МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

посвящённая 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ

Тезисы докладов

Москва 2019

УДК 512.5, 512.6, 512.7

Тезисы докладов, представленных на международную конференцию, посвящённую 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ.

Организационный комитет:
В. Н. Чубариков — и.о. декана механико-математического факультета МГУ, сопредседатель; В. А. Артамонов — заведующий кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, сопредседатель; Е. И. Бунина, А. Э. Гутерман, М. В. Зайцев, А. А. Михалев, А. А. Клячко, О. В. Куликова, В. Т. Марков, О. В. Маркова, Д. А. Тимашев, И. А. Чубаров, С. А. Гайфуллин, А. Л. Канунников, А. А. Шафаревич.

Программный комитет:
Э. Б. Винберг, В. Н. Латышев, А. В. Михалев, А. Ю. Ольшанский — сопредседатели; Л. А. Бокуть, Н. А. Вавилов, С. В. Востоков, Ю. Л. Ершов, В. Д. Мазуров, Д. О. Орлов, А. Н. Паршин, Б. И. Плоткин, Ю. Г. Прохоров, Ю. П. Размыслов, В. Н. Ремесленников, Л. Н. Шеврин, И. П. Шестаков, А. В. Яковлев, В. И. Янчевский.

Содержание

А. Н. Абызов (Казань), **Д. Т. Тапкин** (Казань)

Кольца, близкие к чистым

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Кольцо называется *чистым*, если каждый его элемент представим в виде суммы обратимого элемента и идемпотента. Изучение чистых колец было инициировано в работе [1]. Кольцо называется *строго чистым*, если каждый его элемент представим в виде суммы коммутирующих обратимого элемента и идемпотента. Понятие строго чистого кольца было введено и изучено в работе [2]. Чистые и строго чистые кольца в последнее десятилетие изучались многими математиками.

Кольцо называется *ниль-чистым,* если каждый его элемент является суммой нильпотентного элемента и идемпотента. Если в кольце каждый элемент представим в виде суммы коммутирующих нильпотентного элемента и идемпотента, то такое кольцо называется *строго ниль-чистыми.* Ниль-чистые и строго ниль-чистые кольца были введены и изучены в работе [3]. Всякое (строго) ниль-чистое кольцо является (строго) чистым.

Пусть $q > 1$ – натуральное число. Кольцо R называется *строго q-ниль-чистым,* если каждый элемент из R представим в виде суммы коммутирующих q-потента и нильпотента [4]. Строго 3-ниль-чистые кольца в последнее время были изучены в работах [5]-[6]. Имеет место следующее описание строго q-ниль-чистых колец.

Теорема 1. Пусть $q > 1$ – натуральное число. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – строго q-ниль-чистое кольцо;
2) $J(R)$ – ниль-идеал и всякое примитивное справа фактор-кольцо кольца R имеет вид $M_n(F)$, где F – конечное поле, и $\mid F \mid^i -1 \mid q-1$ для каждого $1 \leq i \leq n$.

Следствие 2. Пусть $q > 1$ – натуральное число. Тогда следующие условия равносильны для кольца R:

1) $J(R)$ – ниль-идеал и $R/J(R)$ – q-потентное кольцо;
2) R – строго q-ниль-чистое кольцо, которое квазиинвариантно справа;
3) R – 2-первичное и строго q-ниль-чистое кольцо.

Эквивалентность пунктов 1) и 3) следующего утверждения была доказана в работе [7].

Следствие 3. Пусть $q > 1$ – нечетное натуральное число и $q \not\equiv 1(mod 3), q \not\equiv 1(mod 8)$. Тогда следующие условия равносильны для кольца R:

1) $J(R)$ – ниль-идеал и $R/J(R)$ – q-потентное кольцо;
2) R – строго q-ниль-чистое кольцо;
3) для каждого $r \in R$ элемент $r^q - r$ является нильпотентным.

Литература. [1] W. K. Nicholson, Lifting idempotents and exchange rings, Trans. Amer. Math. Soc., 229 (1977), 269-278. [2] W. K. Nicholson, Strongly clean rings and Fitting's lemma, Communications in Algebra, 27:8 (1999), 3583–3592. [3] A. J. Diesl, Nil clean rings, J. Algebra, 383 (2013), 197-211. Chen H., Sheibani M., Strongly 2-nil-clean rings, J. Algebra Appl., 16:9 (2017), 1750178, 12 pp. [4] А.Н. Абызов, Строго q-ниль-чистые кольца, Сиб. матем. журн., 60:2 (2019), 197-200. [5] H. Chen, M.Sheibani, Rings in which elements are sums of tripotents and nilpotents, J. Algebra Appl., 17:3 (2018), 1850042, 11 pp. [6] Y. Zhou, Rings in which elements are sum of nilpotents, idempotents and nilpotents J. Algebra Appl., 217:1 (2018), 1850009, 7 pp. [7] M. T. Kosan, T. Yildirim, Y. Zhou, Rings with $x^n - x$ nilpotent, accepted to Journal of Algebra and Its Applications.

Казанский (Приволжский) федеральный университет

e-mail: aabyzov@kpfu.ru

e-mail: DTTapkin@kpfu.ru

Г. Г. Аракелов (Москва), **А. В. Михалёв** (Москва)

Распределённые вычисления и гомоморфное шифрование

Введение. Гомоморфное шифрование — форма шифрования, позволяющая производить определённые математические действия с зашифрованным текстом и получать зашифрованный результат, который соответствует результату операций, выполняемых с открытым текстом. Например, один человек мог бы сложить два зашифрованных числа, а затем другой человек мог бы расшифровать результат, не используя ни одно из них.

Особый же интерес представляла возможность построения **полностью гомоморфного шифрования**, т.е. шифрования, позволяющего проводить над шифртекстами любые необходимые вычисления. Впервые идея полностью гомоморфного шифрования была предложена в 1978 году изобретателями криптографического алгоритма с открытым ключом RSA Рональдом Ривестом и Ади Шамиром совместно с Майклом Дертузосом. Уже сама криптосистема RSA обеспечивала мультипликативный гомоморфизм, т.е. позволяла выполнять операцию умножения над шифртекстами, и после расшифрования извлекать из полученного шифротекста произведение исходных текстов, т.е. выполнялось следующее:

$$Dec(Enc(m_1) \otimes Enc(m_2)) = m_1 * m_2$$

Однако на начальных этапах попытки создания полностью гомоморфных криптосистемы неудачны. Многие годы было непонятно, возможно ли вообще полностью гомоморфное шифрование, хотя попытки создания такой системы предпринимались неоднократно. Так, например, криптосистема, предложенная в 1982 году Шафи Гольдвассером и Сильвио Микали, имела достаточно высокий уровень криптостойкости, но была лишь частично гомоморфной (гомоморфной только по сложению), и могла зашифровать только один бит. Еще одна аддитивно гомоморфная система шифрования была предложена в 1999 году Паскалем Пэйе. Прорыв в развитии полностью гомоморфного шифрования приходится на 2009 год, когда Крейг Джантри впервые предложил вариант полностью гомоморфной криптосистемы, основанной на криптографии на решетках. С тех пор появилось большое количество работ, в которых предлагается модификация криптосистемы Джантри с целью улучшения ее производительности.

Для того, чтобы криптосхема была полностью гомоморфной достаточно ее гомоморфности одновременно и по операции сложения и по операции умножения,

$$\begin{cases} Dec(Enc(m_1) \otimes Enc(m_2)) = m_1 * m_2 \\ Dec(Enc(m_1) \oplus Enc(m_2)) = m_1 + m_2 \end{cases}$$

где $\otimes$ и $\oplus$ — операции над шифротекстами, соответствующие операциям $*$ и $+$ над открытыми текстами.

Достаточность гомоморфизма по сложению и умножению следует из того, что над битами операции сложения и умножения формируют полный по Тьюрингу базис. Следовательно, если такая криптосистема сможет надежно шифровать два бита, то станет возможным вычислить любую булеву, а следовательно и любую вычислимую функцию.

Таблица 1: Время вычисления значения полиномов при с помощью комбинационной схемы RSA+Пэйе

Значение x	Полином (1)	Полином (2)	Полином (3)
3452	0.92с	1.1 с	0.89с
312	1.12с	1.04 с	0.9с
4124	0.92с	1.1 с	0.83с

Таблица 2: Время вычисления значения полиномов при с помощью Схемы Джантри

Значение x	Полином (1)	Полином (2)	Полином (3)
3452	3.21с	4.07 с	9.3 с
312	5.1с	6.3 с	9.4с
4124	4.2с	5.1 с	9.83с

Распределенные вычисления и гомоморфное шифрование. Распределенные вычисления — современная многогранная область вычислительных наук, бурно развивающаяся и являющаяся наиболее актуальной в ближайшие десятилетия. Актуальность данной области складывается из множества факторов, и в первую очередь, исходя из потребности в больших вычислительных ресурсах для решения прикладных задач. Традиционные последовательные архитектуры вычислителей и схем вычислений находятся в преддверии технологического предела. В то же время технологический прорыв в области создания средств межпроцессорных и межкомпьютерных коммуникаций позволяет реализовать одно из ключевых звеньев параллелизма — эффективное управление в распределении вычислений по различным компонентам интегрированной вычислительной установки. Одной из главных задач в распределенных вычислениях является — обеспечение защиты конфиденциальных данных, которые передаются по распределенной сети. Решить данную задачу можно с методами полностью гомоморфной криптографии, однако основная проблема на сегодняшний день заключается в том, что не существует модели полностью гомоморфной схемы шифрования, которая могла бы быть использована на практике. В докладе рассматривается модель организации распределенных вычислений с гомоморфным шифрование, которое обеспечивается за счет комбинации частично-гомоморфных схем.

Гомоморфное шифрования на базе частично-гомоморфных. Для того, чтобы некоторая схема шифрования была полностью гомоморфной, необходимо и достаточно ее гомоморфности относительно операций сложения и умножения. В настоящее время разработано уже достаточное количество полностью гомоморфных схем шифрования, однако до сих пор не существует схемы, которая была бы практически полезна. Все существующие полностью гомоморфные схемы шифрования в большей мере являются пока лишь теоретическими и их практическое применение пока невозможно. В тоже время, уже довольно давно, существуют эффективные схемы обладающие свойствами частичного гомоморфизма. В докладе представлена идея реализации гомоморфного шифрования за счет использования комбинации частично-гомоморфных схем.

Нами был проведен эксперимент, идея которого заключалась в вычислении значения следующих полиномов:

1. $4x^4 + 765x^3 + 123x^2 + 7896x + 23$
2. $75x^6 + 183x^5 + 796x4 + 123x^3 + 96x2 + 23$
3. $42x^7 + 765x^6 + 183x^5 + 796x4 + 123x^3 + 7896x2 + 23$

над зашифрованными данными. Результаты приведены в таблицах (1) и (2).

Как, видно из данных таблиц, в случае комбинирования схем, время вычисления всех трех полиномов примерно одинаковое. Это связано с тем, что основное время, было затрачено на отправку на клиентскую сторону данных для перевода из схемы RSA в схему Пэйе.
Ключевые слова: Полностью гомоморфное шифрование, частично-гомоморфное шифрование, комбинация схем шифрования, вычислимость функций, распределенные вычисления.

Литература. [1] Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. Санкт-Петербург: Лань. – 2015. [2] Грибов А. В., Золотых П. А., Михалёв А. В. Построение алгебраической криптосистемы над квазигрупповым кольцом // Математические вопросы криптографии. — 2010. — Т. 1, № 4. — С. 23–32. [3] Катышев С.Ю., Марков В.Т., Нечаев А.А. Использование неассоциативных группоидов для реализации процедуры открытого распределения ключей // Дискретная математика — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 45–64. [4] Кузьмин А. С., Марков В. Т., Михалев А. А., Михалев А. В., Нечаев А. А. Криптографические алгоритмы на группах и алгебрах// Дискретная математика — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 45–64. [5] Буртыка Ф. Б. Симметричное полностью гомоморфное шифрование с использованием неприводимых матричных полиномов //Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. стр. 107-122. [6] D. Song, D. Wagner, A. Perrig. Practical Techniques for Searches on Encrypted Data // University of California, Merkeley. Security and Privacy, 2000. [7] R. Curtmola, J. Garay, S. Kamara, and R. Ostrovsky. Searchable Symmetric Encryption: Improved Definitions and Efficient Constructions // Proceedings of the 13th ACM conference on Computer and communication security. 2006. [8] D. Cash, J. Jaeger, St. Jarecki, Ch. Jutla, H. Krawczyk, M-Cat. Rosu, and M. Steiner. Highly-Scalable Searchable Symmetric Encryption with Support for Moolean Queries // Advances in Cryptology - CRYPTO 2013. [9] D. Moneh, C. Gentry, S. Halevi, F. Wang, D. J wu. Private database queries using somewhat homomorphic encryption // Applied cryptography and network security Springer, 2013, p.102-118. [10] D. Cash, J. Jaeger, St. Jarecki, Ch. Jutla, H. Krawczyk, M-Cat. Rosu, and M. Steiner. Dynamic Searchable Encryption in Very-Large Databases: Data Structures and Implementation // IACR Cryptology Fuzzy identity-based encryption //Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2005. ePrint 2014. [11] D. Moneh, A. Sahai, M. Waters. Functional encryption: Definitions and challenges //Theory od Cryptography.2011. pp. 253-273. [12] Gentry C. A fully homomorphic encryption scheme: Ph.D. thesis. – Stanford University. –2009. [13] Stehle D., Steinfeld R. Faster fully homomorphic encryption //Advances in Cryptology-ASIACRYPT 2010. Springer Merlin Heidelberg.2010.pp. 377-394.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет

И. Н. Балаба (Тула), **А. В. Михалёв** (Москва)

Градуированная проективная алгебра

В монографии „Линейная алгебра и проективная геометрия“ Р. Бэр [1] систематически изложил раздел алгебры, заминающийся изучением трех тесно связанных между собой объектов, ассоциированных с векторными пространствами над телами: решетки подпространств, кольца эндоморфизмов и группы автоморфизмов. В предисловии к ее русскому изданию А. Г. Курош эту ветвь алгебры, поглотившую все основное содержание проективной геометрии и связавшую проективную геометрию с теорией структур и тел, с общей теорией ассоциативных колец и модулей и с теорией классических групп, предложил называть *проективной алгеброй.*

В докладе будут представлены результаты, касающиеся градуированной проективной алгебры, связанные с градуированными линейными пространствами над градуированными телами.

Градуированные тела, то есть градуированные кольца, каждый ненулевой однородный элемент которых является обратимым, играют значительную роль в структурной теории градуированных колец. Несмотря на то, что градуированные тела не являются телами в обычном смысле, они сами и градуированные модули над ними обладают свойствами, аналогичными свойствам тел и линейных пространств над телами.

Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными с единицей, градуированные мультипликативной группой G с единицей e.

Легко проверить, что если $D = \bigoplus_{g \in G} D_g$ является G-градуированным телом, то D_e является телом, его носитель $G' = \mathrm{Supp}D = \{g \in G \mid D_g \neq 0\}$ – подгруппа группы G и D – сильно G'-градуированное кольцо.

Градуированный модуль V над градуированным телом D являются *gr-свободным*, то есть обладает базисом, состоящим из однородных элементов, причем все однородные базисы V имеют одинаковую мощность. Градуированные модули над градуированными телами будем называть *градуированными линейными пространствами*

В [2] были рассмотрены свойства градуированных линейных пространств и доказан градуированный аналог треугольной теории Галуа, которая состоит в построении изоморфизма между решеткой градуированных подпространств пространства V и решеткой правых градуированных аннуляторных идеалов градуированного кольца эндоморфизмов $A = \mathrm{END}_D(V)$, антиизоморфизма между решеткой градуированных подпространств пространства V и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов кольца A и антиизоморфизма между решеткой правых и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов кольца A.

Множество однородных обратимых элементов градуированного кольца линейных преобразований $\mathrm{END}_D(V)$ образуют группу $GL^{gr}(V)$, являющуюся аналогом полной линейной группы.

Теорема 1. Если размерность градуированного линейного пространства V над градуированным телом D больше 1, то следующие свойства линейного преобразования $\sigma \in GL^{gr}(V)$ эквивалентны:

1. σ принадлежит центру группы $GL^{gr}(V)$;
2. σ оставляет инвариантным каждое градуированное подпространство пространства V;
3. существует ненулевой однородный элемент $f \in D$ такой, что $\sigma(v) = vf$ для всех $v \in V$.

Следствие. Центр группы $GL^{gr}(V)$ изоморфен мультипликативной группе однородных элементов центра тела D.

Под *изоморфизмом* градуированных колец будем понимать сохраняющий градуировку изоморфизм колец.

Теорема 2. Пусть $A = \mathrm{END}_D(V)$ и $B = \mathrm{END}_E(W)$ – градуированные кольца эндоморфизмов градуированных линейных пространств V_D и W_E над градуированными телами D и E соответственно. Тогда любой изоморфизм $\phi : A \to B$ градуированных колец индуцирует изоморфизм решетки градуированных подпространств пространства V на решетку градуированных подпространств пространства W.

В [2, теорема 3.1] было установлено, что изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных линейных пространств индуцируются специального вида полулинейными преобразованиями линейных пространств.

Отметим, что авторами была рассмотрена и более общая ситуация. Получены критерии, решающие вопрос о том, когда изоморфизм градуированных колец изоморфизмов строгих gr-образующих, индуцируется gr-образующим, градуированной эквивалентностью Мориты или полулинейным преобразованием [3].

Наряду с описанием изоморфизмов колец эндоморфизмов модулей значительный интерес представляет описание их антиизоморфизмов. Из более общих результатов авторов, описывающих критерии индуцируемости градуированных колец эндоморфизмов строгих gr-образующих градуированной антиэквивалентностью Мориты или градуированным антиполулинейным преобразованием [4], установлено, что каждый антиизоморфизм градуированных колец эндоморфизмов градуированных линейных пространств индуцируется специального вида антиполулинейным преобразованием линейных пространств.

Работа поддержана РФФИ (проект № 19-41-710004 р-а).

Литература. [1] Р Бэр. Линейная алгебра и проективная геометрия. Москва: Изд-во Иностранной литературы, 1953. [2] И. Н. Балаба, Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств. Чебышевский сб., 6:4 (2005), 6–23. [3] И. Н. Балаба, А. В. Михалёв, Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным,Фундамент. и прикл. матем, 13:5 (2007), 3–18.

[4] И. Н. Балаба, А. В. Михалёв, Антиизоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным, Фундамент. и прикл. матем, 14:7 (2008), 23–36.

Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н.Толстого
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
e-mail: ibalaba@mail.ru

В. Н. Безверхний (Москва)

О проблеме равенства слов в группах Артина[1]

Группа Артина задается конечной системой образующих: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и системой определяющих соотношений $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}$, где $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i\ldots$ слово из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_{ij}, где m_{ij} — элемент симметрической матрицы Кокстера $M = \left\{m_{ij}|i,j \in \overline{1,n}\right\}, m_{ij} \in \{2,3,4,\ldots,\infty\}, m_{ij} = 1$ для любого $i = \overline{1,n}, M_{ij} = \infty$ означает, что соотношение с образующими σ_i, σ_j отсутствует.

Группа Артина имеет копредставление:

$$G = \left\langle\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots .\sigma_n; \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}, \sigma_i^2 = 1, i, j \in \overline{1,n}\right\rangle (1)$$

Поставим в соответствие группе G конечный граф Γ каждой вершине v_i которого ставится в соответствие образующий v_i, а ребру, соединяющему вершины v_i, v_j — элемент $m_{ij} \in M$, причем, если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то паре $\sigma_i\sigma j$ соответствует $m_{ij} = \infty$. Такой граф называется графом Коксетера, а соответствующая ему группа Артина имеет копредставление (1) и обозначается G_Γ. С каждой группой Артина G_Γ связана группа Коксетера $\overline{G_\Gamma}$, имеющая копредставление:

$$\overline{G_\Gamma} = \left\langle\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots .\sigma_n; \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}, \sigma_i^2 = 1, i, j \in \overline{1,n}\right\rangle (2)$$

Если группа $\overline{G_\Gamma}$ конечна, то группа G_Γ называется группой Артина конечного типа. Данному классу групп принадлежат группы кос B_{n+1}, для которых в 1969 г. Ф. А. Гарсайдом была решена проблема сопряженности слов [1]. Э. Бриксоном и К. Сайто была доказана разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [2]. П. Шупп и К. Аппель опередила широкие классы групп Артина большого ($m_{ij} \geq 3$) и экстра большого типа ($m_{ij} > 3$).

Для групп Артина экстра большого типа, используя диаграммный метод, ими же была решена проблема равенства и сопряженности слов [5]. В работах [6,7] независимо были решены проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина большого типа. В [4] введено понятие группы Артина с древесной структурой.

Группа Артина называется группой с древесной структурой, если граф Коксетера Γ, соответствующий данной группе, является дерево-графом. Элементы матрицы Коксетера — $M = \left\{m_{ij}|i,j \in \overline{1,n}\right\}, m_{ij} \in \{2,3,4,\ldots,\infty\}$.

Теорема 1 [8]. В группах Артина с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

Группа Артина называется группой Артина с m-угольной структурой, если ее граф Γ состоит из m-угольников с элементами матрицы Коксетера m_{ij}, принадлежащим множеству $\{2,3,4,\ldots,\infty\}$.

Теорема 2 Пусть G_Γ - группа Артина с m-угольной структурой, $m > 3$, тогда в группе G_Γ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

Пусть G_Γ - группа Артина, заданная копредставлением (1), Γ - граф Коксетера, соответствующий группе G_Γ, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ - образующие группы G_Γ.

Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma$ - максимальный дерево граф, $\delta\Gamma_0$ - дополнение Γ_0 в Γ, $\delta\Gamma_0$ - замкнутое множество, через X_0 обозначим множество образующих группы G_Γ: $X_0 = \{\sigma_{01}, \sigma_{02}, \ldots, \sigma_{0n}\}$,

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ 19-41-710002 р_а

где $\sigma_{0i} = \sigma_i, i \in \overline{1,n}$ и где $relG_{\Gamma_0}$ - система определяющих соотношений группы G_{Γ_0} , тогда $G_{\Gamma_0} = \langle X_0; relG_{\Gamma_0}\rangle$ копредставление группы G_{Γ_0}. Обозначим $\overline{X_0} = \{\overline{\sigma_{0i}}, 1 \le k_0 \le i \le n_0 \le n\}$ - множество образующих групп $G_{\delta\Gamma_0}$,

$$\overline{\overline{X}} = \{\sigma_{0i}, 1 \le k_0 \le i \le n_0 \le n\}, \overline{\overline{X}} \subset X_0, relG_{\delta\Gamma_0} = G_\Gamma \backslash G_{\Gamma_0}$$

тогда копредставление группы будет иметь вид:

$$G_{\delta\Gamma_0 = \langle \overline{X}; relG_{\delta\Gamma_0}\rangle}$$

Используя преобразования Тице можно преобразовать копредставление группы G_Γ к следующему виду:

$$G_\Gamma = \langle \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}, \ldots, \sigma_{0n}, \overline{\sigma_{0,k_0}}, \ldots, \overline{\sigma_{0,n_0}}; relG_{\Gamma_0}, relG_{\delta\Gamma_0}, \sigma_{0i} = \overline{\sigma_{0i}}, 1 \le k_0 \le i \le n_0 \le n\rangle \quad (5)$$

В дальнейшем будем использовать следующее копредставление группы

$$G_\Gamma = \langle G_{\Gamma_0} * G_{\delta\Gamma_0}; relG_{\Gamma_0}, relG_{\delta\Gamma_0}, \sigma_{0k_0} = \overline{\sigma_{0k_0}}, \ldots, \sigma_{0n_0} = \overline{\sigma_{0n_0}}\rangle$$

Теорема 3. В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

Теорема 4 (основная). Если в группе $G_{\delta\Gamma_0}$ разрешима проблема равенства слов и существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in G_{\delta\Gamma_0}$ и любого образующего $\overline{\sigma_{0i}}$, $1 \le k_0 \le i \le n_0 \le n$ группы $G_{\delta\Gamma_0}$ установить принадлежит ли w циклической подгруппе $\langle\overline{\sigma_{0i}}\rangle$, то в группе G_Γ разрешима проблема равенства слов.

Доказательство теоремы непосредственно использует строение односвязной диаграммы M над группой Артина с древесной структурой. Как следует из [?], диаграмма M является однослойной, то есть любая область $D \subset M$, где $\delta M = \gamma\delta^{-1}$ - граничный цикл диаграммы M имеет не пустое пересечение как с γ так как и с δ^{-1}, $\delta D \cap \gamma \ne \varnothing, \delta D \cap \delta^{-1} \ne \varnothing$ и M не содержит внутренних вершин, а также используется копредставление (5) группы G_Γ.

Теорема 5. В группе $G_{\delta\Gamma_0}$ разрешима проблема равенства слов, и для любого $w \in G_{\delta\Gamma_0}$ можно эффективно установить, принадлежит ли w циклической подгруппе, порожденной образующим $\overline{\sigma_{0j}} \in \overline{X_0}, k_0 \le j \le n_0$.

При доказательстве используется теорема 4 и разложение группы $G_{\delta\Gamma_0}$ в конечную последовательность групп Артина с древесной структурой.

Теорема 6. В конечнопорожденной группе Артина разрешима проблема равенства слов.

Литература. [1] F. A. Garsid, The braid group and other groups. Quart. Math, Oxford ser(2), 20, (1969), 235–254. [2] Э. Брискорн, К. Сайто, Группы Артина и группы Кокстера. Математика, 18, (1974), No 6, 56–79. [3] В. Н. Безверхний, Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа. Сиб. Мат. жур. TXXVI, 5, (1985), 27–42. [4] В. Н. Безверхний, О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения. Тезисы докладов V Международной конференции, Тула, 2003, 33–34. [5] K. Appel, P. Schupp, Artin groups and infinite Coxeter groups. Invent. Math. 72, (1984), 210–220. [6] K. Appel. On Artin groups and Coxeter groups of large type. Contempor. Math. 33, (1984), 50–78. [7] В. Н. Безверхний, Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп, 1986, Мезвуз. сборник науч. тр. Тула 1986, 26–61. [8] В. Н. Безверхний, О. Ю. Карпова, Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. Известия. ТулГУ. Математика. Механика. Информатика. 12, (2006), No 1, 67–82.

Академия гражданской защиты МЧС России.

e-mail: vnbezv@rambler.ru

В. Н. Безверхний, **Н. Б. Безверхняя** (Москва)

О проблеме вхождение в группах Артина конечного типа[1]

Дадим определение конечнопорожденной группы Артина.

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ - конечное множество слов, и $M = (m_{st}), s, t \in S$ - симметрическая матрица Коксетера с индексами из множества S такая, что $m_{st} = m_{ts}$ для всех $s, t \in S$, $s \neq t, m_{ss} = 1, m_{st} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$.

Копредставление группы Артина G будет иметь вид:

$$G = \langle s_1, \ldots, s_n; \langle st\rangle^{m_{st}} = \langle ts\rangle^{m_{ts}}, s, t \in S, s \neq t, m_{st} \neq \infty\rangle$$

Каждой группе Артина соответствует группа Коксетера с копредставление:

$$\overline{G} = \left\langle s_1, s_2, \ldots, s_n; s_i^2 = 1, i = \overline{1, n}, \langle st\rangle^{m_{st}} = \langle ts\rangle^{m_{ts}}, s, t \in S\right\rangle$$

Если группа $\overline{G}$ — конечна, то соответствующая ей группа G называется группой Артина конечного типа. Данный класс содержит группы кос B_{n+1}.

Определение 1. Неприводимыми группами Артина конечного типа называются группы, множество образующих которых X нельзя разделить на два множества X_1, X_2 таких, что $X_1 \cap X_2 = \varnothing, X_1 \cup X_2 = X$, где образующие из одного множества коммутируют с образующими другого.

Известно, что это будут группы:

$$B_{n+1} \equiv A_n, n \geq 1; B_n, n \geq 2; D_n, n \geq 4; E_6; E_7; E_8; F_4; H_3; H_4; G_2; I_2(p),$$

где $p = 5$, или $p \geq 7$.

Всякая группа Артина конечного типа является прямым произведением конечного числа неприводимых групп Артина.

Т. А. Маканиной было доказано, что в группах $B_{n+1}(A_n)$ при $n > 3$ проблема вхождения неразрешима [1]. Г. С. Маканиным в «Коуровской тетради» была поставлена проблема «выяснить, разрешима ли проблема вхождения в группах B_{n+1}» [2].

Для неприводимых групп Артина конечного типа:

$$B_n, n \geq 4; D_n, n \geq 4; E_6; E_7; E_8; F_4; H_4$$

было доказано, что проблема вхождения в них неразрешима [3].

Рассмотрим проблему вхождения в группах B_4, B_3, H_3.

$$B_4 = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \langle\sigma_1\sigma_2\rangle^3 = \langle\sigma_2\sigma_1\rangle^3, \langle\sigma_2\sigma_3\rangle^3 = \langle\sigma_3\sigma_2\rangle^3, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \right\rangle$$

$$H_3 = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \langle\sigma_1\sigma_2\rangle^3 = \langle\sigma_2\sigma_1\rangle^3, \langle\sigma_2\sigma_3\rangle^5 = \langle\sigma_3\sigma_2\rangle^5, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \right\rangle$$

$$B_3 = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \langle\sigma_1\sigma_2\rangle^3 = \langle\sigma_2\sigma_1\rangle^3, \langle\sigma_2\sigma_3\rangle^4 = \langle\sigma_3\sigma_2\rangle^4, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \right\rangle$$

Определение 2. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ и любой конечно порожденной группы $H \prec G$ установить, принадлежит ли w подгруппе H.

Определение 3. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух подгрупп H_1, H_2 из G выписать образующие их пересечения.

Определение 4. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения смежных классов двух конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ 19-41-710002 р_а

любых двух подгрупп H_1, H_2 из G и для любого элемента $w \in G$ установить, пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.

Основным понятием, используемым при исследовании проблемы вхождения в группах B_4, B_3, H_3 является понятие специального множества слов в свободном произведении групп с объединением и в HNN-расширениях групп [4,5].

Теорема 5. В группах Артина с двумя образующими

$$G_{ab} = \langle a, b, t; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ab \rangle^{m_{ba}} \rangle$$

1) разрешима проблема вхождения;

2) разрешима проблема песечения конечнопорожденных подгрупп;

3) разрешима проблема пересечения смежных классов в конечнопорожденных подгруппах.

Для доказательства разрешимости проблемы вхождения в группах B_4 и H_3 рассмотрим группы

$$G^*_{33} = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_3}; \langle \sigma_1\sigma_2 \rangle^3 = \langle \sigma_2\sigma_1 \rangle^3, \langle \sigma_2\sigma_3 \rangle^3 = \langle \sigma_3\sigma_2 \rangle^3, \overline{\sigma_1\sigma_3} = \overline{\sigma_3\sigma_1}, \sigma_1 = \overline{\sigma_1}, t^{-1}\overline{\sigma_3}t = \sigma_3 \right\rangle$$

$$G^*_{35} = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_3}; \langle \sigma_1\sigma_2 \rangle^3 = \langle \sigma_2\sigma_1 \rangle^3, \langle \sigma_2\sigma_3 \rangle^5 = \langle \sigma_3\sigma_2 \rangle^5, \overline{\sigma_1\sigma_3} = \overline{\sigma_3\sigma_1}, \sigma_1 = \overline{\sigma_1}, t^{-1}\overline{\sigma_3}t = \sigma_3 \right\rangle$$

Можно доказать, что в группах G^*_{33} и G^*_{35} разрешима проблема вхождения.

Теорема 6. В группу G^*_{33} изоморфно вложима группа

$$B_4 = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \langle \sigma_1\sigma_2 \rangle^3 = \langle \sigma_2\sigma_1 \rangle^3, \langle \sigma_2\sigma_3 \rangle^3 = \langle \sigma_3\sigma_2 \rangle^3, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \right\rangle$$

Теорема 7. В группу G^*_{35} изоморфно вложима группа

$$H_3 = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \langle \sigma_1\sigma_2 \rangle^3 = \langle \sigma_2\sigma_1 \rangle^3, \langle \sigma_2\sigma_3 \rangle^5 = \langle \sigma_3\sigma_2 \rangle^5, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \right\rangle$$

Следствие 1. В группах B_4 и H_3 разрешима проблема вхождения.

Рассмотрим группу

$$G^*_{34} = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_3}; \langle \sigma_1\sigma_2 \rangle^3 = \langle \sigma_2\sigma_1 \rangle^3, \langle \sigma_2\sigma_3 \rangle^4 = \langle \sigma_3\sigma_2 \rangle^4, \overline{\sigma_1\sigma_3} = \overline{\sigma_3\sigma_1}, \sigma_1 = \overline{\sigma_1}, t^{-1}\overline{\sigma_3}t = \sigma_3 \right\rangle$$

Теорема 8. В группе G^*_{34} разрешима проблема вхождения.

Теорема 9. Группа

$$B_3 = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \langle \sigma_1\sigma_2 \rangle^3 = \langle \sigma_2\sigma_1 \rangle^3, \langle \sigma_2\sigma_3 \rangle^4 = \langle \sigma_3\sigma_2 \rangle^4, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \right\rangle$$

изоморфно вложима в группу G^*_{34}.

Следствие 2. В группе B_3 разрешима проблема вхождения.

Из теорем 6-9 вытекает разрешимость проблемы вхождения в группах B_4, B_3, H_3.

Таким образом, нами полностью решен вопрос о разрешимости проблемы вхождения в неприводимых группах Артина конечного типа.

Литература. [1] Т. А. Маканина, Проблема вхождения для групп кос $B_(n+1)$ при $n \geq 5$. Математические заметки, 29, (1981), No 1, 31–33. [2] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 13-е изд. Новосибирск 1995 г. [3] В. Н. Безверхний, Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа. Сиб. Мат. жур. TXXVI, 5, (1985), 27–42. [4] В. Н. Безверхний, Решение проблемы вхождения для одного класса групп. Вопросы теории групп и полугрупп. Тула. Тульский Государственный Педагогический институт. 1972, 3–86.

[5] В. Н. Безверхний, Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1981, 20–62.

Академия гражданской защиты МЧС России.

e-mail: vnbezv@rambler.ru

В. В. Беняш-Кривец, **Я. А. Жуковец** (Минск)

Об альтернативе Титса в обобщенных тетраэдральных группах типа $(2, n, 2, 2, 2, 2)$

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Э. Б. Винберг [1] ввел в рассмотрение обобщенные тетраэдральные группы, имеющие копредставление вида

$$\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3 \mid {x_1}^{k_1} = {x_2}^{k_2} = {x_3}^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ — циклически редуцированное слово в свободном произведении $\langle x_i \mid {x_i}^{k_i} = 1\rangle * \langle x_j \mid {x_j}^{k_j} = 1\rangle$, которое не является собственной степенью. Существует гипотеза [2], что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени в работах [2-6] эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп, кроме групп следующего вида:

$$\left\langle x_1, x_2, x_3 \mid {x_1}^{k_1} = {x_2}^{k_2} = {x_3}^{k_3} == R_{12}(x_1, x_2)^2 = \left({x_1}^{\alpha}{x_3}^{\beta}\right)^2 = \left({x_2}^{\gamma}{x_3}^{\delta}\right)^2 = 1 \right\rangle,$$

где $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$. Отметим также, что в [4] гипотеза Розенбергера доказана в следующих случаях: 1) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} < \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < \frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < \frac{1}{2}$, за исключением случая $k_3 = 2$ и $(k_1, k_2) = (3, 8)$, $(3, 10)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 6)$. В данной работе мы рассмотрим группы с копредставлением

$$\Gamma = \left\langle a, b, c \mid a^2 = b^n = c^2 = R(a, b)^2 = (b^{\alpha}c)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle, \tag{1}$$

где $R(a, b) = ab^{u_1}ab^{u_2}\dots ab^{u_s}$, $1 \leq u_i < n$. Справедлива

Теорема 1. Пусть Γ — обобщенная тетраэдральная группа с копредставлением (1) и пусть s — четно. Тогда если $n \neq 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$, то для Γ справедлива альтернатива Титса.

Литература. [1] Э. Б. Винберг. Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями. Матем. сб. 188:9 (1997), С. 3–12. [2] B. Fine, G. Rosenberger. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker, 1999. [3] J. Howie, N. Kopteva. The Tits alternative for generalized tetrahedron groups. J. Group Theory. 9 (2006), 173–189. [4] B. Fine, A. Hulpke, V. groSSe Rebel, G. Rosenberger. The Tits alternative for spherical generalized tetrahedron groups. Algebra Colloquium. 15:4 (2008), 541–554. [5] V. groSSe Rebel, M. Hahn, G. Rosenberger. The Tits alternative for Tsaranov's generalized tetrahedron groups. Groups-Complexity-Cryptology. 1:2 (2009), 207–216. [6] B. Fine, A. Hulpke, V. groSSe Rebel, G. Rosenberger, S. Schauerte. The Tits alternative for short generalized tetrahedron groups. Scientia. Series A: Mathematical Sciences. 21 (2011), 1–15.

Белорусский государственный университет

Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка

e-mail: benyash@tut.by, y.zhukovets@gmail.com

Екатерина Благовещенская (Санкт-Петербург)

Графическое построение прямых разложений некоторого класса почти вполне разложимых абелевых групп без кручения [1]

Рассматривается класс блочно-жестких crq-групп X кольцевого типа с регулятором A. Это означает, что X/A является конечной циклической группой, при этом множество критических типов $T = T_{cr}(X) = T_{cr}(A)$ состоит из попарно несравнимых типов, которые могут быть представлены характеристиками, состоящими только из символов $0'$s и ∞'s. Вполне разложимая группа A является прямой суммой своих τ-однородных компонент $A_\tau = A(\tau)$, где $A_\tau \cong n_\tau \tau$ (прямая сумма n_τ копий группы τ, $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$), то есть $A = \bigoplus_{\tau \in T_{cr}(A)} A_\tau$ и $n = \mathrm{rk} X = \mathrm{rk} A = \sum_{\tau \in T_{cr}(A)} n_\tau$. Если все n_τ равны 1, то группа X называется жесткой crq-группой.

Абелевы группы без кручения дают примеры неизоморфных прямых разложений, и классификация таких разложений одной и той же группы является одной из центральных проблем их исследования. Почти изоморфизм, являющийся эквивалентностью более слабой, чем изоморфизм, традиционно используется для классификации групп из этого класса:

Определение 1. Две абелевы группы без кручения конечного ранга G и H *почти изоморфны*, обозн. $G \cong_{nr} H$, если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p : G \to H$, $\Psi_p : H \to G$, для которых группы $G/H\Psi_p$ и $H/G\Phi_p$ конечны, и числа $[G : H\Psi_p]$ и p, а также $[H : G\Phi_p]$ и p, являются взаимно простыми.

Как известно, почти изоморфизм сохраняет свойства прямых разложений абелевых групп без кручения конечного ранга:

Теорема 2. ([1, 12.9 (b), c. 144]) Пусть X и Y — почти изоморфные абелевы группы без кручения конечного ранга. Если $X = X_1 \oplus X_2$, то существует разложение $Y = Y_1 \oplus Y_2$, такое что $Y_1 \cong_{nr} X_1$ и $Y_2 \cong_{nr} X_2$.

Пусть $e = |X/A|$. Выберем порождающий элемент $b+A$ в X/A, тогда $eb = \sum_{\tau \in T} v_\tau$, $v_\tau \in A_\tau$, и по определению положим

$$m_\tau = m_\tau(X) = |\overline{v_\tau}| = |v_\tau + eA|, \tag{1}$$

то есть m_τ — порядок элемента $\overline{v_\tau}$ в A/eA.

Очевидно, $m_\tau | e$ для каждого $\tau \in T$, и эти числа не зависят от выбора элемента b, удовлетворяющего условию $\langle b + A\rangle X/A$, то есть являются инвариантами crq-группы X. Более того, они одинаковы для почти изоморфных групп:

Теорема 3. (Критерий почти изоморфизма [2, Theorem 2.4]) Пусть X и X' — блочно-жесткие (в частности, жесткие) crq-группы кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Тогда $X \cong_{nr} X'$, если и только если их регуляторы $R(X)$ и $R(X')$ изоморфны и $m_\tau(X) = m_\tau(X')$ для всех типов $\tau \in T$.

Особая роль в нашем подходе к прямым разложениям рассматриваемых групп принадлежит следующей теореме.

Теорема 4. (Критерий неразложимости [2, Theorem 3.7]) Пусть X является блочно-жесткой crq–группой. Тогда X неразложима, если и только если она жесткая и не существует нетривиального разбиения $T_{cr}(X) = T_1 \cup T_2$, такого что $\gcd(m_\sigma(X), m_\tau(X)) =$ при любых $\sigma \in T_1$ and $\tau \in T_2$.

Переходя к графической интерпретации [3], введем следующее

Определение 5. Пусть X — блочно-жесткая crq-группа. **Каркасом** группы X назовем граф $F(X)$, вершинами которого являются элементы множества $T_{cr}(X)$, причем две вершины σ и τ соединяются ребром "p"для каждого простого делителя p числа $\gcd(m_\sigma(X), m_\tau(X))$.

С crq-группой X ассоциируется некоторый граф Γ следующим образом. Обозначим $r = |T_{cr}(X)|$ и для группы X произвольно упорядочим элементы множества критических типов,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 17-01-00849

считая, что каждый тип обозначает некоторый цвет: $T_{cr}(X) = \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$. Тогда $A = A_{\tau_1} \oplus A_{\tau_2} \oplus \ldots \oplus A_{\tau_r}$.

Распределим n вершин графа Γ на r радиусах $\tau_1, \ldots, \tau_r$ некоторых концентрических окружностей так, чтобы окружность наименьшего радиуса была бы заполнена вершинами каркаса $F(X)$, и каждый радиус τ_i содержал бы $n_i = \mathrm{rk} A_{\tau_i}$ вершин, $i = 1, \ldots, r$. Всем простым делителям p числа e естественно сопоставим ребра каркаса, который таким образом, располагается на окружности наименьшего радиуса. Заметим, что любые две смежные (соединенные ребром) вершины графа Γ не находятся на одном радиусе.

Таким образом, граф Γ является r-раскрашиваемым графом, в котором ребрами соединяются только вершины разных цветов. Он представляет собой объединение каркаса $F(X)$ и множества изолированных вершин. Мы называем граф Γ главным графом группы X, так как по нему с точностью до почти изоморфизма восстанавливается её так называемое "главное разложение"$X = Y \oplus A'$, содержащее вполне разложимую группу максимального ранга, в котором Y визуализируется как объединение всех компонент связности с количеством вершин не менее 2, а вполне разложимой группе A' соответствует множество всех изолированных вершин.

Следуя теории прямых разложений crq-групп, мы вводим "допустимые трансформации"графа Γ, при которых ребро p нового графа Γ' соединяет другую пару вершин, находящихся на тех же радиусах, что и в графе Γ, при очень важном ограничении, что никакие две вершины полученных компонент связности не находятся на одном и том же радиусе.

Таким образом, допустимые трансформации приводят к новым наборам компонент связности при сохранении числа вершин каждого цвета и числа ребер, соединяющих вершины любых двух (разных) цветов. Критерий неразложимости обеспечивает, что по этим компонентам связности с точностью до почти изоморфизма восстанавливаются неразложимые слагаемые исходной группы, то есть определяются все её возможные прямые разложения.

Доказана

Теорема 6.

Пусть $l_1 + l_2 + \ldots + l_t = n \geq 2r \geq 6$ - натуральные числа. Тогда существует блочно-жесткая crq-группа X ранга n, которая обладает разложениями в прямые суммы неразложимых групп рангов $l_1, l_2, \ldots, l_t$, если выполнено одно из условий:

1. $r = max\{l_1, l_2, \ldots, l_t\}$
   или

2. $r = n - t$ при $r > max\{l_1, l_2, \ldots, l_t\}$

Литература. [1] D. Arnold. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings, Lecture Notes in Mathematics, vol. 931, Springer Verlag, 1982. [2] E. Blagoveshchenskaya, A. Mader. Decompositions of almost completely decomposable abelian groups, Contemporary Mathematics, vol. 171, pp. 21-36, 1994. [3] E. Blagoveshchenskaya, D. Kunetz. Direct Decomposition Theory of Torsion-Free Abelian Groups of Finite Rank: Graph Method *Lobachevskii Journal of Mathematics,* **39**, # 1, 29-34, 2018.

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

Е. А. Васильева (Париж), **А. Р. Майорова** (Москва)

Обобщения тождества Коши и их приложения

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ – множества коммутирующих переменных. Обозначим XY множество пар $\{x_i y_j\}$, упорядоченных в лексикографическом порядке.

