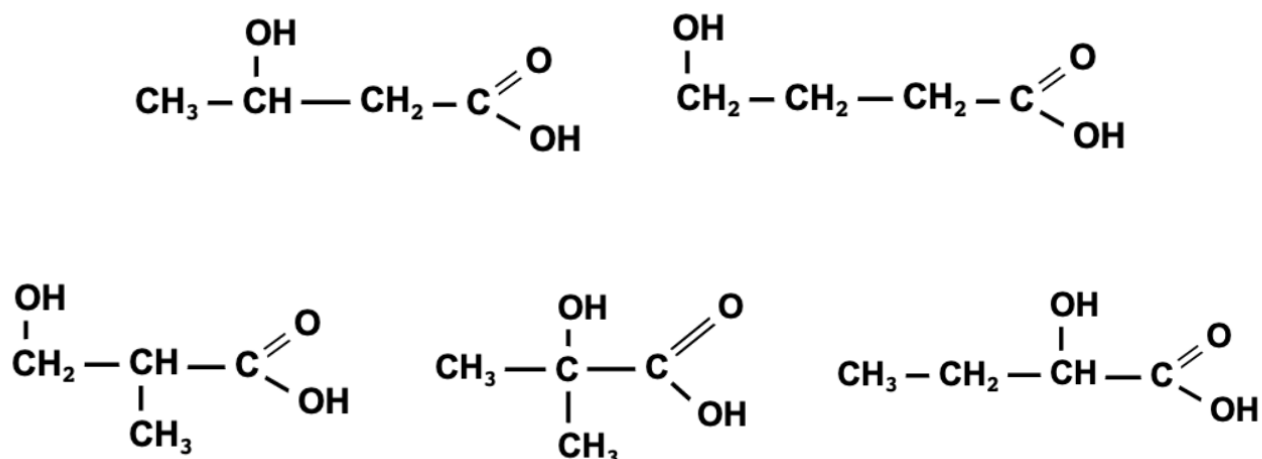
на Z приходится $56:7 \cdot 3 = 24$ протона.

Так как вещество В – органическое, запишем его формулу в виде $X_xY_yZ_z$, где X – углерод, Y – водород. Число протонов в ядре Z должно быть одним из делителей числа 24. Элементы, удовлетворяющие этому условию:

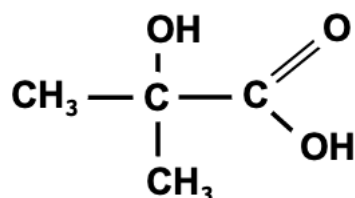
He, Li, Be, O, Mg, Cr. (H и C не подходят, так как уже входят в состав молекулы В)

Так как вещество В на следующей стадии вступает в реакцию дегидратации, то Z – кислород, тогда молекулярная формула вещества В имеет вид $C_4H_8O_3$.

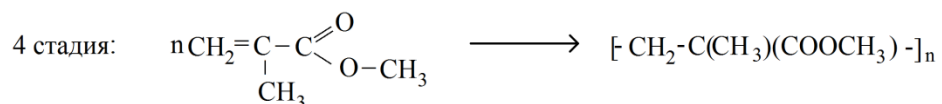
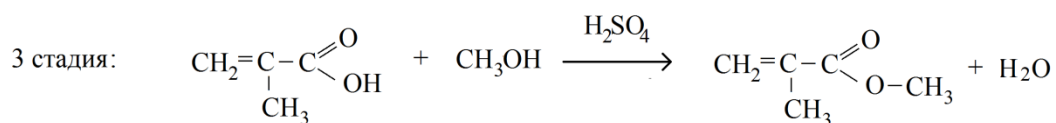
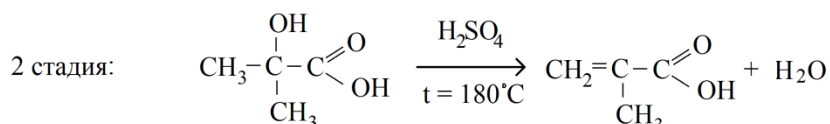
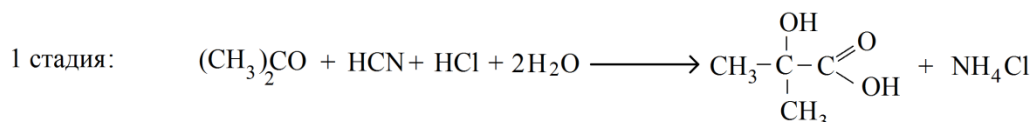
Так как в условии задачи сказано, что вещество С вступает в реакцию этерификации с метанолом, можно предположить, что вещество С – карбоновая кислота, полученная в результате дегидратации вещества В. Возможные структурные формулы вещества В:



С учетом стадии превращения вещества А в вещество В и предложенных структур, формула вещества В имеет вид:



Уравнения описанных в условии задачи химических процессов:



Таким образом, мы нашли, что вещество Е – это полиметилметакрилат.