Тождество Коши $s_{(n)}(XY) = \sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y)$ для функций Шура $s_\lambda = \sum_{T \in SYT(\lambda)} X^T$, производящих функций полустандартных таблиц Юнга, является одним из наиболее полезных комбинаторных тождеств. Оно тесно связано с известной биекцией Робинсона-Шенстеда $RS : \pi \to (P_\pi, Q_\pi)$ между перестановками симметрической группы S_n и парами стандартных таблиц Юнга одинаковой формы из n клеток. Основное свойство биекции Робинсона-Шенстеда заключается в том, что она сохраняет множество спуска ($Des(T) = \{i \in [n-1] =$

$\{1, 2, \dots n-1\} \mid i$ расположена выше чем $i+1\}$, $Des(\pi) = \{i \in [n-1] | \pi(i) > \pi(i+1)\}$), а именно

$$Des(\pi) = Des(Q_\pi); \quad Des(\pi^{-1}) = Des(P_\pi).$$

Выразив обе части тождества Коши в базисе фундаментальных квазисимметрических функций $\{F_I\}_{I \subset [n-1]}$, можно показать существование биекции, обладающей этим свойством.

В работе [1] авторы предложили функции домино $\mathcal{G}_\lambda = \sum_{T \in SDT(\lambda)} X^T$, т.е. производящие функции полустандартных таблиц домино, в качестве аналога функций Шура для случая квазисимметрических функций типа B. Был доказан следующий аналог тождества Коши для функций домино:

Теорема 1. Рассмотрим два алфавита коммутирующих переменных $X = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ и $Y = \{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots\}$ с дополнительными условиями $x_{-i} = x_i; y_{-i} = y_i$. Обозначим XY множество пар $\{x_i y_j\}$, упорядоченных в лексикографическом порядке. Тогда

$$\mathcal{G}_{(n)}(XY) = \sum_\lambda \mathcal{G}_\lambda(X)\mathcal{G}_\lambda(Y). \tag{1}$$

Выразив обе части тождества 1 при помощи фундаментальных квазисимметрических функций $\{F_I^B\}_{I \subset \{0\} \cup [n-1]}$ типа B, можно показать существование аналога биекции Робинсона-Шенстеда между элементами группы Кокстера B_n и парами стандартных таблиц домино одинаковой формы.

Авторы обобщили функции домино при помощи дополнительной переменной q, отвечающей за статистику $Sp(T)$, равную количеству вертикальных домино в таблице домино T.

$$\mathcal{G}_\lambda(X; q) = \sum_{T \in SSDT(\lambda)} q^{\frac{Sp(T)}{2}} X^T.$$

Авторами было доказано тождество Коши для модифицированных функций домино $\mathcal{G}_\lambda(X; q)$.

Теорема 2. Рассмотрим два алфавита коммутирующих переменных $X = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ и $Y = \{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots\}$ с дополнительными условиями $x_{-i} = qx_i; y_{-i} = qy_i$. Обозначим XY множество пар $\{x_i y_j\}$, упорядоченных в лексикографическом порядке. Тогда

$$\mathcal{G}_{(n)}(XY, q) = \sum_\lambda \mathcal{G}_\lambda(X, q)\mathcal{G}_\lambda(Y, q).$$

Доказательство теоремы 2 основывается на формуле Лама (см. [2]), обобщающей тождество Коши на косые LLT многочлены.

Использование модифицированных функций домино и теоремы 2 позволяет улучшить аналог биекции Робинсона-Шенстеда для группы Кокстера B_n. В частности, существует биекция, не только сохраняющая множество спуска, но и связывающая статистики Sp и $tc(\pi)$, количество отрицательных элементов перестановки со знаками: $2tc(\pi) = Sp(P_\pi) + Sp(Q_\pi)$.

Рассмотрим таблицу домино T. Отметим каждую клетку знаком "+" или "–", при помощи шахматной раскраски, в верхнем левом углу стоит "–". Мы называем домино отрицательной, если его правая верхняя клетка отмечена знаком "–" и положительной – иначе. Авторы использовали теорему 2 для доказательства существования биекции, связывающей две статистики: $Sp(T)$ и $neg(T)$, количества отрицательных домино в таблице домино T.

Теорема 3. Существует биекция $W : (T, U) \to (R, S)$ на множестве пар стандартных таблиц домино одинаковой формы, такая что

$$Des(T) = Des(R), Des(U) = Des(S); Sp(T) + Sp(U) = 2neg(R) = 2neg(S).$$

Многочлены Шура имеют большое значение в теории представлений, так как они являются характерами GL_n. Помимо этого они также связаны с характерами симметрической группы с помощью отображения Фробениуса. Положительный ответ на вопрос, раскладывается ли симметрическая функция с положительными коэффицентами на функции Шура, таким образом, означает, что данная симметрическая функция связана с каким-либо характером GL_n или S_n. Множество A называется Шур-положительным, если ассоциированная с ним квазисиммметрическая функция $Q(A) = \sum_{a \in A} F_{Des(a)}$ оказывается симметрической и раскладывается с положительными коэффицентами на функции Шура. Классическими примерами Шур-положительных множеств являются классы сопряженности, классы Кнута и обратные классы спусков.

Часть этих результатов вытекает из биекции Робинсона-Шенстеда. Авторы обобщили понятие Шур-положительных множеств на случай типа B, введя понятие $\mathcal{G}$-положительного [3] и q-$\mathcal{G}$-положительного множества. Следствия теорем 1 и 2 позволяют показать, что базовые множества, такие как классы Кнута и обратные классы спусков являются $\mathcal{G}$-положительными (см. [3]) и q-$\mathcal{G}$-положительными.

Литература. [1] E.A. Vassilieva, A. R.Mayorova. A new link between the descent algebra of type B, domino tableaux and Chow's quasisymmetric functions. Discrete Mathematics, 342:6 (2019), 1658-1673. [2] T. Lam. On sjostrand's skew sign-imbalance identity, 2006. url: https://arxiv.org/abs/math/0607516. [3] А.Р. Майорова, Е.А. Васильева. Новая связь между производящей функцией таблиц домино и квазисимметрическими функциями типа B, Тезисы Международной алгебраической конференции памяти А. Г. Куроша (2018) 129-132

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Ecole Polytechnique

e-mail: alina.r.m@yandex.ru

Е. М. Вечтомов (Киров)

О полукольцах частичных функций с расширенным сложением

Пусть X — произвольное множество, $\mathrm{F}(X) = \mathbb{R}^X$ — множество всех функций (отображений) $X \longrightarrow \mathbb{R}$ и $\mathrm{PF}(X) = \cup\{F(Y) : Y \subseteq X\}$ — множество всевозможных частичных действительнозначных функций на X, включая $\mathrm{F}(X)$ и пустую функцию $\oslash$. Обозначим через $D(f)$ область определения частичной функции f. Определим операции сложения и умножения частичных функций поточечно. Для любых $f, g \in \mathrm{PF}(X)$ положим: $D(f+g) = D(f) \cup D(g)$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ при $x \in D(f) \cap D(g)$, $f + g = f$ на $D(f) \setminus D(g)$ и $f + g = g$ на $D(g) \setminus D(f)$, $D(fg) = D(f) \cap D(g)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$ при $x \in D(f) \cap D(g)$. Относительно введенных операций $\mathrm{PF}(X)$ становится коммутативным полукольцом с нулем $\oslash$ и единицей — функцией-константой 1 на X, подполукольцом которого служит кольцо $F(X)$.

Пусть $\mathbb{R} \cup \{\oslash\}$ — полукольцо, полученное добавлением к полю $\mathbb{R}$ действительных чисел нового нулевого элемента $\oslash$. При одноэлементном множестве X полукольцо $\mathrm{PF}(X)$ изоморфно $\mathbb{R} \cup \{\oslash\}$.

Полезно иметь в виду следующее утверждение:

Предложение 1. [5, предложение 39.2] Полукольцо $\mathrm{PF}(X)$ изоморфно полукольцу $(\mathbb{R}\cup\{\oslash\})^X$ всех отображений $X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\oslash\}$ с поточечными операциями сложения и умножения отображений.

В [5, глава 8] рассматривается полукольцо $\mathbb{R}\mathrm{P}^X$ всех частичных $\mathbb{R}$-значных функций на X, когда сумма частичных функций f и g определена, как и произведение, на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$. При одноэлементном множестве X имеем полукольцо $\mathbb{R}\mathrm{P}^X = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, являющееся расширением $\mathbb{R}$ при помощи поглощающего (по обеим операциям) элемента ∞.

Полукольцевые понятия подполукольца, идеала, конгруэнции, гомоморфизма и т. д. определяются обычным образом. Подполукольцо A полукольца $\mathrm{PF}(X)$ или $\mathbb{R}\mathrm{P}^X$ называется подалгеброй, если A выдерживает умножение на числа из $\mathbb{R}$, т. е. является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Пустое множество $\oslash$ также считаем подалгеброй полуколец $\mathrm{PF}(X)$ и $\mathbb{R}\mathrm{P}^X$.

Замечание 1. Полукольцо $\mathbb{R} \cup \{\oslash\}$ имеет: три идеала $\{\oslash\}$, $\{0, \oslash\}$, $\mathbb{R} \cup \{\oslash\}$; четыре конгруэнции: отношение равенства, с одним неодноэлементным классом $\{0, \oslash\}$, двухклассовую $\{\{\oslash\}, \mathbb{R}\}$, одноклассовую; шесть подалгебр $\oslash$, $\{\oslash\}$, $\{0\}$, $\{0, \oslash\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \cup \{\oslash\}$. Полукольцо $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ имеет три идеала: $\{\infty\}$, $\{0, \infty\}$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$; три конгруэнции: отношение равенства, двухклассовую $\{\{\infty\}, \mathbb{R}\}$, одноклассовую; пять подалгебр $\oslash$, $\{\infty\}$, $\{0, \infty\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Мы изучаем алгебраические свойства полукольца $\mathrm{PF}(X)$, в том числе решетки его идеалов, конгруэнций и подалгебр. Как показывает замечание 1, эти свойства существенно отличаются от случая полукольца $\mathbb{R}\mathrm{P}^X$. См. также работы [1—4] о полукольцах непрерывных частичных $\mathbb{R}$-значных функций.

Множество X можно рассматривать как дискретное топологическое пространство, тогда βX — компактификация Стоуна – Чеха пространства X. Через $[Y]$ обозначается замыкание в βX множества $Y \subseteq \beta X$. Для точки $p \in \beta X$ получаем максимальный идеал $\mathrm{M}^p = \{f \in \mathrm{PF}(X) : p \in [f^{-1}(0)]$ или $p \notin [D(f)]\}$ в полукольце $\mathrm{PF}(X)$. Если $p \in X$, то $\mathrm{M}^p = \mathrm{M}_p = \{f \in \mathrm{PF}(X) : f(p) = 0$ или $p \notin D(f)\}$.

Теорема 1. Для любого множества X множествами M^p по всем точкам $p \in \beta X$ исчерпываются все максимальные идеалы полукольца $\mathrm{PF}(X)$.

Данная теорема является аналогом классической теоремы Гельфанда – Колмогорова о строении максимальных идеалов колец непрерывных действительнозначных функций [6, theorem 7.3]. Множество всех максимальных идеалов полукольца $\mathrm{PF}(X)$, рассматриваемое с топологией Стоуна – Зариского, называется максимальным спектром этого полукольца.

Следствие 1. Максимальный спектр полукольца $\mathrm{PF}(X)$ гомеоморфен βX.

Теорема 2. Всякая максимальная конгруэнция на полукольце $\mathrm{PF}(X)$ либо двухклассовая, либо являются отношением Берна по некоторому максимальному идеалу в $\mathrm{PF}(X)$.

Отношением Берна по идеалу J полукольца S называется конгруэнция ρ на S, заданная правилом: $s\rho t$ при $s, t \in S$ означает, что $s + a = t + b$ для некоторых $a, b \in J$.

Каждая частичная функция ϕ из множества Y во множество X индуцирует полукольцевой гомоморфизм $\alpha_\phi : \mathrm{PF}(X) \longrightarrow \mathrm{PF}(Y)$ по правилу: $\alpha_\phi(f) = f \circ \phi$ для всех $f \in \mathrm{PF}(X)$. При этом $\alpha_\phi(1) = 1_{D(\phi)}$ — единица кольца $\mathrm{F}(D(\phi))$.

Теорема 3. Для любых множеств X, Y и $Z \subseteq Y$ всякий полукольцевой гомоморфизм $\alpha : \mathrm{PF}(X) \longrightarrow \mathrm{PF}(Y)$, переводящий 1 в 1_Z, имеет вид α_ϕ для единственной функции $\phi : Z \longrightarrow X$.

Теорема 4. Категория всевозможных множеств X и частичных функций ϕ между ними антиэквивалентна категории полуколец $\mathrm{PF}(X)$ и их гомоморфизмов, переводящих единицу 1 в «частичную» единицу $1_{D(\phi)}$.

Следствие 2. Категория множеств антиэквивалентна категории полуколец вида $\mathrm{PF}(X)$ и их гомоморфизмов, сохраняющих 1.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ "Полукольца и их связи", проект N 1.5879.2017/8.9.

Литература. [1] В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. Подалгебры полуколец непрерывных частичных числовых функций // Международная алгебраическая конф., посв. 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша. Тезисы докл. – М.: МГУ, 2018. С. 49–50. [2] Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. Полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций // CEUR-WS.org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications". – Yekaterinburg, Russia, February 5–11, 2017. С. 20–29. [3] Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. О подалгебрах в полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций // Advanced science. Киров: ВятГУ, 2017. № 2. 0,5 п.л. [4] Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. О подалгебрах в полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций. II // Advanced science. Киров: ВятГУ, 2018. № 2. С. 4–9. [5] Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков. Элементы функциональной алгебры: в 2 т. Т. 2. – Киров: ООО «Издательство «Радуга-ПРЕСС», 2016. 316 с. [6] L. Gillman, M. Jerison. Rings of continuous functions. New York, 1976. 300 pp.

Вятский государственный университет
Vyatka State University
e-mail: vecht@mail.ru

В. К. Вильданов (Нижний Новгород)

Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими группами автоморфизмов

Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

Смешанные факторно делимые группы конечного ранга определили А. А. Фомин и У. Уиклесс в работе [1]. Группа A называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа.

Вопрос определяемости факторно делимой группы ранга 1 своей группой автоморфизмов в классе всех таких групп рассмотрен в работе [1]. Определяемость факторно делимых групп своими полугруппами эндоморфизмов рассматривались в работах [2, 3].

Класс всех факторно делимых групп ранга 1 обозначим $\mathcal{QD}_1$. Кроме того, нам потребуется следующее

Определение. Будем говорить, что конечная циклическая группа A *слабо определяется своей группой автоморфизмов*, если для любой конечной циклической группы $B \ncong A$ из условия $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ следует, что число ненулевых компонент B_p группы B больше, чем число ненулевых компонент A_p группы A.

Предложение 1 [4, теорема 3]. Группа $A \in \mathcal{QD}_1$ определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_1$ тогда и только тогда*,* когда $\mathrm{t}(A)$ — циклическая группа *(*возможно*,* нулевая*),* слабо определяющаяся своей группой автоморфизмов*,* и $pA \neq A$ для всех $p \in \mathbb{P}$ таких*,* что $A_p = 0$.

Назовем группу G однородной вполне разложимой факторно делимой группой, если $G = \bigoplus_n A$, где $A \in \mathcal{QD}_1$. Класс всех таких групп обозначим $\mathcal{QD}^*$.

Предложение 2. *Группа $G = \bigoplus_n A \in \mathcal{QD}^*$ определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathcal{QD}^*$, если группа A определяется в классе $\mathcal{QD}_1$ своей группой автоморфизмов.*

Теорема. Группа $G = \bigoplus_n A \in \mathcal{QD}^*$ определяется своей группой автоморфизмов в классе 2−делимых групп из $\mathcal{QD}^*$, если $2A = A$ и $n > 2$.

Для $n > 3$ требование 2−делимости в теореме можно опустить.

Литература. [1] A. A. Fomin, W. Wickless, Quotient divisible abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc. 126, (1998), No 1, 45–52. [2] В. К. Вильданов, О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков, Об определяемости смешанных абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов. Математические заметки. 103, (2018), No 3, 364–371. [3] О. В. Любимцев, Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов. Известия вузов. Математика. 10, (2017) 75–82. [4] E. A. Timoshenko, V. K. Vildanov, On determinability of a quotient divisible Abelian group of rank 1 by its automorphism group. Алгебра и логика: теория и приложения : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию В. М. Левчука. Красноярск, 24–29 июля 2016 г., 120–122.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
e-mail: kadirovi4@gmail.com

В. П. Вифлянцев

Конечно порожденные алгебры Ли векторных полей и слоения с особенностями на дифференцируемых многообразиях

Предложение. Конечно порожденные алгебры Ли векторных полей задают вполне интегрируемые дифференциальные системы с особенностями (слоения). Локально слоение с особенностями может быть задано возрастающей цепочкой таких алгебр Ли.

МГУ каф. дифф. геометрии, Юж. отд. РАН

Н. Н. Воробьев, **А. Р. Филимонова** (Витебск)

Об индуктивных решетках кратно σ-локальных классов Фиттинга

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–4]. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$.

Через $\mathbb{P}$ обозначают множество всех простых чисел, $\pi = \{p_1, ..., p_n\} \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначают множество всех различных простых делителей целого числа n. В дальнейшем $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \sigma \to \{\text{классы Фиттинга}\}, \tag{1}$$

называемая σ-функцией Хартли (более кратко, H_σ-функцией). Следуя [2,3] сопоставим функции f класс групп

$$LR_\sigma(f) = \big(G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)\big),$$

где $O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G)$ — наименьшая σ_i-замкнутая нормальная подгруппа группы G.
Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f вида (1), то класс $\mathfrak{F}$ (по предложению Н.Т. Воробьева) называется σ-локальным и f σ-локальное определение $\mathfrak{F}$. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то H_σ-функция f называется *внутренней.*

Согласно [5], всякий класс Фиттинга считается 0-кратно σ-локальным. При $n > 0$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно σ-локальным, если он обладает такой H_σ-функцией Локетта f, каждое непустое значение $f(\sigma_i)$ которой является $(n-1)$-кратно σ-локальным классом Фиттинга.

Следуя [4], совокупность классов Фиттинга Θ называется полной решеткой классов Фиттинга, если пересечение любой совокупности классов Фиттинга из Θ снова принадлежит Θ, и во множестве Θ имеется такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого класса Фиттинга $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Для произвольной полной решетки классов Фиттинга Θ символом Θ^σ обозначается полная решетка всех таких σ-локальных классов Фиттинга, которые определяются Θ-значными H_σ-функциями, т.е. такими функциями, все непустые значения которых принадлежат Θ.

Пусть Θ — полная решетка классов Фиттинга. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ элементов из Θ^σ обозначается через $\vee_{\Theta^\sigma}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Решетка Θ^σ называется *индуктивной* (см. [4]), если для любого набора $\mathfrak{F}_i = LR_\sigma(f_i)$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i \in \Theta^\sigma$ и для всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ Θ-значных H_σ-функций f_i, где f_i — некоторая внутренняя H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^\sigma}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LR_\sigma(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)),$$

где символ $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначает такую H_σ-функцию f, что $f(\sigma_i)$ является верхней гранью для $\{f_i(\sigma_i) \mid i \in I\}$ в Θ, если $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(\sigma_i) \neq \varnothing$, и $f(\sigma_i) = \varnothing$ в противном случае. Заметим, что индуктивность решетки Θ^σ по существу означает, что исследование операции $\vee_{\Theta^\sigma}$ на множестве Θ^σ можно редуцировать к исследованию более простой операции $\vee_\Theta$ на множестве Θ.

Напомним, что полная решетка называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

Основным результатом является следующая

Теорема. Совокупность всех n-кратно σ-локальных классов Фиттинга $\mathcal{L}_\sigma^n$ является полной, алгебраической и индуктивной решеткой классов Фиттинга, в которой для произвольного множества n-кратно σ-локальных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$

$$\wedge_\sigma^n\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i \text{ — точная нижняя грань и}$$

$$\vee_\sigma^n\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} = l_\sigma^n\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big) \text{ — точная верхняя грань.}$$

Здесь символом $l_\sigma^n\mathrm{fit}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big)$ обозначается пересечение всех тех классов Фиттинга из l_σ^n, которые содержат совокупность групп $\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i$.

Литература. [1] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. [2] Zhang Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba. On n-multiply σ-local formations of finite groups. Comm. Algebra, (2019), doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875. [3] А. Н. Скиба. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. Матем. труды, 2 (2) (1999), 114–147. [4] А. Н. Скиба. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. [5] Н. Т. Воробьев. О предположении Хоукса для радикальных классов. Сибирский матем. журнал, 37 (6) (1999), 1296–1302.

Витебский государственный университет имени П.М.Машерова

e-mail: vornic2001@mail.ru, anyafilim@gmail.com

Н. Т. Воробьев, **Т. Б. Караулова** (Витебск)

О характеризации подгрупп Фишера конечных π-разрешимых групп

В работе рассматриваются только конечные группы. В обозначениях мы следуем [1]. Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют *множеством Фиттинга* G, если множество $\mathcal{F}$ замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Из определения следует, что для каждого множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G, данная группа обладает единственной $\mathcal{F}$-максимальной нормальной подгруппой, которую называют *$\mathcal{F}$-радикалом* G и обозначают $G_\mathcal{F}$.

Шеметковым [2] доказано, что если группа G π-разрешима (π – множество всех простых делителей всех $\mathcal{F}$-подгрупп G) и $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G, то G обладает единственным классом сопряженных $\mathcal{F}$-инъекторов.

Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга G, то подгруппа V группы G называется: (1) *$\mathcal{F}$-максимальной* в G, если $V \in \mathcal{F}$ и $U = V$, при условии, что $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathcal{F}$; (2) *$\mathcal{F}$-инъектором* G, если $V \cap N$ является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой для всякой субнормальной подгруппы N группы G.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называется *π-насыщенным*, если $\mathcal{F} = \{H \leq G : H/H_\mathcal{F} \in \mathfrak{E}_{\pi'}\}$, где $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп.

Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G. Подгруппа F группы G называется *$\mathcal{F}$-подгруппой Фишера* G, если выполняются следующие условия: (1) $F \in \mathcal{F}$; (2) если L – $\mathcal{F}$-подгруппа G, нормализуемая F, то $L \leq F$.

Подгруппа U группы G называется *$\mathcal{F}$-дуально пронормальной* в G [3], если $\langle U, U^g\rangle_\mathcal{F}$ содержится в U для каждого $g \in G$ (кратко U $\mathcal{F}$-dpn G).

Доказана

Теорема. Пусть $\mathcal{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга π-разрешимой группы G, замкнутое относительно подгрупп. Если V – подгруппа группы G, то следующие утверждения эквивалентны:

(1) V – $\mathcal{F}$-подгруппа Фишера группы G, содержащая холлову π'-подгруппу G;

(2) V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G;

(3) V – $\mathcal{F}$-максимальная и $\mathcal{F}$-дуально пронормальная подгруппа G.

Литература. [1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite Soluble Groups. Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. [2] Л. А. Шеметков. О подгруппах π-разрешимых групп. В кн.: Конечные группы, Минск: Наука и техника, 1975. [3] A. D'Aniello. Dualpronormality and Fitting classes. Comm. Algebra, 26 (1998), 425–433.

Витебский государственный университет имени П.М.Машерова

e-mail: vorobyovnt@tut.by, tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

А. И. Генералов, **И. М. Зильберборд** (Санкт–Петербург)

Обобщённая теорема о согласованных разложениях для модулей над полусовершенными кольцами

Теорема о согласованных базисах была впервые распространена на бесконечно порождённые свободные абелевы группы в работе Коэна и Глюка [1]. Хилл и Меджиббен [2] сформулировали и доказали обобщенную теорему о согласованных базисах (согласованных разложениях) для абелевых групп, а Генералов и Желудев [3, 4] — для дедекиндовых колец.

Мы распространили обобщённую теорему о согласованных разложениях на модули над полусовершенными кольцами, а именно, нами доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть R — полусовершенное кольцо, $J = \mathrm{Rad}(R)$ — радикал Джекобсона кольца R, и в категории левых R-модулей дана коммутативная диаграмма с точными строками, в которой модули G и G' проективны, а Φ — изоморфизм:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\rho} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{\rho'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Тогда следующие условия равносильны:

(1) Φ индуцирован некоторым изоморфизмом $\pi : G \to G'$ (иначе говоря, существует изоморфизм $\pi : G \to G'$ такой, что $\rho' \circ \pi = \Phi \circ \rho$);

(2) $(H + JG)/JG \simeq (H' + JG')/JG'$.

В качестве непосредственного следствия из этой теоремы мы получили теорему о согласованных разложениях для модулей над полусовершенными кольцами:

Теорема 2. Пусть R — полусовершенное кольцо, H — подмодуль проективного R -модуля G, тогда следующие условия равносильны:

(1) существует разложение модуля $G = \underset{i\in I}{\oplus} P_i$ в прямую сумму неразложимых модулей P_i такое, что $H = \underset{i\in I}{\oplus} (P_i \cap H)$;

(2) G/H — прямая сумма семейства модулей, каждый из которых изоморфен фактормодулю некоторого главного неразложимого модуля (т.е. модуля вида Re, где e — примитивный идемпотент в R).

Литература. [1] J. M. Cohen, H. Gluck, Stacked bases for modules over principal ideal domains. Journal of Algebra, 14, (1970), 493–505. [2] P. Hill, C. Megibben, Generalizations of the stacked bases theorem. Trans.Amer.Math.Soc., 312, (1989), No 1, 377–402. [3] А. И. Генералов, М. В. Желудев, Теорема о согласованных базисах в модулях над дедекиндовыми кольцами. Алгебра и анализ, 7, (1995), No 4, 157–175. [4] А. И. Генералов, М. В. Желудев, Согласованные разложения модулей над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами. Алгебра и анализ, 9, (1997), No 4, 47–62.

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: i.zilberbord@mail.spbu.ru

А. В. Гришин (Москва)

О периодической части группы невырожденных 2×2-матриц с алгебраическими коэффициентами

Рассматривается полная линейная группа $GL_2(L)$, где $\mathbb{Q} \subset L$ — конечное вещественное расширение поля рациональных чисел. Исследуется вопрос: как устроена периодическая часть группы $GL_2(L)$, т.е. множество таких матриц x из $GL_2(L)$, которые в некоторой степени дают единичную матрицу, каков может быть порядок этих матриц? Доказано, что при $L = \mathbb{Q}$ имеются только следующие варианты: $o(x) = 2$, $o(x) = 3$, $o(x) = 4$ и $o(x) = 6$. Если $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где $d > 0$, квадратичное расширение, то добавляются ещё следующие возможности: $o(x) = 5$, $o(x) = 8$, $o(x) = 10$, $o(x) = 12$. При этом поле L может иметь вид:

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}), L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}).$$

Можно показать, что для любого натурального n существует такое конечное вещественное расширение L, что в группе $GL_2(L)$ имеется элемент порядка n.

Представляет интерес следующая функция натурального аргумента n. Пусть $D(n)$ — наименьшее натуральное число, для которого существует вещественное расширение L степени $D(n)$, такое, что группа $GL_2(L)$ содержит элемент порядка n. Например, $D(1) = D(2) = D(3) = D(4) = D(6) = 1$, $D(5) = D(8) = D(10) = D(12) = 2$.

Московский педагогический государственный университет

e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

С. В. Гусев (Екатеринбург)

Пример предельного многообразия апериодических моноидов

Многообразие универсальных алгебр называют *конечно базируемым*, если оно имеет конечный базис тождеств, и *бесконечно базируемым* в противном случае. Минимальные бесконечно базируемые многообразия принято называть *предельными*. Предельным многообразиям универсальных алгебр различных типов уделяется существенное внимание. Это связано с тем, что любое бесконечно базируемое многообразие содержит некоторое предельное многообразие. Отсюда следует, что многообразие *наследственно бесконечно базируемо*, т.е. все его подмногообразия конечно базируемы, тогда и только тогда, когда оно не содержит никакого предельного многообразия. Таким образом, задача описания наследственно конечно базируемых многообразий сводится к задаче описания предельных многообразий.

Моноид называют *апериодическим*, если все его подгруппы одноэлементны. Первые два примера предельных многообразий апериодических моноидов были построены в работе [1], и до недавних пор других примеров таких многообразий известно не было. Только недавно, в препринте [2], был указан третий пример такого многообразия. В нашей работе мы построили еще один пример предельного многообразия апериодических моноидов. А именно, мы показали, что предельным является многообразие моноидов, заданное тождествами

$$\begin{gathered} xyx \approx xyx^2, \\ x^2y^2 \approx y^2x^2, \\ xyzxy \approx yxzxy, \\ xyxztx \approx xyxzxtx, \\ x\, z_{1\pi}z_{2\pi}\cdots z_{n\pi}\, x \left(\prod_{i=1}^{n} t_i z_i\right) \approx x^2\, z_{1\pi}z_{2\pi}\cdots z_{n\pi} \left(\prod_{i=1}^{n} t_i z_i\right) \end{gathered}$$

для всех натуральных n и всех перестановок π на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 17-01-00551) и Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.6018.2017/8.9).

Литература. [1] M. Jackson, Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras, Semigroup Forum, 70 (2005), 154–187. [2] W. T. Zhang, Y. F. Luo, A new example of limit variety of aperiodic monoids, to appear; available at: https://arxiv.org/abs/1901.02207.

Уральский федеральный университет

e-mail: sergey.gusb@gmail.com

А. Э. Гутерман (Москва)

Экстремальные централизаторы и их приложения

Доклад основан на совместных результатах с Г. Долинаром, Б. Кузьмой, О.В. Марковой и П. Облак.

Централизатором матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется множество $\mathcal{C}(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) | \ AX = XA\}$ всех матриц, коммутирующих с A. Централизатором подмножества $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$ называется множество $\mathcal{C}(S) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) | \ AX = XA$ для каждого $A \in S\} = \cap_{A \in S} \mathcal{C}(A)$, являющееся пересечением централизаторов всех его элементов. Централизаторы актуальны как для фундаментальной, так и для прикладной математики.

Нескалярная матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется *минимальной,* если для каждого $X \in M_n(\mathbb{F})$, для которого $\mathcal{C}(A) \supseteq \mathcal{C}(X)$, справедливо $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(X)$. Нескалярная матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется максимальной, если для каждой нескалярной матрицы $X \in M_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющей $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(X)$, выполняется $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(X)$.

Охарактеризованы минимальные и максимальные матрицы над произвольными полями. Полученные результаты будут проиллюстрированы своими приложениями к описанию графов коммутирования колец матриц, централизаторов более высокого порядка, характеризации матричных отображений, сохраняющих коммутативность.

В докладе также будут рассмотрены аналогичные вопросы для q-централизаторов. В частности, исследованы вопросы существования аналогов классической теоремы о двойном централизаторе.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: guterman@list.ru

А. Э. Гутерман, **О. В. Маркова**, **М. А. Хрыстик** (Москва)

Длины групповых алгебр в случае групп малых порядков

Длиной конечной системы порождающих конечномерной ассоциативной алгебры над произвольным полем называется наименьшее натуральное число k, такое что произведения длины, не большей k, элементов этой системы порождающих порождают данную алгебру как векторное пространство. Длиной алгебры называется максимум длин ее систем порождающих.

Задача вычисления длины впервые возникла в работах Спенсера и Ривлина 1959–60гг. (см. [4], [5]) для полной алгебры матриц порядка 3 в связи с возможным применением в механике сплошных сред. В общей формулировке проблема вычисления длины полной алгебры матриц $M_n(\mathbb{F})$ как функции порядка матриц была поставлена Пазом в 1984 году в работе [3] и до сих пор является открытой. Основные алгебраические свойства функции длины были изучены О. В. Марковой в 2012 году в работе [2].

Вычисление длины в общем случае является довольно трудной задачей. В её решении может помочь рассмотрение случая групповых алгебр. В работе [1] А. Э. Гутерманом и О. В. Марковой задача вычисления длины решена для четверной группы Клейна и группы перестановок трёх элементов, в работе [8] — для группы кватернионов. В работах [6], [7] рассмотрен случай абелевых групп.

Предметом данного доклада являются результаты о длине групповых алгебр для групп малых порядков, в частности, значения длин групповых алгебр для всех групп, порядок которых не превосходит 8.

Литература. [1] А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, Длина групповых алгебр групп небольшого размера, Записки научных семинаров ПОМИ, **472**(2018), 76–87. [2] О. В. Маркова, Функция длины и матричные алгебры, Фундамент. и прикл. матем. 17:6 (2012), 65–173. [3] A. Paz, An Application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables, Linear and Multilinear Algebra, **15**(1984), 161–170. [4] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua, Arch. Ration. Mech. Anal., **2**(1959), 309–336. [5] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, Further results in the theory of matrix polynomials, Arch. Ration. Mech. Anal., **4**(1960), 214–230. [6] A.E. Guterman, M.A. Khrystik, O.V. Markova, On the lengths of group algebras of finite Abelian groups in the semi-simple case, Preprint. [7] A.E. Guterman, M.A. Khrystik, O.V. Markova, On the lengths of group algebras of finite Abelian groups in the modular case, Preprint. [8] A. E. Guterman, O. V. Markova, The length of the group algebra of the group $\mathbf{Q}_8$, Proceedings of ICAC2017. 2019. to appear.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: good_ michael@mail.ru

И. В. Добрынина (Москва), **А. С. Угаров** (Тула)

О проблеме сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина [1]

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, ..., a_n; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Коксетера: $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2, i \neq j$.

Группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$. Данный класс групп в 1983 году выделен К. Аппелем и П. Шуппом [1].

Для всякой группы Артина G можно построить граф Γ такой, что образующим a_i соответствуют вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $< a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}$ — ребро, соединяющее вершины, соответствующие a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа Артина G называется группой Артина с древесной структурой.

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы Артина G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$.

Класс групп Артина с древесной структурой введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [2].

Далее рассмотрим группу Артина

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} * G_s; a_{i_m} = a_{j_l}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1, t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина G_s, где G_s либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_l}$ означает, что объединение групп Артина G_i и G_j ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle$, $\langle a_{j_l} \rangle$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i, a_{j_l} — некоторый образующий группы G_j. Такую группу Артина G будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина.

[1] Работа поддержана РФФИ (грант 19-41-710002 р_а)

Известно, что в группах Артина экстрабольшого типа разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов [1], а также проблема вхождения в циклическую подгруппу [3].

В группах Артина с древесной структурой алгоритмическая разрешимость проблем равенства и сопряженности слов показана в [4], а проблемы вхождения в циклическую подгруппу — в [5].

Проблемы равенства и сопряженности слов для свободного произведения групп G_1, G_2, где G_1 — группа Артина с древесной структурой, G_2 — группа Артина экстрабольшого типа, с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным образующими этих групп, решены В. Н. Безверхним и А. С. Угаровым [6].

Теорема 1. В обобщенной древесной структуре групп Артина G разрешима проблема равенства слов.

Используя диаграммы сопряженности слов над обобщенной древесной структурой групп Артина G, представляющие собой последовательность поддиаграмм, каждая из которых является диаграммой над одним из сомножителей G, объединенных между собой по ребру с меткой из объединяемой подгруппы, авторами получены следующие результаты:

Теорема 2. В обобщенной древесной структуре групп Артина G централизатор элемента конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного централизатора.

Теорема 3. В обобщенной древесной структуре групп Артина G разрешима проблема сопряженности слов.

Литература. [1] K. Appel, P. Schupp, Artins groups and infinite Coxter groups. Ivent. Math., 72 (1983), 201–220. [2] В. Н. Безверхний, О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. Тез. докл. V междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», Тула (2003), 33–34. [3] В. Н. Безверхний, А. Н. Кузнецова, Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина большого типа. Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика, 11:1 (2005), 76–93. [4] В. Н. Безверхний, О. Ю. Карпова, Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика, 12:1 (2006), 67–82. [5] В. Н. Безверхний, О. Ю. Карпова, Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой. Чебышевский сборник, 9:1 (2008), 30–50. [6] В. Н. Безверхний, А. С. Угаров, Решение проблемы сопряженности слов в некотором классе групп Артина. Тез. докл. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», Тула (2018), 74–75.

Академия гражданской защиты МЧС России

Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого

e-mail: dobrynirina@yandex.ru, ugarandrey@gmail.com

Ф. А. Дудкин (Новосибирск)

Аппроксимируемость конечными π-группами обобщенных групп Баумслага–Солитера

Конечно порожденная группа G, которая действует на дереве так, что все вершинные и реберные стабилизаторы – бесконечные циклические группы, называется *обобщенной группой Баумслага–Солитера* (GBS группа). По теореме Басса-Серра группа G представляется в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группы графа групп $\mathbb{A}$ [1], вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические.

Всякой GBS группе G можно сопоставить *граф с метками* $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где A – конечный связный граф, а $\lambda\colon E(A) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах графа A. Метка $\lambda_e = \lambda(e)$, написанная на ребре e с началом в вершине v, определяет вложение $\alpha_e\colon e \to v^{\lambda(e)}$ циклической реберной группы $\langle e\rangle$ в циклическую вершинную группу $\langle v\rangle$. Таким образом граф с метками является частным случаем графа групп.

Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{A})$ *графа с метками* $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ задается порождающими и определяющими соотношениями. Обозначим через $\overline{A}$ граф, полученный из A отождествлением

e и $\overline{e}$. Максимальное поддерево T графа $\overline{A}$ задает копредставление группы $\pi_1(\mathbb{A})$

$$\left\langle \begin{array}{ll} g_v, v \in V(\overline{A}), & \mid \ g_{o(e)}^{\lambda(e)} = g_{t(e)}^{\lambda(\overline{e})}, e \in E(T), \\ t_e, e \in E(\overline{A}) \setminus E(T) & \mid \ t_e^{-1} g_{o(e)}^{\lambda(e)} t_e = g_{t(e)}^{\lambda(\overline{e})}, e \in E(\overline{A}) \setminus E(T) \end{array} \right\rangle.$$

Для различных максимальных поддеревьев соответствующие копредставления задают изоморфные группы.

Как заметил Д.Робинсон [2], GBS группы занимают важные позиции в комбинаторной теории групп благодаря следующим свойствам: нециклические GBS группы – в точности такие конечно порожденные группы когомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую группу; GBS группы когерентны (всякая конечно порожденная подгруппа допускает конечное копредставление).

Группа называется *хопфовой*, если всякий её гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т.е. является автоморфизмом. Далее будем считать, что p и q взаимно простые целые числа (пишем $p \perp q$), не равные нулю. Баумслаг и Солитер [3] впервые предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются

$$BS(p,q) = \langle a,\ t \parallel t^{-1}a^p t = a^q \rangle.$$

Эти группы оказались интересными и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т.д. Кроме того, группы Баумслага–Солитера являются GBS группами.

Группа G называется аппроксимируемой группами из некоторого класса $\mathcal{K}$ (или $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента g относительно которого отличен от единицы. В случае, когда $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, такая группа называется финитно аппроксимируемой. Если π – непустое множество простых чисел и $\mathcal{K} = \mathcal{F}_\pi$ класс всех конечных π-групп, то группа G называется $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой.

В 2008 Д.И.Молдаванский и О.А.Иванова установили критерий $\mathcal{F}_\pi$-ап-проксимируемости разрешимых групп Баумслага–Солитера

Утверждение 1. (Теорема 1 [4]) *Пусть π – произвольное множество простых чисел. Группа $BS(1,k)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует π-число $s > 1$, взаимно простое с k, порядок по модулю которого числа k также является π-числом.*

Будем называть элемент *эллиптическим*, если он стабилизирует вершину (т.е. сопряжен с элементом из $\langle a \rangle$, для некоторой $a \in V(A)$).

Определим модулярный гомоморфизм $\Delta\colon G \to \mathbb{Q}^*$. Для данного $g \in G$ выберем произвольный нетривиальный эллиптический элемент $a \in G$, тогда для некоторых целых m и n, не равных 0, выполняется равенство $g^{-1}a^m g = a^n$. В этом случае, полагаем $\Delta(g) = \frac{m}{n}$. Несложно доказать, что такое определение корректно [5]. Модулярный гомоморфизм играет важную роль в исследовании GBS групп.

Так как $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемые группы являются финитно аппроксимируемыми, то для описания $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых GBS групп надо знать какие из них финитно аппроксимируемы. В 2014 G.Levitt описал все финитно аппроксимируемые GBS группы

Утверждение 2. (Следствие 7.7 [6]) *GBS группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфна $BS(1,n)$ или унимодулярна, т.е. $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$.*

С помощью этих утверждений мы доказываем основную теорему

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{A}$ – граф с метками, представляющий GBS группу G. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*

1. $G \cong BS(1,n)$ и n удовлетворяет условиям утв. 1,

2. $\Delta(G) = \{1\}$ и все метки $\mathbb{A}$ – π-числа,

3. $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, все метки $\mathbb{A}$ – π-числа и $2 \in \pi$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00039)

Литература. [1] J. P. Serre. Trees. Berlin/Heidelberg/New York:Springer, 1980. [2] D. J. S. Robinson, Generalized Baumslag-Solitar groups: a survey of recent progress. Groups St Andrews 2013, LMS, Lecture Note Series 422 (2016), 457-469. [3] G. Baumslag, D. Solitar, Some two-generator one-relator non-hopfian groups, Bull. AMS, 68, 3(1962), 199-201. [4] О. А. Иванова, Д. И. Молдаванский, Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением, Науч. труды ИвГУ, Математика, 6 (2008), 51-58. [5] M. Forester, Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees, Geometry & Topology, 6(2002), 219-267. [6] G. Levitt, Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups, J. Group Theory, 18, 1(2015), 1 – 43.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, г.Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, г.Новосибирск, Россия

e-mail: DudkinF@ngs.ru

И. Ю. Ждановский (Москва)

Гомотопы и изотопы конечномерных алгебр

В докладе будут рассматриваться конечномерные (вообще говоря неассоциативные) алгебры. В случае неассоциативных алгебр помимо понятия изоморфизма рассматривается и более грубое понятие изотопии алгебр, которое было введено в середине 20-го века А.Альбертом. Понятие гомотопии алгебр — обобщение изотопии. В случае ассоциативных алгебр с единицей изотопия это изоморфизм, но гомотопия имеет интерес. Я расскажу о связи изотопии с различными геометрическими задачами, а также о связи гомотопии ассоциативных алгебр с вопросами теории категорий.

МФТИ, ВШЭ

e-mail: ijdanov@mail.ru

С. А. Жилина (Москва)

Граф ортогональности алгебры контрседенионов

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $Z^{**}(\mathcal{A})$ — множество нетривиальных двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$.

Графом ортогональности $\Gamma_O(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ называют граф, множество вершин которого — $Z^{**}(\mathcal{A})$, а различные вершины a и b соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$ ([1]).

Пусть $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$ с единицей $1_{\mathcal{A}}$, на которой задана операция сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Будем называть это сопряжение *правильным*, если для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ выполнено $a + \bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ и $a\bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$. Далее будем считать, что на $\mathbb{F}$-алгебре $\mathcal{A}$ задана правильная операция сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Тогда для каждого элемента $a \in \mathcal{A}$ можно определить его *действительную часть* — $\mathfrak{Re}(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$, *мнимую часть* — $\mathfrak{Im}(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$, а также *норму* — $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$.

Алгебра $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из $\mathcal{A}$ с помощью процедуры Кэли-Диксона с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, определяется как множество упорядоченных пар элементов из $\mathcal{A}$ с операциями

$$\begin{aligned} \alpha(a,b) &= (\alpha a, \alpha b); \\ (a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d); \\ (a,b)(c,d) &= (ac+\gamma\bar{d}b, da+b\bar{c}) \end{aligned}$$

и сопряжением

$$\overline{(a,b)} = (\bar{a}, -b), \qquad a,b,c,d \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{F}.$$

Можно проверить, что операция сопряжения на $\mathcal{A}\{\gamma\}$ является правильной, причём выполнено $\mathfrak{Re}((a,b)) = \mathfrak{Re}(a)$, $\mathfrak{Im}((a,b)) = (\mathfrak{Im}(a), b)$ и $n((a,b)) = n(a) - \gamma n(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$.

Алгебра контрседенионов $\hat{\mathbb{S}}$ получается применением процедуры Кэли-Диксона с параметром $\gamma = 1$ к алгебре октонионов $\mathbb{O}$ и является естественным обобщением алгебр контркватернионов $\hat{\mathbb{H}}$ и контроктонионов $\hat{\mathbb{O}}$ ([2]), графы ортогональности которых были изучены ранее. В рамках данной работы была получена следующая теорема:

Теорема 1. $Z^{**}(\hat{\mathbb{S}}) = \left\{a \neq 0 \,\middle|\, n(a) = 0\right\}$. Компоненты связности $\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})$ имеют один из двух видов:

1. полный двудольный граф, долями которого являются $(\mathbb{R}\setminus\{0\})a$ и $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\bar{a}$, где $n(a)=0$, $\mathfrak{Re}(a)\neq 0$, диаметр такой компоненты связности равен 2;

2. подграф на множестве вершин $\{a\neq 0 \mid n(a)=0, \mathfrak{Re}(a)=0\}$. Диаметр этой компоненты связности равен 5.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.Э. Гутерману.