Выполним расчет необходимой массы вещества А:

$$\mu(\text{полиметилметакрилата}) = \mu(\text{метилметакрилата}) \cdot 10000 = 10^6 \text{ г/моль.}$$

$$v_{\text{прак}}(\text{полиметилметакрилата}) = m(\text{полиметилметакрилата}) / \mu(\text{полиметилметакрилата}) \\ = 3200/10^6 = 32 \cdot 10^{-4} \text{ моль.}$$

$$\eta = \frac{m_{\text{прак}}}{m_{\text{теор}}} \cdot 100\% = \frac{\mu \cdot v_{\text{прак}}}{\mu \cdot v_{\text{теор}}} \cdot 100\% = \frac{v_{\text{прак}}}{v_{\text{теор}}} \cdot 100\%.$$

Для реакции полимеризации (4 стадия):

$$v_{\text{теор}}(\text{полиметилметакрилата}) = \frac{v_{\text{прак}}}{\eta} \cdot 100\% = 105,96 \cdot 10^{-4} \text{ моль.}$$

$$v_{\text{теор}}(\text{метилметакрилата})_{\text{IV}} = v_{\text{теор}}(\text{полиметилметакрилата}) \cdot 10^4 = 105,96 \text{ моль.}$$

Для третьей стадии:

$$v_{\text{прак}}(\text{метилметакрилата})_{\text{III}} = v_{\text{теор}}(\text{метилметакрилата})_{\text{IV}} = 105,96 \text{ моль.}$$

$$v_{\text{теор}}(\text{метилметакрилата})_{\text{III}} = \frac{v_{\text{прак}}}{\eta} \cdot 100\% = 436,05 \text{ моль.}$$

$$v_{\text{теор}}(\text{метакриловой кислоты})_{\text{III}} = 436,05 \text{ моль.}$$

Для второй стадии:

$$v_{\text{прак}}(\text{метакриловой кислоты})_{\text{II}} = v_{\text{теор}}(\text{метакриловой кислоты})_{\text{III}} = 436,05 \text{ моль.}$$

$$v_{\text{теор}}(\text{метакриловой кислоты})_{\text{II}} = \frac{v_{\text{прак}}}{\eta} \cdot 100\% = 962,58 \text{ моль.}$$

$$v_{\text{теор}}(\text{оксиизомасляной кислоты})_{\text{II}} = v_{\text{теор}}(\text{метакриловой кислоты})_{\text{II}} = 962,58 \text{ моль.}$$

Для первой стадии:

$$v_{\text{прак}}(\text{оксиизомасляной кислоты})_{\text{I}} = v_{\text{теор}}(\text{оксиизомасляной кислоты})_{\text{II}} = 962,58 \text{ моль.}$$

$$v_{\text{теор}}(\text{оксиизомасляной кислоты})_{\text{I}} = \frac{v_{\text{прак}}}{\eta} \cdot 100\% = 7292,30 \text{ моль.}$$

$$v_{\text{теор}}(\text{ацетона})_{\text{I}} = v_{\text{теор}}(\text{оксиизомасляной кислоты})_{\text{I}} = 7292,30 \text{ моль.}$$

$$m_{\text{теор}}(\text{ацетона})_{\text{I}} = v_{\text{теор}}(\text{ацетона})_{\text{I}} \cdot \mu(\text{ацетона}) = 423 \text{ кг.}$$

Спектр пропускания полиметилметакрилата, из которого сделан защитный слой солнечной панели, приведен на рисунке 2. Представим данные в виде таблицы.

	300-400 нм	400-500 нм	500-600 нм	600-700 нм	700-800 нм
Доля света, прошедшего через защитный слой	10 %	90 %	90 %	90 %	90 %

По условию задачи всего на солнечную панель каждую секунду поступает 0,002 моль фотонов. Из рисунка 1 можно определить, сколько моль фотонов приходится на каждый выделенный диапазон длин волн. Дополним таблицу этими данными:

	300-400 нм	400-500 нм	500-600 нм	600-700 нм	700-800 нм
Доля света, прошедшего через защитный слой	10 %	90 %	90 %	90 %	90 %
Количество фотонов до попадания на защитный слой, ммоль	0,15	0,31	0,92	0,46	0,15

Теперь мы можем определить количество ммоль фотонов, прошедших защитный слой:

	300-400 нм	400-500 нм	500-600 нм	600-700 нм	700-800 нм
Количество фотонов, прошедших через защитный слой, ммоль	0,015	0,279	0,828	0,414	0,135

Теперь учтем, что красная граница внутреннего фотоэффекта для вещества в активном слое равна 700 нм. Значит, свет с длиной волны больше 700 нм не может участвовать во внутреннем фотоэффекте.