Литература. [1] Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, Графы, определенные ортогональностью. Зап. научн. сем. ПОМИ, 428, (2014), 49–80; Переведено в J. Math. Sci. (N. Y.) 207, (2015), No 5, 698–717. [2] K. McCrimmon, A Taste of Jordan Algebras. Springer-Verlag New York, 2004.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: zhilina0sveta@gmail.com

Е. В. Зубей (Гомель, Беларусь)

О конечной группе, в которой силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Обзор о группах Шмидта представлен в [1].

Группы, в которых силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта четного порядка рассматривались в работах [2, 3]. В работе [4] указаны неабелевы композиционные факторы группы, в которой нет подгрупп Шмидта нечетного порядка.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть в группе G существует $2'$-холлова подгруппа B. Если некоторая силовская 2-подгруппа P группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B, то G либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2,7)$.

Литература. [1] В. С. Монахов, Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения. Труды Укр. матем. конгресса-2001, секция 1 (2002), 81–90. [2] В. Н. Княгина, В. С. Монахов, О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта. Труды института математики и механики УрО РАН, Т. 16, 3 (2010), 130–139. [3] В. С. Монахов, Е. В. Зубей, О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления. Труды института математики и механики УрО РАН, Т. 24, 3 (2018), 145–154. [4] В. Н. Тютянов, П. В. Бычков, Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка. Проблемы физики, математики и техники, 3 (36) (2018), 84–86.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

e-mail: ekateina.zubey@yandex.ru

Д. З. Каган (Москва)

Ширина вербальных подгрупп аномальных произведений с бесконечной циклической группой

Шириной вербальной подгруппы [1] $V(G)$ относительно множества слов V называется наименьшее число $m \in \mathcal{N}\bigcup\{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов $V^{\pm 1}$. Рассматриваются конечные собственные множества слов V, так как в противном случае ширина $V(G)$ всегда будет конечна.

Напомним, что множество слов V называется собственным, а подгруппу $V(G)-$ собственной, если $V(F_2)\neq E$ и $V(F_2)\neq F_2$.

Понятие ширины вербальных подгрупп было введено Ю. И. Мерзляковым [1] в 1967 году. Результаты для свободных произведений были получены А. Х. Ремтуллой. Было доказано, что ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ будет бесконечна в свободном произведении неединичных групп $G=A*B$, за исключением $Z2*Z2$.

В. А. Файзиевым [2] был получен результат о бесконечности ширины вербальных подгрупп в свободном произведении с объединением $A *_U B$, если $|A : U| \geq 2$, $|B :: U| \geq 3$. В последствии И.В. Добрынина [3] доказала бесконечность ширины вербальных подгрупп для свободных произведений с объединением $A *_U B$, при выполнении следующих условий: $|A : U| \geq 2$ и $|B : U| \geq 3$. И.В. Добрыниной и В.М. Безверхним [4] были также получены некоторые результаты о бесконечности ширины вербальных подгрупп в группах с двумя образующими и одним определяющим соотношением. В.Г. Бардаковым [5] доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы для HNN-расширений, где связные подгруппы отличны от базовой группы.

Р. И. Григорчук [6] установил условия бесконечности для коммутантных собственных вербальных подгрупп в свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях. Вербальная подгруппа $V(G)$ называется коммутантной, если V содержит только коммутаторные слова - слова, лежащие в коммутанте совободной группы F_n'. В работах автора [7, 8] были доказаны утверждения, продолжающие результаты Григорчука. В частности, решен вопрос об условиях бесконечности ширины собственных коммутантных вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Доказаны некоторые утверждения о коммутантных вербальных подгруппах для аномальных произведений.

В работе [9] приводится обзор полученных различными алгебраистами результатов о ширине вербальных подгрупп.

Доказательство бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп, как правило, основано на построении для рассматриваемых группах специальных функций - нетривиальных псевдохарактеров. Для произвольных вербальных подгрупп, необязательно коммутантных, этот метод неприменим. Из существования на группе G нетривиальных псевдохарактеров не следует бесконечность ширины вербальных подгрупп, порожденных не только коммутаторными словами. С помощью псевдохарактеров невозможно доказать бесконечность ширины для вербальных подгрупп, порожденных степенями x^s. Поэтому, доказательство бесконечности ширины вербальных подгрупп в общем случае не может основываться на применении псевдохарактеров.

В данной работе рассматривается ширина вербальных подгрупп для аномальных произведений, в которых одним из множителей является бесконечная циклическая подгруппа.

Напомним определение аномальных произведений, введеное С.Д. Бродским [10] в 1984 году.

Определение 1. Пусть $F = A * B$ - свободное произведение некоторых групп A и B, $w-$ циклически несократимый элемент группы F. При этом, элементы длины один (принадлежащие группам A или B) не считаются циклически несократимыми по определению. Тогда, фактор-группа $G = F/ < w^F >$ свободного произведения F по нормальному замыканию элемента w называется аномальным произведением групп и с аномалией w и обозначается $AwB, AwB = F/ < w^F >$.

В формулировках используется понятие группы, для которой выполнена теорема о свободе.

Определение 2. Пусть $C = G * G * \ldots * G/ << w >>$ — свободное произведение нескольких изоморфных копий группы B, на которое наложено одно дополнительное соотношение w, считаемое циклически несократимым. Если любая подгруппа C, порожденная всеми копиями G, за исключением одной, элементы из которой входят в дополнительное соотношение w, является свободным произведением этих копий, то говорят, что для группы G выполнена теорема о свободе.

Теорема 1. Пусть группа G равна аномальному произведению групп A и $B, G = AwB$. Пусть также группа A - бесконечная циклическая, группа B - не равна нормальному замыканию никакого своего элемента, и для группы B выполнена теорема о свободе. Пусть также сумма всех степеней порождающего свободной группы $A =< x >_\infty$, с которыми он входит в запись аномалии $w = x^{k_1}b_1 \ldots x^{k_l}b_l$, равна нулю: $\sum_{i=1}^{l} k_i = 0$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ группы G, определенной конечным множеством слов V, бесконечна относительно V.

Теорема 2. Пусть группа $G = AwB$ является аномальным произведением групп A и B, при этом группа $A =< x >_\infty$ - бесконечная циклическая, группа B - не является конечно порожденной. Пусть также сумма всех степеней порождающего $< x >$, с которыми он входит в запись аномалии $w = x^{k_1}b_1 \dots x^{k_l}b_l$, равна нулю: $\sum_{i=1}^{l} k_i = 0$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ группы G, определенной конечным множеством слов V, бесконечна относительно V.

Литература. [1] Ю. И. Мерзляков. Рациональные группы. М.: Наука, 1987. [2] V. A. Faiziev, A problem of expressibility in some amalgamated products of groups. J. Austral. Math. Soc. 71 (2001), 105–115. [3] И. В. Добрынина, Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением. Фундаментальная и прикладная математика, 15 (2009), No 1, 23–30. [4] И. В. Добрынина, В. Н. Безверхний, О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением. Труды института математики и механики УрО РАН, 7 (2001), No 2, 95–102. [5] В. Г. Бардаков, О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций. Алгебра и логика, 36 (1997), No 5, 494–517. [6] Р. И. Григорчук, Ограниченные когомологии групповых конструкций. Математические заметки, 59 (1996), No 4, 546–550. [7] Д. З. Каган, Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп. Фундаментальная и прикладная математика, 12 (2006), No 3, 55–64. [8] Д. З. Каган, Нетривиальные псевдохарактеры на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Математический сборник, 208 (2017), No 1, 80–96. [9] И. В. Добрынина, Д. З. Каган, О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп. Чебышевский сборник, 16 (2015), No 4, 150–163. [10] С. Д. Бродский, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением. Сибирский математический журнал, 25 (1984), No 2, 84–103.

ФГБУ “Научный центр по комплексным транспортным проблемам”, Российский университет дружбы народов

e-mail: dmikagan@gmail.com

О. В. Камозина (Брянск)

О максимальных спутниках Ω-канонических классов Фиттинга

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{I}$ —класс всех простых групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$; $\Omega' = \mathfrak{I}\backslash\Omega$; $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; (G) — класс всех групп, изоморфных группе G; $\mathfrak{G}_\Omega$ — класс всех конечных Ω-групп, т. е. таких групп G, для которых $K(G) \subseteq \Omega$, причем $1 \in \mathfrak{G}_\Omega$; для $A \in \mathfrak{I}$ полагают $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_{(A)}$, $A' = \mathfrak{I} \setminus (A)$. Функция $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$ принимает одинаковые значения на изоморфных группах из области определения. Через $O^\Omega(G)$ обозначается $\mathfrak{G}_\Omega$-корадикал группы G, $O^{A,A'}(G)$ – $\mathfrak{G}_A\mathfrak{G}_{A'}$-корадикал группы G. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega KR(f) = (G : O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $O^{A,A'}(G) \in f(A)$ для любой $A \in \Omega \cap K(G))$ называется Ω-каноническим или, коротко, ΩK-классом Фиттинга с Ω-спутником f. ([1,2])

$\mathfrak{F}^*$ обозначает наименьший класс Фиттинга, содержащий непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H. Класс Фиттинга называют классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. ([3])

В. А. Ведерниковым в работе [4] было получено описание максимального внутреннего Ω-спутника ΩK-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в случае, когда $\mathfrak{F}$ является классом Локетта и $\Omega \subseteq \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп. Данные ограничения можно снять, если ввести понятие ΩL-спутника.

Ω-спутник, у которого значения на группах из Ω являются классами Локетта, назовем ΩL-спутником.

Лемма. Пусть f_1 и f_2 — внутренние ΩL-спутники ΩK-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда для любой $A \in \Omega$

1) $f_1(A)\mathfrak{G}_A \subseteq \mathfrak{F}$, $f_2(A)\mathfrak{G}_A \subseteq \mathfrak{F}$;
2) $f_1(A)\mathfrak{G}_A$, $f_2(A)\mathfrak{G}_A$ — классы Локетта;
3) $f_1(A)\mathfrak{G}_A = f_2(A)\mathfrak{G}_A$.

Теорема. Пусть f — внутренний ΩL-спутник ΩK-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний ΩL-спутник h, причем $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = h(A)\mathfrak{G}_A = f(A)\mathfrak{G}_A$ для любой $A \in \Omega$.

Следствие. Пусть f — внутренний L-спутник K-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний L-спутник h, причем $h(A) = h(A)\mathfrak{G}_A = f(A)\mathfrak{G}_A$ для любой $A \in \mathfrak{I}$.

Литература. [1] V. A. Vedernikov, Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2 (2001), 217–233. [2] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. Дискретная математика, 13(3) (2001), 125–144. [3] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin - New Jork: Walter de Gruyter, 1992. [4] В. А. Ведерников, Максимальные спутники Ω-расслоенных классов Фиттинга. Алгебра и ее приложения, тезисы докладов международной конференции, Красноярск (2002), 27–28.

Брянский государственный инженерно-технологический университет
Bryansk state University of engineering and technology
e-mail: ovkamozina@yandex.ru

А. Л. Канунников (Москва)

О двух гипотезах, связанных с симметрическими функциями Джека

Симметрические функции Джека $J_\lambda^\alpha(x)$ получаются ортогонализацией Грама–Шмидта из мономиального базиса $m_\lambda(x)$ в кольце симметрических функций от $x = (x_1, x_2, \ldots)$ относительно скалярного произведения $\langle p_\lambda, p_\mu\rangle_\alpha = \alpha^{\ell(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$, где $p_\lambda(x)$ — степенной базис, $\lambda, \mu \vdash n \in \mathbb{N}$. При $\alpha = 1, 2$ функции $J_\lambda^\alpha(x)$ пропорциональны полиномам Шура и зональным полиномам соответственно. В 1996 году Гулден и Джексон [1] определили многочлены $a_{\mu\nu}^\lambda(\alpha)$ и $h_{\mu\nu}^\lambda(\alpha)$ равенствами

$$\Phi_\alpha(x,y,z,t) = \sum_\gamma \frac{J_\gamma^\alpha(x) J_\gamma^\alpha(y) J_\gamma^\alpha(z) t^{|\gamma|}}{\lambda\langle J_\gamma^\alpha, J_\gamma^\alpha\rangle_\alpha} = \sum_{n\geqslant 0} t^n \sum_{\lambda,\mu,\nu\vdash n} \frac{a_{\mu\nu}^\lambda(\alpha)}{\alpha^{\ell(\lambda)} z_\lambda} p_\lambda(x) p_\mu(y) p_\nu(z)$$

$$\Psi_\alpha(x,y,z,t) = \alpha t \frac{\partial}{\partial t} \log \Phi(x,y,z,t,\alpha) = \sum_{n\geqslant 0} t^n \sum_{\lambda,\mu,\nu\vdash n} h_{\mu\nu}^\lambda(\alpha) p_\lambda(x) p_\mu(y) p_\nu(z)$$

Они показали, что числа $a_{\mu\nu}^\lambda(1)$ и $a_{\mu\nu}^\lambda(2)$ равны количествам некоторых паросочетаний на специальных двудольных графах, а числа $h_{\mu\nu}^\lambda(1)$ и $h_{\mu\nu}^\lambda(2)$ равны количествам некоторых гиперкарт. В [1] авторы выдвинули гипотезы о существовании весовых функций $\mathrm{wt}(\delta)$ и $\vartheta(M)$ на множествах рассматриваемых паросочетаний $\{\delta\}$ и гиперкарт $\{M\}$ соответственно, таких что

$$a_{\mu\nu}^\lambda(\beta) = \sum_\delta \beta^{\mathrm{wt}(\delta)}, \quad h_{\mu\nu}^\lambda(\beta) = \sum_M \beta^{\vartheta(M)}, \text{ где } \beta = \alpha - 1.$$

Теорема 1 ([2]). Многочлены $a_{\mu\nu}^\lambda(\alpha)$ удовлетворяют гипотезе Гулдена-Джексона о паросочетаниях при $\mu, \nu = (n)$.

В работе [3] доказаны варианты обеих гипотез для паросочетаний и гиперкарт с некоторыми занумерованными компонентами. При условии, что коэффициенты многочленов $a_{\mu\nu}^\lambda(\beta)$ и $h_{\mu\nu}^\lambda(\beta)$ целочисленны, из этого ослабленного варианта вытекают сами гипотезы с помощью теоремы Холла о паросочетаниях.

Литература. [1] I. P. Goulden and D. M. Jackson. Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for Jack symmetric functions. Transactions of the American Mathematical Society, 348(3):873–892, 1996. [2] A. L. Kanunnikov and E. A. Vassilieva. On the Matchings-Jack conjecture for Jack connection coefficients indexed by two single part partitions. Electronic Journal of Combinatorics, 2016. [3] A. L. Kanunnikov, V. V.Promyslov, E. A. Vassilieva. A labelled variant of the Matchings-Jack and Hypermap-Jack conjectures. FPSAC, 2018.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

Е. А. Кириллова (Красноярск)

Обобщённая редукционная задача Мальцева о коммутативных подалгебрах алгебр Шевалле типа E_6 над полем

В 1945 году А. И. Мальцев [1] исследовал задачу описания коммутативных подгрупп наивысшей размерности во всех конечномерных комплексных простых группах Ли, применяя переход к комплексным алгебрам Ли.

Пусть $L_\Phi(K)$ — алгебра Шевалле над произвольным полем K, ассоциированная с системой корней Φ [2, 4.4]. Её нильтреугольная подалгебра $N\Phi(K)$ характеризуется базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$. Свою задачу А. И. Мальцев решил редукцией к аналогичной задаче для алгебр Ли $N\Phi(\mathbb{C})$.

В [3], наряду с обобщенной задачей Мальцева, записана

Обобщённая редукционная задача: *Описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

В рамках решения этой задачи в [4] была подтверждена гипотеза о том, что всякий коммутативный идеал наивысшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ является её коммутативной подалгеброй наивысшей размерности. Там же была поставлена следующая задача:

Описать максимальные коммутативные идеалы в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.

Через $\{r\}^+$ обозначаем множество корней $s \in \Phi^+$ таких, что в разложении корня $s - r$ по базису все коэффициенты неотрицательны. В алгебре $N\Phi(K)$ выделим подалгебру $T(r) = \langle Ke_r \mid s \in \{r\}^+\rangle$.

Теорема. Большая коммутативная подалгебра алгебры $N\Phi(K)$ типа E_6 над полем K совпадает с $T(\alpha_1)$ с точностью до графового автоморфизма.

Таким образом, для алгебры $N\Phi(K)$ типа E_6 обобщённая редукционная задача решена полностью. Также для типа E_6 получен список максимальных коммутативных идеалов.

Литература. [1] А. И. Мальцев. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли. Изв. АН СССР. Сер. матем., 9:4 (1945), с. 291–300. [2] R. Carter. Simple groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972. [3] V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 86. № 4. P. 384–388. [4] Е. А. Кириллова, Г. С. Сулейманова. Коммутативные идеалы наибольшей размерности нильтреугольной подалгебры алгебры Шевалле над полем. Тр. ИММ УрО РАН, т. 24 (2018), № 3, с. 98–108.

Сибирский федеральный университет

e-mail: kea92@bk.ru

Д. Д. Киселев (Москва)

О задаче вложения в ноттингемскую группу

Рассмотрим следующую задачу, которую в дальнейшем будем называть *задачей вложения*. Именно, пусть $\varphi\colon X \to Y$ – заданный мономорфизм конечных p-групп, а $\psi\colon X \to \operatorname{Aut} K$ – заданное вложение X в группу автоморфизмов некоторого поля K. При каких условиях существует гомоморфизм $\omega\colon Y \to \operatorname{Aut} K$, делающий следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & Y \arrow[d, "\omega"'] \\ & \operatorname{Aut} K \arrow[r, equal] & \operatorname{Aut} K \end{tikzcd} \tag{1}$$

коммутативной? Пусть в (1) $K = \mathbb{F}_p((t))$, а X, Y – конечные p-группы. В таком случае нетрудно показать (см. [1; preliminaries]), что мономорфизм ψ вкладывает X в группу $\mathcal{J}$, определяемую следующим образом

$$\mathcal{J} = \{g \in \operatorname{Aut} \mathbb{F}_p((t)) \mid t^g = t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n\}.$$

Группа $\mathcal{J}$ естественным образом изоморфна ноттингемской группе (группе Дженнингса) $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$:

$$\mathcal{J}(\mathbb{F}_p) = \{f(x) \in \mathbb{F}_p[[x]] \mid f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\},$$

групповая операция в которой – подстановка ряда в ряд. Группа $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$ обладает рядом интересных свойств, самым важным из которых, по-видимому, является универсальность: любая про-p-группа счетного ранга изоморфно вкладывается в $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$. Этот результат был впервые установлен Каминой в [1; corollary 2]. Из этого результата следует, что произвольная конечная p-группа допускает изоморфное вложение в группу $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$. Явные вложения конечных абелевых p-групп в $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$ были построены в [2] (для циклической группы порядка 4 см. также [3; 6. Elements of finite order]). Таким образом, в случае $K = \mathbb{F}_p((t))$ задача вложения (1) в классе p-групп выглядит очень осмысленной: $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$ – естественный "универсальный объект".

Мы решим задачу вложения (1) в случае $K = \mathbb{F}_p((t))$, X – циклическая группа порядка p, Y – циклическая группа порядка p^{m+1} для некоторого наперед заданного натурального m. Отметим, что такая задача очень естественно может быть сформулирована следующим образом:

Задача 1. Пусть $y_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$ – заданный элемент порядка p. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. При каких необходимых и достаточных условиях в группе $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$ разрешимо уравнение $x^{p^m} = y_0$?

Для каждого элемента $g \in \mathcal{J}$ порядка p^m можно определить *последовательность глубин* $\{d_j\}_{j=0}^{m-1} \subset \mathbb{N}$ следующим образом: $d_j = \nu_t(t^{g^{p^j}} - t) - 1$.

Рассмотрим для последовательности глубин $\{d_j\}_{j=0}^{m-1}$ функцию φ вида

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{p^t}(u - d_{t-1}) + \sum\limits_{j=1}^{t-1} \frac{1}{p^j}(d_j - d_{j-1}) + d_0, & d_{t-1} \leqslant u \leqslant d_t; \\ u, & 0 \leqslant u \leqslant d_0; \\ \frac{1}{p^m}(u - d_{m-1}) + \sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{1}{p^j}(d_j - d_{j-1}) + d_0, & d_{m-1} \leqslant u, \end{cases}$$

где, конечно, $t \leqslant m - 1$.

Лемма 1. Последовательность $\{d_j\}_{j=0}^{m-1} \subset \mathbb{N}$ тогда и только тогда является последовательностью глубин некоторого элемента $g \in \mathcal{J}$ порядка p^m, когда

$$d_{j-1} = d_{j-2} + p^{j-1}(p-1)\varphi(d_{j-2}) + p^{j-1}u_{j-2} \quad \forall\, j \in [2,\, m] \cap \mathbb{N},$$

причем $(d_0,\, p) = 1$; для каждого $j \in [2,\, m] \cap \mathbb{N}$ число $u_{j-2} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ а также если $u_{j-2} > 0$ для какого-то $j \in [2,\, m] \cap \mathbb{N}$, то $(u_{j-2},\, p) = 1$.

Теорема 1. Пусть $y_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$ – фиксированный элемент порядка p. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$, тогда в группе $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$ уравнение $x^{p^m} = y_0$ разрешимо тогда и только тогда когда существует последовательность глубин $\{d_j\}_{j=0}^{m}$, у которого d_m – глубина элемента y_0.

Теорема 1, установленная в [4], дает решение задачи 1 и задачи вложения (1) с $K = \mathbb{F}_p((t))$, $X = Z_p$, $Y = Z_{p^{m+1}}$. При этом условия разрешимости сформулированы в простых арифметических терминах (см. лемму 1).

Литература. [1] R. Camina, Subgroups of the Nottingham group. J. Algebra, 196:1 (1997), 101–113. [2] Д. Д. Киселев, Явные вложения конечных абелевых p-групп в группу $\mathcal{J}(\mathbb{F}_p)$, Матем. заметки, 97:1 (2015), 74–79. [3] S. I. Bogataya, S. A. Bogatyi, D. D. Kiselev, Powers of elements of the series substitution group $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_2)$, Topology and its applications, 201 (2016), 29–56. [4] Д. Д. Киселев, Ультраразрешимые накрытия некоторых нильпотентных групп циклической группой над числовыми полями и смежные вопросы, Изв. РАН. Сер. матем., 82:3 (2018), 69–89.

Всероссийская академия внешней торговли, г. Москва

e-mail: denmexmath@yandex.ru

В. Н. Княгина (Гомель, Беларусь), **И. К. Чирик** (Минск, Беларусь)

Конечные факторизуемые группы с обобщенно субнормальными сомножителями

Рассматриваются только конечные группы. Обозначения и терминология соответствует [1].

Пусть $\mathbb{P}$ и $\mathbb{N}$ — множество всех простых и всех натуральных чисел. Множество

$$\mathbb{P}_2^2 = \{2^i \mid i \in \{0,1,2\}\} \cup \{p^j \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{2\},\ j \in \mathbb{N}\}$$

состоит из чисел 1, 2, 4 и всех натуральных степеней нечетных простых чисел. Подгруппа H называется $\mathrm{K}\mathbb{P}_2^2$-субнормальной подгруппой группы G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$$

такая, что для каждого i либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}_2^2$, либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i.

Если в определении исключить возможность нормальности подгруппы H_{i-1} в H_i, то получаем понятие $\mathbb{P}_2^2$-субнормальности. Факторизуемые группы с $\mathbb{P}_2^2$-субнормальными сомножителями исследовались в работах [2]–[4].

Развитием результатов этих работ является следующая теорема.

Теорема. Пусть G — конечная группа и $r \in \pi(G)$. Если A и B — $K\mathbb{P}_2^2$-субнормальные r-разрешимые подгруппы G и $G = AB$, то G является r-разрешимой группой.

Литература. [1] В. С. Монахов, Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. [2] В. Н. Тютянов, В. Н. Княгина, Факторизации конечных групп r-разрешимыми подгруппами с заданными вложениями. Укр. мат. журнал, 55, № 10 (2014), 1431–1435. [3] V. Monakhov, V. Kniahina, Finite factorised groups with partially solvable $\mathbb{P}$-subnormal subgroups. Lobachevskii Journal of Mathematics, 36, № 4 (2015), 441–445. [4] И. К. Чирик, Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathrm{K}\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами. Матем. заметки. 99, № 1 (2016), С. 97–101.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
Университет гражданской защиты МЧС Беларуси

e-mail: knyagina@inbox.ru,
chyrykira@mail.ru

И. Б. Кожухов (Москва), **К. А. Колесникова** (Москва)

О хопфовости полигонов над группами

Универсальная алгебра A называется хопфовой, если всякий сюръективный эндоморфизм $\varphi : A \to A$ является автоморфизмом. Хопфовость является условием конечности, так как все конечные алгебры, очевидно, хопфовы. В работе [1] В.К.Карташов доказал, что все ко-нечно порождённые коммутативные полигоны над полугруппой являются хопфовыми. Цель данной работы – найти условия хопфовости унитарного полигона над группой.

Напомним, что *полигоном над полугруппой* называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s \in S$ (см. [2]). Следует отметить, что полигон над полугруппой является алгебраической моделью абстрактного *автомата*. Кроме того, понятие полигона фактически тождественно понятию *унарной алгебры*, т.е. алгебры, у которой все операции сигнатуры унарны (операциями полигона X являются отображения $x \mapsto xs$ для фиксированного

$s \in S$). Пусть S – полугруппа с единицей e, тогда полигон X называется *унитарным*, если $xe = x$ для всех $x \in X$. Если полигон X представим в виде объединения попарно не пересекающихся подполигонов X_i ($i \in I$), то мы будем называть X *копроизведением* полигонов X_i и писать $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$.

Пусть G – группа и H – её подгруппа (не обязательно нормальная). Обозначим через G/H множество всех правых смежных классов Hg. Множество G/H является унитарным полигоном над группой G относительно действия $Hg \cdot g' = Hgg'$. Нетрудно проверить, что циклические унитарные полигоны над группой G – это в точности полигоны, изоморфные полигонам вида G/H, где H – подгруппа группы G, а произвольный унитарный полигон над группой G изоморфен полигону вида $\coprod\limits_{i \in I}(G/H_i)$, где $\{ H_i | \, i \in I\}$ – семейство подгрупп группы G. Неунитарные полигоны над группой были описаны в [3].

Предложение 1. Пусть $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$ – полигоны над полугруппой S. Если полигон X – хопфов, то каждый X_i также хопфов.

Отметим, что обратное к предложению 1 неверно в общем случае, но будет истинным для конечно порожденного полигона над группой. Об этом говорит следующеая лемма.

Лемма 1. Полигон $X = G/H_1 \sqcup \ldots \sqcup G/H_n$ хопфов в том и только в том случае, когда для любого $i = 1 \ldots n$ и любого $a \in G$ включение $H_i \subseteq a^{-1}H_i a$ влечет равенство $H_i = a^{-1}H_i a$.

Отметим, что в бесконечной группе G возможно наличие подгрупп H таких, что имеет место строгое включение $H \subset a^{-1}Ha$ (см. §11 монографии [4]).

Перейдем к рассмотрению произвольного унитарного полигона X над группой. Ранее было отмечено, что $X \cong \coprod\limits_{i \in I}(G/H_i)$. На семестве подгрупп $\mathscr{H} = \{ H_i | \, i \in I\}$ введем отношение $\preccurlyeq$, полагая $H_i \preccurlyeq H_j$, если существует $a \in G$ такое, что $H_i \subseteq a^{-1}H_j a$. Ясно, что $\preccurlyeq$ – отношение квазипорядка на $\mathscr{H}$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие хопфовости произвольного унитарного полигона над группой.

Теорема 1. Пусть X – унитарный полигон над группой G, $X \cong \coprod\limits_{i \in I} X_i$, где $X_i = G/H_i$. Квазипорядок $\preccurlyeq$ на $\mathscr{H} = \{ H_i | \, i \in I\}$ имеет тот же смысл, что и выше. Тогда полигон X хопфов, если и только если выполняются следующие условия:

1. Среди бесконечных в обе стороны цепочек $\ldots \preccurlyeq H_{i_{-1}} \preccurlyeq H_{i_0} \preccurlyeq H_{i_1} \preccurlyeq \ldots$ для любых целых j, k ($j \neq k$) H_j и H_k не совпадают как элементы семейства $\mathscr{H}$.

2. Для всех бесконечных цепочек, удовлетворяющих условию 1 для любого $k \in \mathbb{Z}$ и $\forall a \in G$ выполняется условие:
$$H_{i_k} \subseteq a^{-1}H_{i_{k+1}}a \Rightarrow H_{i_k} = a^{-1}H_{i_{k+1}}a$$

3. Для всех конечных цепочек вида $H_{i_1} \preccurlyeq H_{i_2} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq H_{i_{n=0}} \preccurlyeq H_{i_1}$, для любого $k \in \mathbb{Z}_n$ и $\forall a \in G$ выполняется условие:
$$H_{i_k} \subseteq a^{-1}H_{i_{k+1}}a \Rightarrow H_{i_k} = a^{-1}H_{i_{k+1}}a$$

Литература. [1] Карташов В.К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр. Дискретная матем., 2008, т. 20, вып. 4, с. 79-84. [2] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. Berlin – New York: W. de Gruyter, 2000. [3] Максимовский М.Ю. О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами. Мат. заметки, 2010, т. 87, № 6, с. 855-866. [4] Курош А.Г. Теория групп. М., “Наука”, 1967.

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», МГУ им. М.В.Ломоносова

e-mail: kozhuhov_ i_ b@mail.ru

Н. А. Колегов (Москва)

Полукоммутирующие системы образующих матричных алгебр инцидентности

Полукоммутативность впервые была рассмотрена в контексте банаховых решеток в работе [2]. Впоследствии аналогичная конструкция была применена к вещественным матрицам [4]. Две матрицы A и B полукоммутрируют, если их коммутатор $[A, B] = AB - BA \geq 0$, т.е. он неотрицателен относительно поэлементного порядка. Известно несколько точных оценок на размерность алгебры, порожденной семейством неотрицательных полукоммутирующих матриц [4], [3]. В частности, размерность алгебры, порожденной парой таких матриц не превосходит $n(n+1)/2$ [4]. В связи с этим в работе [4] была сформулирована следующая проблема.

Вопрос 1. [4] Дано натуральное $n \geq 2$ и $n \leq k \leq n(n+1)/2$. Верно ли, что существуют неотрицательные полукоммутирующие $n \times n$ матрицы A и B такие, что размерность порожденной ими алгебры с единицей равна в точности k?

В докладе сообщается о положительном решении этой проблемы. В качестве искомых пар матриц можно взять образующие некоторых вещественных матричных алгебр инцидентности.

Алгебры инцидентности были введены в 1960-х годах и впоследствии активно исследовались (см. монографию [6] и ее библиографию). Они представляют собой алгебры функций, построенные над некоторым частично упорядоченным множеством $(S, \preceq)$. Если это множество конечно, то можно считать, что $S = \{1, \ldots, n\}$, и тогда алгебра изоморфна алгебре $n \times n$ матриц с базисом из матричных единиц $\{E_{ij} \mid i \preceq j\}$. Системы порождающих таких алгебр изучались в [1], [5]. В докладе будет представлен следующий новый результат.

Теорема 1. Всякая матричная алгебра инцидентности над $\mathbb{R}$ может быть порождена двумя неотрицательными полукоммутирующими матрицами.

С использованием этой теоремы и конструктивного построения матричных алгебр инцидентности необходимых размерностей удается получить положительное решение поставленной проблемы.

Теорема 2. Для натуральных $n \geq 2$ и $n \leq k \leq n(n+1)/2$ существуют неотрицательные полукоммутирующие $n \times n$ матрицы A и B такие, что они порождают матричную алгебру размерности k.

Докладчик выражает благодарность своему научному руководителю О. В. Марковой за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература. [1] Н. А. Колегов, О. В. Маркова, Системы порождающих матричных алгебр инцидентности над конечными полями. Зап. научн. сем. ПОМИ, 472 (2018), 120-144. [2] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, An Invitation to Operator Theory. Graduate Studies in Mathematics, 2002. [3] R. Drnovšek, On algebras generated by positive operators. Positivity, 22:3 (2018), 815–828. [4] M. Kandić, K. Šivic, On the dimension of the algebra generated by two positive semi-commuting matrices. Linear Algebra Appl., 512 (2017), 131-161. [5] W. E. Longstaff, Peter Rosenthal, Generators of matrix incidence algebras. Australas. J. Comb., 22 (2000), 117-121. [6] E. Spiegel, C. J. O'Donnel, Incidence algebras. Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, 1997.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: na.kolegov@yandex.ru

П. С. Колесников (Новосибирск)

Квадратичные конформные алгебры и алгебры Пуассона

В работе И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [1] были введены несколько классов неассоциативных алгебр, связанных с формализацией вариационного исчисления. Эти алгебраические системы известны как *алгебры Новикова* (они независимо возникли в работе А. А. Балинского и С. П. Новикова [2] как инструмент для классификации линейных скобок Пуассона гидродинамического типа), *алгебры Новикова — Пуассона* и *биалгебры Гельфанда — Дорфман.*

Согласно определению, алгебра Новикова — это линейное пространство A с билинейной операцией $\circ : A \times A \to A$, удовлетворяющей следующим тождествам:

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c), \tag{1}$$

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b. \tag{2}$$

Биалгеброй Гельфанда — Дорфман (термин предложен в [3]) называется система $(A, \circ, [\cdot, \cdot])$ с двумя билинейными операциями, такая что $(A, \circ)$ — алгебра Новикова, $(A, [\cdot, \cdot])$ — алгебра Ли и выполняется следующее тождество:

$$[a, b \circ c] - [c, b \circ a] + [b, a] \circ c - [b, c] \circ a - b \circ [a, c] = 0. \tag{3}$$

Чтобы избежать пересечений с понятием биалгебры как алгебры с коумножением, мы будем называть биалгебры Гельфанда — Дорфман *GD-алгебрами.*

Структура GD-алгебры оказалась эквивалентной структуре квадратичной конформной алгебры Ли [3]. Первоначально возникшие в теории вертексных операторов ([4]), конформные алгебры и их обобщения (псевдоалгебры) нашли приложение в описании скобок Пуассона гидродинамического типа [5].

Именно, если V — GD-алгебра над полем $\mathbb{C}$, то правило

$$[u_{(\lambda)} v] = [u, v] + \partial(v \circ u) + \lambda(u \circ v + v \circ u), \quad u, v \in V, \tag{4}$$

определяет таблицу умножения конформной алгебры Ли на $L = \mathbb{C}[\partial] \otimes V$.

Мы покажем, что правило (4) на самом деле определяет структуру *конформной алгебры Пуассона.* Последнее понятие связывает такие классы структур, как алгебры Новикова, конформные алгебы Ли, алгебры Пуассона, и позволяет с единой точки зрения взглянуть на ряд известных конструкций в этих областях.

Литература. [1] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. Функц. анализ и его прил., 13 (4) 1979, 13–30. [2] А. А. Балинский, С. П. Новиков. Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли. ДАН СССР, 283 (5) (1985), 1036–1039. [3] X. Xu. Quadratic conformal superalgebras. J. Algebra, 231 (1) (2000), 1–38. [4] В. Г. Кац. Вертексные алгебры для начинающих. М.: МЦНМО, 2005. [5] B. Bakalov, A. D'Andrea, V. G. Kac. Theory of finite pseudoalgebras. Adv. Math. 162 (1) (2001), 1–140.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

e-mail: pavelsk@math.nsc.ru

Е. И. Компанцева, **Т. К. Ч. Нгуен** (Москва)

Кольца на сепарабельных абелевых группах без кручения

Ассоциативное кольцо называется филиальным, если в нем отношение «быть идеалом» транзитивно. Филиальные кольца изучались многими алгебраистами (см., например, [1-3]), в связи с этим в [4] сформулирована проблема изучения абелевых групп G, таких что любое ассоциативное кольцо на G филиально. Эти группы называют TI-группами. Очевидно, любое ассоциативное кольцо с нулевым умножением филиально, поэтому каждая абелева нильгруппа, т.е. группа, допускающая только нулевое умножение, является TI-группой.

В настоящей работе описаны TI-группы в классе сепарабельных абелевых групп без кручения. Согласно [5], абелева группа без кручения G называется сепарабельной, если каждое конечное подмножество элементов из G содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемым группы G. Очевидно, класс сепарабельных абелевых групп содержит все вполне разложимые группы.

Пусть G – абелева группа без кручения. Для произвольного типа t определены две вполне характеристических подгруппы группы G:

$$G(t) = \{g \in G \mid t(g) \geq t\} \quad \text{и} \quad G^*(t) = \langle g \in G \mid t(g) > t \rangle,$$

здесь $t(g)$ – тип элемента g. Пусть A – сервантная подгруппа группы G. Элемент $g \in G \setminus A$ назовем собственным относительно A, если $\chi_G(g) \geq \chi_G(g+a)$ для всех $a \in A$, где $\chi_G(g)$ – характеристика элемента g в группе G. Это условие равносильно тому, что $\chi_G(g) = \chi_{G/A}(g+A)$. Элемент $g \in G$ назывется примитивным типа t [6], если $g \in G(t) \setminus G^*(t)$ и g – собственный элемент относительно $G^*(t)$. Говорят, что множество $\{g_1, \cdots, g_n\}$ примитивно, если его члены примитивны и имеют различные типы.

Теорема. Сепарабельная абелева группа G является TI-группой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий
1) G – группа ранга 1;
2) для любого примитивного множества $\{g_1, \cdots, g_n\}$ выполняется

$$t(g_i) \cdot t(g_j) \nleq t(g_k)$$

при всех $i, j, k \in \{1, \cdots, n\}$ (среди которых могут быть совпадающие).

Из данной теоремы следует, что для сепарабельных абелевых групп, ранг которых больше 1, класс TI-групп совпадает с классом ниль-групп, при этом все такие группы редуцированы.

Литература. [1] G. Ehrlich Filial rings. Portugal. Math, 42 (1983-1984), 185–194. [2] A. D. Sands On ideals in over-rings. Publ. Math. Debrecen, 35(1988), 273–279. [3] M. Filipowicz, E. R. Puczylowski On filial and left filial rings. Publ. Math. Debrecen, 66(2005), 257–267. [4] R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz On TI-groups. Recent Results in Pure and Applied Mathematics, Podlasie, 2014, 33–41. [5] L. Fuchs Abelian groups. Switz.: Springer International Publishing, 2015. [6] R. Baer Abelian groups without elements of finite order. Duke Math. J., 3 (1937), 68–122.

МПГУ, Финансовый университет при Правительстве РФ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru, trangnguyen.ru@gmail.com

А. В. Кондратьева (Нижний Новгород)

Неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли характеристики 2 от 3-х переменных

Класс гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2 с простейшей симметричной скобкой Пуассона был построен в 1993 году Lei Lin [1]. Позднее были введены симметричные гамильтоновы формы в разделенных степенях. В работе рассмотрены неальтернирующие гамильтоновы формы от трех переменных с коэффициентами из алгебры разделенных степеней $\mathcal{O}_3(\mathcal{F})$(см. [2]). Показано, что преобразованиями, не меняющими флаг $\mathcal{F}$, форму можно привести одному из следующих видов: (здесь $\overline{x_i} = x_i^{(2^{m_i}-1)}$)

(1) $\omega_1 = dx_1dx_2 + dx_3^{(2)} + a\overline{x_1}\overline{x_3}dx_1dx_3 + \delta_a^0 b\overline{x_2}\overline{x_3}dx_2dx_3$, при этом, если m_3 (высота x_3) больше 1, то $a = b = 0$;

(2) $\omega_2 = dx_1^{(2)} + dx_2^{(2)} + dx_3^{(2)} + a\overline{x_1}\overline{x_2}dx_1dx_2 + b\overline{x_1}\overline{x_3}dx_1dx_3$, при этом, если высота хотя бы одной из переменных больше 1, то $a = b = 0$;

(3) $\omega_3 = dx_1dx_2 + dx_2^{(2)} + dx_3^{(2)} + a\overline{x_1}\overline{x_2}dx_1dx_2 + b\overline{x_1}\overline{x_3}dx_1dx_3$, при этом, если высота x_1 или x_3 больше 1, то $a = b = 0$.

Также автор рассмотрел неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли, соответствующие данным формам:

Теорема 1. Если $m_3 > 1$ или $(a, b) \neq (0, 0)$, то $P(3, \overline{m}, \omega_1)$ – простая алгебра размерности $2^m - 1$. Если $m_3 = 1$, $a = b = 0$ и $(m_1, m_2) \neq (1, 1)$, то коммутант $[P(3, \overline{m}, \omega_1), P(3, \overline{m}, \omega_1)]$ – простая алгебра размерности $2^m - 2$.

Теорема 2. $P(3, \overline{m}, \omega_2)$ – простая алгебра размерности $2^m - 1$ при $\overline{m} \neq \overline{1}$ или при $(a, b) \neq (0, 0)$.

Теорема 3. Если $(m_1, m_3) \neq (1, 1)$ или $(a, b) \neq (0, 0)$, то $P(3, \overline{m}, \omega_3)$ – простая алгебра размерности $2^m - 1$. Если $(m_1, m_3) = (1, 1)$, $a = b = 0$ и $m_2 \neq 1$, то коммутант $[P(3, \overline{m}, \omega_3), P(3, \overline{m}, \omega_3)]$ – простая алгебра размерности $2^m - 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-01-00900/а.

Литература. [1] L. Lin, Non-alternating Hamiltonian algebra P(n, m) of characteristic 2. Comm. Alg., (21) (1993), 399–411. [2] А. И. Кострикин, И. Р. Шафаревич. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики. Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – т.33. – №2. – с.251–322.

Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского

e-mail: alisakondr@mail.ru

С. С. Коробков (Екатеринбург)

О решёточных изоморфизмах базисных колец

Рассматриваются ассоциативные кольца. Следуя [1, стр. 190] назовем конечное кольцо R с единицей *базисным* кольцом, если факторкольцо $R/\mathrm{Rad}\,R$ разложимо в прямую сумму конечных полей. Базисные кольца играют важную роль в теории конечных колец. Согласно [2, теорема 4.4] конечное кольцо R с единицей тогда и только тогда является базисным кольцом, когда R представимо в виде: $R = S \dotplus N$ (групповая прямая сумма), где $S = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, R_i — локальное подкольцо кольца R ($i = \overline{1,n}$), N — (S,S)-модуль из $\mathrm{Rad}\,R$. Число n называется *высотой* базисного кольца R. При $n = 1$ кольцо R является локальным кольцом. Коммутативные конечные кольца с единицей также являются базисными кольцами.

Обозначим решётку всех подколец кольца R через $L(R)$. Два кольца R и R' назовем *решёточно изоморфными,* если изоморфны их решётки подколец $L(R)$ и $L(R')$. Решёточный изоморфизм $L(R) \cong L(R')$ обозначим буквой φ и будем называть проектированием кольца R на кольцо R', кольцо R' переобозначим как R^φ.

Пусть R — базисное кольцо и φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Выясняется следующий

Вопрос: При каких условиях кольцо R^φ будет базисным кольцом?

Если базисное кольцо разложимо в прямую сумму колец, то каждое прямое слагаемое является базисным кольцом. Приведем пример неразложимого базисного кольца, решёточно изоморфного кольцу, не являющемуся базисным кольцом.

Пример 1. Определим два кольца: $R = (\langle e_1\rangle \oplus \langle e_2\rangle) \dotplus \langle r\rangle$, где $e_i^2 = e_i$ $(i = 1,2)$, $r^2 = 0$, $e_1r = re_2 = r$, $re_1 = e_2r = 0$, $2R = \{0\}$, и $R' = \langle e_1\rangle \oplus (\langle e_2\rangle \dotplus \langle r\rangle)$, где $e_i^2 = e_i$ $(i = 1,2)$, $r^2 = 0$, $re_2 = r$, $e_2r = 0$, $2R' = \{0\}$. Легко проверяется, что подкольца колец R и R' состоят из одних и тех же элементов и потому кольца R и R' решёточно изоморфны. Базисное кольцо R является неразложимым кольцом, так как не содержит собственных центральных идемпотентов, а кольцо R' не является базисным, так как не содержит единичного элемента.

Проектирования некоторых видов базисных колец рассматривались в работах [3] – [7]. Приведём новые результаты.