	300-400 нм	400-500 нм	500-600 нм	600-700 нм	700-800 нм
Количество фотонов, которые могут участвовать во внутреннем фотоэффекте, ммоль	0,015	0,279	0,828	0,414	0

Таким образом, общее количество фотонов, которые могут участвовать во внутреннем фотоэффекте, равно 1,536 ммоль. По условию задачи на каждые десять фотонов, попавших в активный слой, происходит образование одного свободного электрона. Таким образом, 1,536 ммоль фотонов в активном слое, обладающих достаточной энергией, образуют 0,1536 ммоль электронов.

Максимальную силу тока можно определить как суммарный заряд всех создаваемых в единицу времени свободных электронов:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{v_{\text{электр.}} \cdot N_A \cdot q_{\text{электр.}}}{t}, \text{ где } N_A - \text{ число Авогадро, а } t - \text{ время, равное 1 секунде.}$$

$$I = \frac{0,1536 \cdot 10^{-3} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1} = 14,7 \text{ А}$$

Ответ: А – ацетон, В – оксиизомаляновая кислота, С – метакриловая кислота, D – метилметакрилат, E – полиметилметакрилат. Необходимая масса ацетона составляет 423 кг. Максимальная сила тока равна 14,7 А.

Задача 6 (20 баллов).

Безответственный водитель Михаил должен перевезти из пункта А в пункт Б на грузовике со стальным кузовом три тяжелых плиты: стальную, железную и чугунную. Все плиты – одинаковые прямоугольные параллелепипеды, у которых высота значительно меньше длины и ширины. Масса каждой плиты равна 1,5 т.

Кузов грузовика закрыт со всех сторон бортами, высота которых в четыре раза больше высоты одной плиты. Верх заднего борта сцеплен с каждым из боковых бортов креплением, выдерживающим нагрузку до 1500 Н (см. рисунок 1). Петли, соединяющие задний борт с дном кузова, выдерживают значительно бóльшую нагрузку.



Рисунок 1

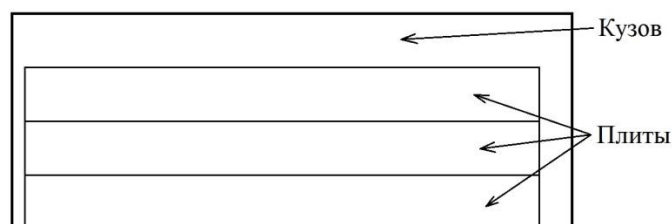


Рисунок 2

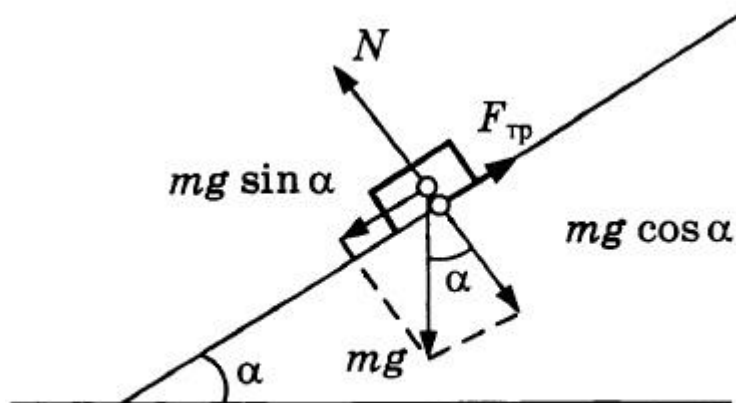
У безответственного Михаила нет никаких креплений для перевозки плит, поэтому он просто кладет плиты в кузов одну на другую (см. рисунок 2), надеясь, что по пути они не выскользнут из кузова, выбив задний борт. В каком порядке Михаил должен уложить плиты, чтобы минимальный угол наклона дороги, при котором из кузова выпадет хотя бы одна плита, был наибольшим? Чему равна величина этого угла? Ответ поясните. Коэффициенты трения скольжения между материалами плит и кузова приведены в таблице:

	Сталь	Железо	Чугун
Сталь	0,18	0,19	0,16
Железо	0,19	0,15	0,18
Чугун	0,16	0,18	0,16

Для простоты считайте, что плиты могут скользить только вдоль боковых бортов кузова машины.