Предложение 1. Пусть $R = F_1 \oplus (F_2 \dotplus N)$, где $F_i \cong GF(p^{k_i})$, $k_i > 1$ $(i = 1,2)$, N — ненулевое конечное нильпотентное кольцо, единица поля F_2 является единицей в подкольце $F_2 \dotplus N$. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда $R^\varphi = F_1^\varphi \oplus (F_2^\varphi \dotplus N^\varphi)$ — кольцо характеристики p, F_1^φ и F_2^φ — конечные поля, единица поля F_2^φ является единицей в подкольце $F_2^\varphi \dotplus N^\varphi$, N^φ — нильпотентное кольцо.

Предложение 2. Пусть $R = (F_1 \oplus F_2) \dotplus N$, где $F_i \cong GF(p^{k_i})$, $k_i > 1$ $(i = 1,2)$, N — ненулевое конечное нильпотентное кольцо. Пусть единица e_1 поля F_1 является левой единицей в кольце R, а единица e_2 поля F_2 является правой единицей в кольце R. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда $R^\varphi = (F_1^\varphi \oplus F_2^\varphi) \dotplus N^\varphi$ — p-кольцо где F_i^φ — конечное поле, N^φ — нильпотентное кольцо и либо единица e_1' поля F_1^φ является левой единицей в кольце R^φ, а единица e_2' поля F_2^φ является правой единицей в кольце R^φ, либо наоборот e_1' — правая, а e_2' — левая единицы в кольце R^φ.

Теорема 1. Пусть базисное кольцо R простой характеристики p определено следующим образом: $R = (F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) \dotplus N$, где $n > 1$, $F_i \cong GF(p^{k_i})$, $k_i > 1$ $(i = \overline{1,n})$, $N = \mathrm{Rad}\,R$. Пусть φ —

решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Тогда R^φ — базисное кольцо характеристики p, причём $R^\varphi = (F_1^\varphi \oplus \cdots \oplus F_n^\varphi) \dotplus N^\varphi$, где, $F_i^\varphi \cong GF(p^{m_i})$, $m_i > 1$, $(i = \overline{1,n})$, $N^\varphi = \operatorname{Rad} R^\varphi$.

Теорема 2. Пусть базисное p-кольцо R определено следующим образом: $R = (K_1 \oplus \cdots \oplus K_n) \dotplus N$, где $n > 1$, $K_i \cong GR(p^{k_i}, m_i)$, $k_i > 1, m_i > 1$ $(i = \overline{1,n})$, $K_n \dotplus N$ — локальное подкольцо кольца R, N — аддитивная подгруппа из $\operatorname{Rad} R$. Пусть φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Тогда R^φ — базисное p-кольцо, причём $R^\varphi = (K_1^\varphi \oplus \cdots \oplus K_n^\varphi) \dotplus N'$, где, $K_i^\varphi \cong K_i$, $(i = \overline{1,n})$, $K_n' \dotplus N'$ — локальное подкольцо кольца R^φ, N' — аддитивная подгруппа из $\operatorname{Rad} R^\varphi$.

Литература. [1] B. R. McDonald, Finite rings with identity, New York, Marcel Dekker, 1974. [2] В. П. Елизаров, Конечные кольца. Основы теории. — Москва: Гелиос. [3] С. С. Коробков, Решёточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов // Изв. Урал. гос. ун-та, 2002, № 22, Матем. и механ., Вып. 4. С. 81—93. [4] С. С. Коробков, Проектирования колец Галуа // Алгебра и логика, 54, № 1 (2015). С. 16—33. [5] С. С. Коробков, Проектирования конечных однопорождённых колец с единицей // Алгебра и логика, 55, № 2 (2016). С. 192—218. [6] С. С. Коробков, Проектирования конечных коммутативных колец с единицей // Алгебра и логика, 57, № 3 (2018). С. 285—305. [7] С. С. Коробков, Проектирования конечных локальных колец // Международная конференция "Мальцевские чтения-18": тезисы докладов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 19–22 ноября 2018 г.) — Новосибирск, 2018. С. 155.

Уральский государственный педагогический университет

e-mail: ser1948@gmail.com

Ю. В. Кочетова (Москва)

О бесконечно малых элементах при линейных $\mathcal{K}$-порядках на алгебрах

Пусть на алгебре $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ над частично упорядоченным полем F задан порядок $\leqslant$, относительно которого A является упорядоченным векторным пространством над полем F (см. [1]). Данная терминология является общепринятой для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [3]).

Будем говорить, что при данном порядке элемент $b \in A$ *бесконечно мал* относительно элемента $a \in A$ $(0 < a)$ и писать $b \ll a$, если $\gamma b \leqslant a$ для всех $\gamma \in F$. Если рассматриваемый порядок $\leqslant$ на A таков, что

$$\text{из } a > 0 \text{ следует } ab \ll a \text{ и } ba \ll a \text{ для всех } b \in A,$$

то говорят (см., например, [2]), что на алгебре A определён $\mathcal{K}$-*порядок* $\leqslant$, а алгебру A над полем F называют $\mathcal{K}$-*упорядоченной алгеброй.*

Пусть A — $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над полем F, $\mathcal{K}$-порядок которой является линейным, то есть A — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра. Рассмотрим два типа порядка на поле F — частичный и линейный.

Теорема. Для любых элементов $x, y, z, s, t \in A$, $t > 0$ и $\alpha \in F$ справедливы следующие соотношения:

1) если порядок на поле F частичный, то

$$x \not\ll x \text{ и } x^n \ll x \text{ для } x > 0 \text{ и любого } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2;$$
$$\text{из } x \ll y \text{ и } y \ll z \text{ следует } \alpha x \ll y \text{ и } x \ll z \text{ для } y, z > 0;$$
$$|xy| \ll x \text{ и } |yx| \ll x \text{ для } x > 0;$$
$$\text{если } y \ll x \text{ и } z \ll x \text{ и } x > 0, \text{ то } y \pm z \ll x \text{ и } ys \ll x.$$

2) если порядок поля F является линейным, то

$$\text{если } y \ll t \text{ и } z \ll t, \text{ то } y \vee z \ll t \text{ и } y \wedge z \ll t;$$
$$y \ll t \text{ тогда и только тогда, когда } |y| \ll t;$$
$$\text{если } y \ll t \text{ и } z \ll t, \text{ то из } y \leqslant s \leqslant z \text{ следует } s \ll t;$$
$$\text{из } z \ll t \text{ следует } z \ll y \text{ для элемента } y > 0 \text{ такого, что } y \not\ll t;$$
$$\text{если } y \ll t \text{ и } |z| \leqslant |y|, \text{ то } |z| \ll t \text{ и } z \ll t;$$
$$J_t = \{a \in A \mid a \ll t\} - \text{ собственный } l\text{-идеал алгебры } A.$$

Литература. [1] Г. Биркгоф. Теория решеток. М.: Наука, 1984. [2] Ю. В. Кочетова, Е. Е. Ширшова, Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр. Фундаментальная и прикладная математика, 18:1 (2013), 85–158. [3] Л. Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.

Московский педагогический государственный университет

e-mail: jkochetova@mail.ru

Е. М. Крейнес (Москва)

О числе точек пространства $M_{0,n}(F_q)$

Доклад основан на совместной работе с Н.Я. Амбург и Г.Б. Шабатом.

Исследовано число точек компактификации Делиня-Мамфорда пространства модулей алгебраических кривых рода 0 с n отмеченными точками над конечным полем. Доказано, что оно удовлетворяет рекуррентной формуле для многочленов Пуанкаре соответствующего комплексного пространства.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: elena_msu@mail.ru

Д. К. Кудрявцев (Москва)

Длина йордановых алгебр

Изучение длины алгебры как ее фундаментального инварианта началось в конце 20 века с работ [1,2], где изучаются свойства длины для ассоциативных, а именно матричных, алгебр. Основные результаты связанные с неассоциативными алгебрами и их длинами, а также методами их изучения, будут опубликованы в работе [3].

Рассмотрим конечномерную не обязательно ассоциативную алгебру с единицей A над полем $\mathbb{F}$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечный набор ее элементов.

Словом длины k для этой системы называется произведение $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$ с произвольным порядком выполнения умножений, где $i_m \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $L_k(S)$ линейную оболочку над $\mathbb{F}$ всех слов длины не более k.

Говорят, что система элементов $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *порождает алгебру* A, если существует k, такое что $L_k(S)$ совпадает с A. Самое маленькое такое k называется *длиной* данной системы.

Длиной алгебры A называется максимальная длина системы среди всех конечных систем, порождающих A.

Йордановы алгебры, введенные в 1933 году в работе Паскаля Йордана для рассмотрения вопросов связанных с квантовой механикой, - это не обязательно ассоциативные алгебры, в которых для любых двух элементов x, y выполненяются следующие тождества:

1. $xy = yx$.
2. $(x^2y)x = x^2(yx)$.

Свойства данного класса алгебр, а также связанных с ним структур, изучаются в работе [4]. В частности, научный интерес представляет подкласс *формально действительных* (eng.

formally real) йордановых алгебр. Известна классификация конечномерных алгебр этого подкласса: они представляют собой прямую сумму алгебр нескольких типов - эрмитовых матриц $H_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ может быть действительными числами, комплексными числами, октонионами и кватернионами (в последнем случае $n \leq 3$), а также так называемыми "spin factor" - алгебрами $Spin(n)$.

Утверждение 1. $l(Spin(n)) = 1$.

Утверждение 2. $l(H_3(\mathbb{R})) = 3$.

Литература. [1] Papacena, C.J. An Upper Bound for the Length of a Finite-Dimensional Algebra, Journal of Algebra, 1997, Vol. 197, pp. 535-545. [2] A. Paz, An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in severalvariables, Linear Multilinear Algebra 15 (1984) 161–170. [3] A.E. Guterman, D.K. Kudryavtsev, Upper bounds for the length of non-associative algebras, arXiv:1902.08389 [math.CO], February 2019. [4] McCrimmon K., A Taste of Jodran Algebras, 2004

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: kdk97@rambler.ru

В. Д. Мазуров (Новосибирск)

Обобщённые группы Фробениуса

Доклад посвящён обобщённым группам Фробениуса, то есть конечным группам G, содержащим такую собственную нетривиальную нориальную подгруппу F, что для любого элемента Fx простого порядка из фактор-группы G/F порядки всех элементов из смежного класса Fx группы G по F одинаковы. Примерами таких групп служат группы Фробениуса, где в качестве F выступает ядро Фробениуса, а также так называемые группы Камины, введённые Аланом Каминой в конце 70-х годов прошлого века и подробно описанные рядом известных специалистов к 2010-му году.

В докладе описывается нормальное строение обобщённых групп Фробениуса, в частности их неабелевы композиционные факторы. Они исчерпываются двумерными простыми линейными группами и группами Сузуки.

Результаты получены совместно с А.Х. Журтовым и Д.В. Лыткиной и поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований в рамках научного проекта 19-01-00507.

Институт математики СО РАН

e-mail: mazurov@math.nsc.ru

А. М. Максаев (Москва)

Сохранение множества λ-скрамблинг матриц

В 2009 году Акельбек и Киркланд в статье [1] ввели понятие скрамблинг-индекса неотрицательной примитивной матрицы A порядка n. Согласно их определению, скрамблинг-индекс равен наименьшему натуральному k такому, что A^k —- скрамблинг-матрица, где скрамблинг-матрицей называется такая матрица, для любых 2 строк которой найдется столбец, на пересечении с которым в этих строках находятся лишь положительные числа. Скрамблинг-индекс связан с известным коэффициентом Добрушина (или Δ-коэффициентом), который применяется, например, для исследования ряда свойств цепей Маркова (см. [2]).

В 2010 году Хуанг и Лиу в работе [3] обобщили понятие скрамблинг-индекса и скрамблинг-матрицы, заменив число 2 в предыдущем определении на произвольное натуральное $\lambda \leq n$. Данное обобщение было мотивировано приложениями в теории коммуникаций при рассмотрении системы связей без памяти.

При исследовании обобщенного скрамблинг-индекса ключевую роль играют λ-скрамблинг матрицы. Таким образом, полезно понимать, как устроено множество λ-скрамблинг матриц при каждом $\lambda \leq n$. В этом может помочь изучение отображений матриц, удовлетворяющих алгебраическим свойствам и сохраняющих это множество.

В докладе будет представлены результаты, описывающие аддитивные отображения матриц над полукольцом $\mathbb{B}$ в себя, сохраняющие множество λ-скрамблинг матриц. Также будут представлены обобщения этих результатов на произвольные антинегативные полукольца $\mathbb{S}$ с единицей без делителей нуля. Примером такого результата может служить следующая теорема (см. [4, Theorem 2.20]).

Теорема 1. Пусть $n \geq 3$, $1 < \lambda < n$. Пусть $T\colon M_n(\mathbb{B}) \to M_n(\mathbb{B})$ — аддитивное биективное отображение, сохраняющие множество λ-скрамблинг матриц (то есть такое, что образом любой λ-скрамблинг матрицы является λ-скрамблинг матрица). Тогда T имеет вид $T(A) = PAQ$ для некоторых фиксированных перестановочных матриц P и Q.

Доклад основан на совместной работе с А. Э. Гутерманом. Работа выполнена при поддержке РНФ, грант №17-01-01124.

Литература. [1] M. Akelbek, S. Kirkland. Coefficients of ergodicity and scrambling index, Linear Algebra Appl. 430 (2009) 1111-1130. [2] E. Seneta. Nonnegative Matrices and Markov Chains, Springer-Verlag, New York, 1981. [3] Y. Huang, B. Liu. Generalized scrambling indices of a primitive digraph, Linear Algebra Appl. 433 (2010) 1798–1808. [4] A. E. Guterman, A. M. Maksaev. Preserving λ-scrambling matrices. Fundamenta Informaticae 162 (2018) 119–141.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: artmak95@mail.ru

В. Т. Марков (Москва), **А. А. Туганбаев** (Москва)

Конструкции колец с существенным центром

Все рассматриваемые кольца – ассоциативные кольца с ненулевой единицей. Все рассматриваемые алгебры – алгебры над произвольным фиксированным полем F. Пусть $C(R)$ обозначает центр кольца R, $J(R)$ – радикал Джекобсона и $N(R)$ – первичный радикал кольца R, соответственно.

Кольцо R с центром C называется *центрально существенным*, если R_C – существенное расширение модуля C_C, т.е. для любого ненулевого элемента $a \in R$ существуют такие ненулевые элементы $x, y \in C$, что $ax = y$. Центрально существенные кольца изучались, например, в [1] и [2]. В этих работах, в числе других утверждений, показано, что полупервичные центрально существенные кольца коммутативны и все идемпотенты произвольного центрально существенного кольца принадлежат его центру, но произвольные центрально существенные кольца не обязательно коммутативны.

В работе [2] доказано следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть R – центрально существенное кольцо. Тогда для любого коммутативного моноида G моноидное кольцо RG центрально существенно. В частности, кольцо многочленов $R[x]$ центрально существенно.

Естественно задать вопрос: будет ли центрально существенным кольцо формальных степенных рядов (или формальных рядов Лорана) над произвольным центрально существенным кольцом? Частичный ответ на этот вопрос даёт

Теорема 1. Если R – конечномерная центрально существенная алгебра, то равносильны условия:

(1) R – центрально существенное кольцо;

(2) Кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ центрально существенно;

(3) Кольцо формальных рядов Лорана $R((x))$ центрально существенно.

Легко видеть, что эквивалентность условий (2) и (3) теоремы 1 легко выводится из следующего простого замечания.

Предложение 2. Пусть R – кольцо и Q – кольцо частных кольца R по некоторой центральной мультипликативной системе неделителей нуля. Тогда R является центрально существенным кольцом в точности тогда, когда Q – центрально существенное кольцо.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна, а обратная импликация вытекает из следующих двух более общих утверждений:

Предложение 3. Пусть S – подкольцо кольца R, причём существует базис модуля R_S, лежащий в $C(R)$. Если S – центрально существенное кольцо, то и R – центрально существенное кольцо.

Предложение 4. Если R – центрально существенная алгебра и A – коммутативная алгебра, то $A \otimes R$ – центрально существенная алгебра.

Далее мы дадим отрицательный ответ на вопрос, поставленный в [1]: верно ли, что кольцо $R/N(R)$ (или $R/J(R)$) коммутативно для любого центрально существенного кольца R? Более того, мы построим пример центрально существенного кольца R, для которого $R/J(R)$ не является PI-кольцом (т.е. в нём не выполняется никакое полилинейное тождество с целыми коэффициентами, один из которых равен единице, см [3]).

При построении примера была использована известная теорема Д.Пассмана:

Теорема 2 [4], Theorem 5.3.9(ii). Существует функция $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что если групповая алгебра FG группы G над полем F характеристики $p > 0$ удовлетворяет полиномиальному тождеству степени d, то для некоторой p-абелевой подгруппы H группы G выполнено неравенство $[G : H] \cdot |H'| < g(d)$ (группа H называется p-абелевой, если её коммутант H' – конечная p-группа).

Предложение 5. Пусть p – простое число. Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $G(n)$ группу с образующими a, b, c и определяющими соотношениями $a^{p^n} = a^{p^n} = c^{p^n} = 1$, $bc = cb$, $ac = ca$ и $aba^{-1} = bc$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

(1) $G(d)$ – p-группа класса нильпотентности 2;

(2) для любой подгруппы H группы G выполнено неравенство

$$[G : H] \cdot |H'| \geq p^n.$$

Теорема 3. Пусть $\operatorname{char} F = p$, $S = \prod_{n\in\mathbb{N}} FG(n)$ – прямое произведение групповых алгебр групп из предложения 5 и $R = S[x]$ – кольцо многочленов над S. Тогда R – центрально существенное кольцо и $R/J(R)$ не является PI-кольцом.

Сформулируем несколько естественно возникающих вопросов.

1. Верно ли, что кольцо формальных степенных рядов над произвольным центрально существенным кольцом центрально существенно? В частности, так ли это, если кольцо коэффициентов – конечное центрально существенное кольцо?

2. Верно ли, что если R и S – центрально существенные алгебры, то $R \otimes S$ – центрально существенная алгебра. Ответ неизвестен даже в случае, когда R и S – конечномерные центрально существенные алгебры.

3. Верно ли, что если R – центрально существенное PI-кольцо или нётерово (слева или с обеих сторон) центрально существенное кольцо, то кольцо $R/N(R)$ (или $R/J(R)$) коммутативно? Для артинова слева центрально существенного кольца это верно.

В.Т.Марков поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 17-01-00895-А. Исследование А.А.Туганбаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект 16-11-10013.

Литература. [1] Марков В. Т., Туганбаев А. А. Центрально существенные кольца // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, № 2. — С. 55–61. [2] Markov V. T., Tuganbaev A. A. Centrally essential group algebras // Journal of Algebra. — 2018. — Vol. 512, no. 15. — P. 109–118. [3] Rowen, L. H. Polynomial identities in ring theory. [4] Passman D. S. The algebraic structure of group rings. – John Wiley and Sons, N.–Y. et al., 1977. Academic Press, Inc. New York, 1980.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Национальный исследовательский университет МЭИ

e-mail: vtmarkov@yandex.ru
tuganbaev@gmail.com

О. В. Маркова (Москва)

Групповые коды размерности 4

Представленные в данном сообщении результаты получены коллективом авторов: **К. Гарсиа Пильядо, С. Гонсалес, К. Мартинес (Овьедо), В. Т. Марков, О. В. Маркова (Москва).**

Все рассматриваемые в данном сообщении поля и группы — конечные.

В [1] дано следующее определение группового кода, не зависящее от нумерации элементов группы.

Определение 1. Пусть G - группа порядка n. Код $\mathcal{C}$ длины n над полем F называется *G-кодом*, если существуют идеал I группового кольца FG и биекция $\sigma : \{1, \dots, n\} \to G$, такие, что

$$\mathcal{C} = \{(a_1, \dots, a_n) \in F^n : a_1\sigma(1) + \ldots + a_n\sigma(n) \in I\}. \tag{1}$$

Мы также будем говорить, что код $\mathcal{C}$ и идеал I, связанные соотношением (1), перестановочно эквивалентны.

Это определение позволяет рассматривать один и тот же код как групповой код для различных групп одновременно. В частности в [1], было предложено

Определение 2. Код $\mathcal{C}$ длины n над полем F называется *абелевым групповым кодом*, если он является A-кодом над F для некоторой абелевой группы A порядка n.

Для некоторых некоммутативных групп G все G-коды оказываются абелевыми (см. [1]). В частности, справедлива

Теорема 1. Если G — конечная группа, и G является произведением двух абелевых подгрупп в смысле [2], т.е.

$$G = AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

для некоторых абелевых подгрупп A, B группы G, то любой G-код является абелевым.

Первые примеры неабелевых S_4-кодов были построены в [3] с существенным использованием компьютера. Позже были получены новые примеры неабелевых групповых кодов, и было высказано предположение, что над любым конечным полем характеристики $p > 2$ существует неабелев $\mathrm{SL}_2(\mathrm{GF}(3))$-код размерности 4. Эта гипотеза была доказана в [4].

С другой стороны, интересно определить, какова минимальная размерность неабелева группового кода. Первый шаг в этом направлении сделан в [1], где было показано, что одномерные групповые коды являются абелевыми. В [5] получен следующий результат в этом направлении.

Теорема 2. Если G — конечная группа и F — конечное поле, то любой G-код размерности $d < 4$ над F является абелевым, т.е. 4 — наименьшая возможная размерность неабелева группового кода.

Во всех известных примерах неабелевых групповых кодов размерности 4 группа G не является p-группой. Оказывается, что при некотором ограничении на поле коэффициентов, действительно, для произвольной конечной p-группы G все четырёхмерные G-коды абелевы. Именно, основной результат данного сообщения — следующая

Теорема 3. Пусть p — простое число и пусть G — конечная p-группа. Если поле F удовлетворяет условию $|F| < p^3$, то любой G-код C над F размерности $\dim_F C = 4$ является абелевым групповым кодом.

Техника доказательства теоремы 3 развивает методы, на которых основано доказательство теоремы 2 (см. [5]).

Ограничение на поле в теореме 3 является существенным для всех рассуждений, на которых основано её доказательство. Поэтому на данный момент условие на поле коэффициентов не представляется возможным ослабить. Вопрос существование неабелева G-кода размерности 4 для конечной p-группы G и большого поля F остаётся открытым.

Литература. [1] J. J. Bernal, Á. del Río, J. J. Simón. An intrinsical description of group codes. Des. Codes Cryptography, 51:3 (2009), 289–300. [2] N. Itô, Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen.