Решение:

Соскальзывать могут начать одна, две или три верхние плиты. Пусть m – суммарная масса соскальзывающих плит, α – угол наклона кузова, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения (см. рисунок).



Сила трения между соскальзывающими плитами и лежащей под ними плитой или дном кузова равна $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Поэтому общая сила, с которой соскальзывающие плиты действуют на задний борт, равна

$$F = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha.$$

Соскальзывающие плиты выбьют задний борт, если момент силы F , приложенной к заднему борту, превзойдет момент силы, необходимый для разрушения обоих креплений, то есть:

$(mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha) \cdot H > 2 \cdot T \cdot 4h$, где h – высота одной плиты, H – высота центра масс соскальзывающих плит над дном кузова, $T = 1500 \text{ Н}$ – максимальная нагрузка, которую выдерживает каждое из креплений между задним и боковым бортами. Таким образом, плиты выбьют задний борт, когда угол наклона кузова α будет являться решением уравнения:

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha = \frac{8Th}{mgH}.$$

Решаем это уравнение методом вспомогательного аргумента с учетом того, что $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$:

$$\sin(\alpha - \arcsin \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}) = \frac{8Th}{mgH\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{8Th}{mgH\sqrt{1+\mu^2}} + \arcsin \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad (1)$$

Пусть μ_1 – коэффициент трения между нижней плитой и дном кузова, μ_2 – коэффициент трения между нижней и средней плитами, μ_3 – коэффициент трения между средней и верхней плитами. Пусть $M = 1500$ кг – масса одной плиты.

$$\text{Если соскальзывают все три плиты, } H = \frac{3h}{2}, m = 3M \text{ и } \sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha = \frac{80}{441}. \quad (2)$$

$$\text{Если соскальзывают две верхние плиты, } H = 2h, m = 2M \text{ и } \sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha = \frac{10}{49}. \quad (3)$$

$$\text{Если соскальзывает одна верхняя плита, } H = \frac{5h}{2}, m = M \text{ и } \sin \alpha - \mu_3 \cos \alpha = \frac{16}{49}. \quad (4)$$

Найдем для каждого расположения плит минимальный угол, при котором выпадет хотя бы одна плита, подставляя в уравнения (2), (3) и (4) соответствующие коэффициенты трения, решая эти уравнения по формуле (1) и определяя минимальное из трех решений.

1) Внизу стальная плита, посередине железная, сверху чугунная: $\mu_1 = 0,18$, $\mu_2 = 0,19$, $\mu_3 = 0,18$.

$$\alpha = \min\{20,5^\circ, 22,3^\circ, 28,9^\circ\} = 20,5^\circ.$$

2) Внизу стальная плита, посередине чугунная, сверху железная: $\mu_1 = 0,18$, $\mu_2 = 0,16$, $\mu_3 = 0,18$.

$$\alpha = \min\{20,5^\circ, 20,7^\circ, 28,9^\circ\} = 20,5^\circ.$$

3) Внизу железная плита, посередине стальная, сверху чугунная: $\mu_1 = 0,19$, $\mu_2 = 0,19$, $\mu_3 = 0,16$.

$$\alpha = \min\{21^\circ, 22,3^\circ, 27,9^\circ\} = 21^\circ.$$

4) Внизу железная плита, посередине чугунная, сверху стальная: $\mu_1 = 0,19$, $\mu_2 = 0,18$, $\mu_3 = 0,16$.

$$\alpha = \min\{21^\circ, 21,8^\circ, 27,9^\circ\} = 21^\circ.$$

5) Внизу чугунная плита, посередине стальная, сверху железная: $\mu_1 = 0,16$, $\mu_2 = 0,16$, $\mu_3 = 0,19$.

$$\alpha = \min\{19,4^\circ, 20,7^\circ, 29,5^\circ\} = 19,4^\circ.$$

6) Внизу чугунная плита, посередине железная, сверху стальная: $\mu_1 = 0,16$, $\mu_2 = 0,18$, $\mu_3 = 0,19$.

$$\alpha = \min\{19,4^\circ, 21,8^\circ, 29,5^\circ\} = 19,4^\circ.$$

Таким образом, минимальный угол, при котором из кузова выпадет хотя бы одна плита, будет наибольшим (и равным 21°), если Михаил положит внизу железную плиту.

Ответ: 21° , если внизу железная плита.