Math. Z., 62 (1955), 400–401. [3] К. Гарсиа Пильядо, С. Гонсалес, В. Т. Марков, К. Мартинес, А. А. Нечаев. Когда все групповые коды некоммутативной группы абелевы (вычислительный подход)? Фундам. и прикл. мат., 17:2 (2011–2012), 75–85. [4] К. Гарсиа Пильядо, С. Гонсалес, В. Т. Марков, К. Мартинес. Неабелевы групповые коды над произвольным конечным полем. Фундам. и прикл. мат., 20:1 (2015), 17–22. [5] C. García-Pillado, S. González, V. Markov, O. Markova, C. Martínez. Group codes of dimension 2 and 3 are abelian. Finite Fields Appl., 55 (2019), 167–176.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: ov_markova@mail.ru

Д. А. Матвеев (Москва)

Коммутирующие однородные локально нильпотентные дифференцирования

Пусть X – аффинное алгебраическое многообразие с действием алгебраического тора $\mathbb{T}$. Если сложность действия равна нулю, то тор действует на X с открытой орбитой и многобразие называется торическим. В случае действий произвольной сложности описание $\mathbb{T}$-многообразий было получено К. Альтманом и Ю. Хаузеном. Они предложили задавать $\mathbb{T}$-многообразия в терминах так называемых собственных полиэдральных дивизоров (proper polyhedral divisors).

Известно, что $\mathbb{G}_a$-действия на аффинном многообразии X соответствуют локально нильпотентным дифференцированиям алгебры $\mathbb{K}[X]$, а $\mathbb{G}_a$-действия, нормализуемые тором, соответствуют локально нильпотентным дифференцированиям, однородным относительно градуировки, возникающей в результате действия тора $\mathbb{T}$. Описание последних в терминах некоторого обобщения корней Демазюра получено Льендо для действий вертикального типа произвольной сложности и для действий горизонтального типа сложности один.

Для следующего шага – описания в тех же терминах $\mathbb{G}_a^2$-действий на аффинном $\mathbb{T}$-многообразии X, нужно описать пары коммутирующих однородных локально нильпотентных дифференцирований.

В докладе будут изложены критерии коммутирования для пар локально нильпотентных дифференцирований в терминах полиэдральных дивизоров.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: dmitry.a.matveev@yandex.ru

В. Г. Микаелян (Ереван)

О парах сплетений групп, порождающих равные многообразия

Цель доклада – представить нашу недавнюю заметку [5], которая предлагает метод распознавания сплетений, порождающих равные многообразия групп. А именно: заданы группы A_1, A_2, B_1, B_2 такие, что A_1 а A_2 порождают одно и то же многообразие $\mathfrak{U}$, а B_1 и B_2 порождают одно и то же многообразие $\mathfrak{V}$. Порождают ли тогда сплетения $A_1 \mathrm{Wr} B_1$ и $A_2 \mathrm{Wr} B_2$ равные многообразия? Иными словами, выполняется ли равенство

$$\mathrm{var}(A_1 \mathrm{Wr} B_1) = \mathrm{var}(A_2 \mathrm{Wr} B_2) \qquad (*)$$

для заданных A_1, A_2, B_1, B_2 (см. информацию о мноогразиях групп в [7])? Эта тема продолжает наши исследования в [3, 4, 6], где мы рассматривали другие свойства многообразий, порожденных сплетениями, в частности, вопрос равенства многообразия, порожденного сплетением $A_1 \mathrm{Wr} B_1$ произведению $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$.

Чтобы сформулировать ответ на упомянутый выше вопрос для некоторых классов нильпотентных и абелевых групп, нам понавобятся вспомогательные обозначения для абелевых групп (мы заимствуем их из [2]). Пусть B_1 и B_2 – абелевы группы конечной экспоненты, и пусть для простого числа p их p-примарные компоненты $B_1(p)$ и $B_2(p)$ имеют прямые разложения $B_1(p) = C_{p^{u_1}}^{\mathfrak{m}_{p^{u_1}}} \times \cdots \times C_{p^{u_r}}^{\mathfrak{m}_{p^{u_r}}}$ и $B_2(p) = C_{p^{v_1}}^{\mathfrak{m}_{p^{v_1}}} \times \cdots \times C_{p^{v_s}}^{\mathfrak{m}_{p^{v_s}}}$, где $C_{p^{u_i}}^{\mathfrak{m}_{p^{u_i}}}$ – прямое произведение

$\mathfrak{m}_{p^{u_1}}$ копий цикла $C_{p^{u_i}}$ порядка p^{u_i}, а $C_{p^{v_i}}^{\mathfrak{m}_{p^{v_i}}}$ определен аналогично. Допустим $u_1 > \cdots > u_r$ а $v_1 > \cdots > v_r$. Определим $B_1(p) \equiv B_2(p)$ тогда и только тогда, когда либо $B_1(p), B_2(p)$ оба *кончены* и изоморфны; либо же $B_1(p), B_2(p)$ оба *бесконечены* и существует такой k для которого (i) $C_{p^{u_k}}^{\mathfrak{m}_{p^{u_k}}}$ – первый бесконечный фактор в $B_1(p)$, $C_{p^{v_k}}^{\mathfrak{m}_{p^{v_k}}}$ – первый бесконечный фактор в $B_2(p)$; (ii) $u_k = v_k$; (iii) $u_i = v_i$, $\mathfrak{m}_{p^{u_i}} = \mathfrak{m}_{p^{v_i}}$ для любого $i = 1, \ldots, k-1$.

Теорема. (Теорема 2.3 из [5]) Пусть A_1, A_2 – нетривиальные нильпотентные группы экспоненты m, порождающие одно и то же многообразие, а B_1, B_2 – нетривиальные абелевы группы экспоненты n, порождающие одно и то же многообразие. Если любой простой делитель p числа n также делит m, то равенство $(*)$ выполняется для A_1, A_2, B_1, B_2 тогда и только тогда, когда $B_1(p) \equiv B_2(p)$ для любого такого простого p.

Особенно несложна ситуация в случаях, когда группы B_1, B_2 оба конечны, или когда одна из них конечна, а другая бесконечна:

Следствие. В обозначениях, принятых выше:

1. равенство $(*)$ выполняется для конечных групп B_1, B_2 тогда и только тогда, когда B_1 и B_2 изоморфны;

2. равенство $(*)$ никогде не выполняется, если одна из групп B_1, B_2 конечна, а другая бесконечна.

Представленные факты обобщают некоторые результаты Ковача и Ньюмэна о структуре произведений многообразий групп [1].

Техника доказательств использует как традиционные методы многообразий групп, упомянутыв в [7], так и более новые метводы, такие как теорию Шилдта, разработанную для вычисления класса нильпотентности сплетений [8, 9].

Литература. [1] L.G. Kovács, M.F. Newman, Torsionfree varieties of metabelian groups, de Giovanni, Francesco (ed.) et al., Infinite groups 1994. Proceedings of the international conference, Ravello, Italy, May 23-27, 1994. Berlin: Walter de Gruyter. 125–128 (1996). [2] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups. Volume II, Academic Press, New York, 1973. [3] V.H. Mikaelian, Metabelian varieties of groups and wreath products of abelian groups, J. Algebra, 2007 (313), 2, 455–485. [4] В.Г. Микаелян, Критерий Шмелькина и многообразия, порожденные сплетениями конечных групп (Russian), Алгебра и логика, 56, 2, (2017), 164–175. [5] V.H. Mikaelian, Subvariety structures in certain product varieties of groups, Journal of Group Theory, 21 (2018), 5, 865–884. [6] В.Г. Микаелян, О классификации многообразий, порожденных сплетениями групп (Russian), Известия РАН, сер. мат., 82 (2018), 5, 153–166. [7] H. Neumann, Varieties of Groups, Varieties of groups (Ergebn. Math. Grenzg., 37), Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1967. [8] D. Shield, Power and commutator structure of groups, Bull. Austral. Math. Soc. 17, (1977) 1–52. [9] D. Shield, The class of a nilpotent wreath product, Bull. Austral. Math. Soc. 17 (1977) 53–89.

Ереванский государственный университет
Американский университет Армении

e-mail: vmikaelian@ysu.am
vmikaelian@aua.am

В. С. Монахов (Гомель), **А. А. Трофимук** (Гомель)

О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с полунормальными сомножителями

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Запись $Y \leq X$ означает, что Y — подгруппа группы X.

Согласно [2] подгруппы A и B группы G называются взаимно (тотально) перестановочными, если $UB = BU$ и $AV = VA$ (соответственно $UV = VU$) для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. Асаад и Шаалан установили сверхразрешимость группы $G = AB$ с взаимно перестановочными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что B нильпотентна, [3, теорема 3.2], и в случае, когда коммутант G' нильпотентен, [3, теорема 3.8]. Эти результаты развивались многими авторами, см. монографию [1].

Подгруппа A называется [4] *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B. Группы с полунормальными подгруппами исследовались в работах многих авторов, см., например, литературу в [5].

Если в группе $G = AB$ подгруппы A и B взаимно перестановочны, то A и B будут полунормальными. Обратное неверно. Например, группа

$$G = Z_7 \rtimes Aut\, Z_7 = Z_7 \rtimes (Z_2 \times Z_3)$$

является произведением полунормальных подгрупп $A \simeq Z_2 \times Z_3$ и $B \simeq Z_7 \rtimes Z_2$. Однако A и B не взаимно перестановочны. Здесь Z_n — циклическая группа порядка n, а запись $A \rtimes B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

Признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ с полунормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B установлены в следующей теореме.

Теорема. Пусть A и B — полунормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:

(1) A нильпотентна, а B сверхразрешима;

(2) коммутант G' нильпотентен.

Из теоремы, в частности, вытекают отмеченные выше результаты работы [3], а также [5, теорема A, следствие 3.6].

Напомним, что группа G называется *сайдинг-группой (siding group)*, если каждая подгруппа из коммутанта G' нормальна в G, см. [6, определение 2.1]. Метациклические группы, разрешимые t-группы являются сайдинг-группами. Кроме того, всякая сайдинг-группа сверхразрешима.

Следствие. Пусть A и B — подгруппы группы G и $G = AB$. Если A — сверхразрешимая полунормальная подгруппа, B — нормальная сайдинг-группа, то G сверхразрешима.

Условие нормальности сайдинг-сомножителя ослабить до субнормальности и до полунормальности нельзя. Примером служит несверхразрешимая группа

$$G = Z_3 \times ((S_3 \times S_3) \rtimes Z_2), \quad ([7], IdGroup = [216, 157]),$$

которая факторизуется нормальной сверхразрешимой подгруппой $A \simeq S_3 \times S_3$ и субнормальной сайдинг-подгруппой $B \simeq Z_3 \times Z_3 \times S_3$, $B' \simeq Z_3$.

Литература. [1] A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010. [2] A. Carocca. p-supersolvability of factorized finite groups. Hokkaido Math. J., 21 (1992), 395–403. [3] M. Asaad, A. Shaalan. On the supersolubility of finite groups. Arch. Math., 53 (1989), 318–326. [4] X. Su. On semi-normal subgroups of finite group. J. Math. (Wuhan), 8:1 (1988), 7–9. [5] V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk. Finite groups with two supersoluble subgroups. J. Group Theory, 22 (2019), 297–312. [6] E. R. Perez. On products of normal supersoluble subgroups. Algebra Colloq., 6:3 (1999), 341–347. [7] GAP (2018) Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.9.2. www.gap-system.org.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

e-mail: victor.monakhov@gmail.com
alexander.trofimuk@gmail.com

В. И. Мурашко (Гомель, Беларусь)

Обобщенно ранговые формации конечных групп

Рассматриваются только конечные группы. Напомним, что главный фактор $\overline{H}$ группы G называется $\mathfrak{X}$-*центральным* в G, если $\overline{H} \rtimes G/C_G(\overline{H}) \in \mathfrak{X}$ (см. [1, с. 127–128]), иначе он называется $\mathfrak{X}$-*эксцентральным.* Через $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается $\mathfrak{X}$-*гиперцентр* группы G — наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что всякий её G-композиционный фактор $\mathfrak{X}$-централен в G. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, то $\mathrm{Z}_{\mathfrak{N}}(G) = \mathrm{Z}_{\infty}(G)$ — гиперцентр группы G.

Пусть $\overline{N}$ — главный фактор группы G. Тогда $\overline{N} = \overline{N}_1 \times \cdots \times \overline{N}_n$, где $\overline{N}_i$ — изоморфные простые группы. Число $n = r(\overline{N}, G)$ называется *рангом* $\overline{N}$ в G. *Ранговой функцией* R [2, VII, определение 2.3] называется отображение ставящее в соответствие каждому простому числу p множество $R(p)$ натуральных чисел. Со всякой ранговой функцией связан класс групп $\mathfrak{E}(R) = (G \in \mathfrak{S} \mid$ для любого $p \in \mathbb{P}$ ранг всякого главного p-фактора G лежит в $R(p))$, являющийся формацией. Эти формации изучались в целом ряде работ (см., [3-6]). В данной работе мы рассматриваем обобщение этих формаций:

Определение 1. (1) Обобщенная ранговая функция $\mathcal{R}$ — отображение, определенное на прямых произведениях изоморфных простых групп:

(a) $\mathcal{R}$ ставит в соответствие каждой простой группе S пару возможно пустых непересекающихся множеств $\mathcal{R}(S) = (A_{\mathcal{R}}(S), B_{\mathcal{R}}(S))$ натуральных чисел.

(b) Если N — прямое произведение простых изоморфных S групп, то $\mathcal{R}(N) = \mathcal{R}(S)$.

(2) Пусть $\overline{N}$ — главный фактор G. Будем говорить, что *обобщенный ранг* $\overline{N}$ в G лежит в $\mathcal{R}(\overline{N})$ $(gr(\overline{N}, G) \in \mathcal{R}(\overline{N}))$, если $r(\overline{N}, G) \in A_{\mathcal{R}}(\overline{N})$ или $r(\overline{N}, G) \in B_{\mathcal{R}}(\overline{N})$ и, если $x \in G$ фиксирует композиционный фактор $\overline{H}/\overline{K}$ в $\overline{N}$ $(\overline{H}^x = \overline{H}$ и $\overline{K}^x = \overline{K})$, то x индуцирует внутренний автоморфизм на нем.

(3) С каждыми обобщенно ранговой функцией $\mathcal{R}$ и классом групп $\mathfrak{X}$ мы связываем класс групп $\mathfrak{X}(\mathcal{R}) = (G \mid \overline{H} \notin \mathfrak{X}$ и $gr(\overline{H}, G) \in \mathcal{R}(\overline{H})$ для любого $\mathfrak{X}$-эксцентрального главного фактора $\overline{H}$ группы $G)$.

Определение 2. Пусть $Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n)$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что $\overline{H} \notin \mathfrak{F}$, $r(\overline{H}, G) > n$ и $gr(\overline{H}, G) \in \mathcal{R}(\overline{H})$ для любого её G-композиционного $\mathfrak{F}$-эксцентрального в G фактора $\overline{H}$.

Пусть C — множество и $\mathcal{R}$ — обобщенная ранговая функция. Будем говорить, что $\mathcal{R}(\overline{H}) \subseteq C$, если $A_{\mathcal{R}}(\overline{H}) \cup B_{\mathcal{R}}(\overline{H}) \subseteq C$. Под $\mathcal{R}(\overline{H}) \cap C$ будем подразумевать $(A_{\mathcal{R}}(\overline{H}) \cap C, B_{\mathcal{R}}(\overline{H}) \cap C)$. Через $E\mathfrak{F}$ будем обозначать класс групп все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, содержащая все нильпотентные группы, которая наряду со всякой своей группой содержит и все ее композиционные факторы. Если $\mathcal{R}$ — обобщенная ранговая функция, то следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *G — $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$-группа.*

(2) *Если $Z = Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, 4)$, то $gr(N/Z, G) \in \mathcal{R}(N/Z) \cap [1, 4]$ для любой минимальной нормальной подгруппы N/Z группы G/Z и $(G/Z)/\mathrm{Soc}(G/Z)$ — разрешимая $\mathfrak{F}$-группа.*

(3) *Верны следующие утверждения*:

(a) $G^{\mathfrak{F}} = G^{E\mathfrak{F}}$.

(b) *Если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq G^{\mathfrak{F}}$, то $(G^{\mathfrak{F}}/N)_{E\mathfrak{F}} = \mathrm{Z}(G^{\mathfrak{F}}/N)$.*

(c) *Пусть n — наименьшее число такое, что найдётся простая не-$\mathfrak{F}$-секция в S_{n+1} и $T = G^{\mathfrak{F}} \cap Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n)$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}/T \leq \mathrm{Soc}(G/T)$ и $N/T \notin \mathfrak{F}$, $r(N/T, G) \leq n$ и $gr(N/T, G) \in \mathcal{R}(N/T)$ для любой минимальной нормальной подгруппы N/T группы G/T из $G^{\mathfrak{F}}/T$.*

Напомним, что группа называется *полупростой*, если она или единична, или является прямым произведением простых неабелевых групп.

Следствие 1.1 ([7, X, теорема 13.6]). *Группа G квазинильпотентна тогда и только тогда, когда $G/\mathrm{Z}_{\infty}(G)$ полупроста.*

В [8] Гуо и Скиба ввели класс $\mathfrak{F}^*$ всех квази-$\mathfrak{F}$-групп для насыщенной формации $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{F}^* = (G \mid$ для любых $\mathfrak{F}$-эксцентрального фактора $\overline{H}$ и $x \in G$, x индуцирует внутренний автоморфизм на $\overline{H})$.

Следствие 1.2 ([8, теорема 2.8]). *Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ — нормально наследственная локальная формация. Группа G является квази-$\mathfrak{F}$-группой тогда и только тогда, когда $G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ полупроста.*

Напомним [9], что группа называется *c-сверхразрешимой* (SC-группой в терминологии Робинсона [10]), если всякий ее главный фактор — простая группа.

Следствие 1.3 ([10, предложение 2.4]). *Группа G является c-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда найдётся совершенная нормальная подгруппа D такая, что G/D сверхразрешима, $D/\mathrm{Z}(D)$ — прямое произведение G-допустимых простых неабелевых групп и $\mathrm{Z}(D)$ сверхразрешимо вложена в G.*

В работе [11] был введен класс $w\mathfrak{U}$ всех расширенно сверхразрешимых групп. Данный класс является наследственной насыщенной формацией разрешимых групп. Напомним [12], что группа называется *расширенно c-сверхразрешимой*, если её абелевые факторы $w\mathfrak{U}$-центральны, а оставшиеся — простые группы.

Следствие 1.4 ([12, теорема B]). *Группа G является расширенно c-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда $G^{w\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{S}}$, $\mathrm{Z}(G^{w\mathfrak{U}}) \leq \mathrm{Z}_{w\mathfrak{U}}(G)$ и $G^{w\mathfrak{U}}/\mathrm{Z}(G^{w\mathfrak{U}})$ — прямое произведение G-допустимых простых неабелевых групп.*

Литература. [1] Л. А. Шеметков и А. Н. Скиба. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. [2] K. Doerk and T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. [3] B. Huppert, Zur Gaschiitzschen Theorie der Formationen. Math. Ann., 164 (1966), 133–141. [4] J. Kohler, Finite groups with all maximal subgroups of prime or prime square index. Canad. J. Math., 16 (1964), 435-442. [5] H. Heineken, Group classes defined by chief factor ranks. Boll. Un. Mat. Ital. B., 16 (1979), 754–764. [6] K. L. Haberl and H. Heineken, Fitting classes defined by chief factor ranks. J. London Math. Soc., 29 (1984), 34-40. [7] B. Huppert and N. Blacburn. Finite groups III. Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1982. [8] W. Guo and A. N. Skiba, On finite quasi-$\mathfrak{F}$-groups. Comm. Algebra, 37 (2009), 470–481. [9] В. А. Ведерников, О некоторых классах конечных групп. ДАН БССР, 32 (1988), 872-875. [10] D. J. S. Robinson, The structure of finite groups in whitch permutability is a transitive relation. J. Austral. Math. Soc., 70 (2001), 143–159. [11] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева и В. Н. Тютянов, О конечных группах сверхразрешимого типа. Сиб. мат. журн., 51 (2010), 1270–1281. [12] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева и Е. Н. Мысловец, Конечные расширенно c-сверхразрешимые группы и их взаимно перестановочные произведения. Сиб. матем. журн., 57 (2016), 603–616.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

e-mail: mvimath@yandex.ru

Д. В. Осипов (Москва)

Символы Конту-Каррера

В своем докладе я дам обзор результатов про многомерные символы Конту-Каррера. Эти результаты получены в совместных с работах с Кс. Жу и С.О. Горчинским, см., например, [1]-[3].

n-мерный символ Конту-Каррера — это $(n+1)$-мультипликативное кососимметрическое отображение

$$CC_n \ : \ R((t_1))\dots((t_n))^* \times \dots \times R((t_1))\dots((t_n))^* \longrightarrow R^* \,,$$

где R — коммутативное кольцо, $R((t_1))\dots((t_n))$ — кольцо итерированных рядов Лорана над R. Требуется также, чтобы это отображение было функториально по кольцу R и удовлетворяло свойству Стейнберга

$$CC_n(\dots, f, \dots, 1-f, \dots) = 1 \,,$$

где $f, 1-f \in R((t_1))\dots((t_n))^*$.

Отображения с такими свойствами существуют и среди них есть выделенное, так что все остальные являются его целочисленными степенями (это является сильно нетривиальным утверждением). Это выделенное отображение мы и будем дальше рассматривать и обозначать его как многомерный символ Конту-Каррера CC_n.

Многомерный символ Конту-Каррера CC_n обладает целым рядом замечательных свойств. Если $R = k$, где k — это поле, то CC_n — это многомерный ручной символ, обобщающий обычный ручной символ. Если $R = k[\epsilon]/\epsilon^{n+2}$, то при помощи отображения CC_n легко получить n-мерный вычет. В случае, когда $k = \mathbb{F}_q$ — конечное поле, то эти и другие отображения, полученные из CC_n, играют важную роль в n-мерной теории полей классов Паршина-Като, то есть в описании максимального абелевого расширения поля $\mathbb{F}_q((t_1))\dots((t_n))$.

Если кольцо R содержит поле $\mathbb{Q}$, то для отображения CC_n существует красивая явная формула, сводящаяся к формуле:

$$CC_n(f_1, \dots, f_{n+1}) = \exp \operatorname{res} \left(\log(f_1) \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}} \right) ,$$

где res — n-мерный вычет.

Наконец, n-мерные символы Конту-Каррера возникают, как локальные отображения, связанные с флагом из $n+1$ вложенных друг в друга неприводимых подмногообразий на n-мерном алгебраическом многообразии. В этом случае для них выполнены многомерные законы взаимности, обобщающие классический закон взаимности Вейля на проективной кривой: "произведение ручных символов по всем точкам кривой равно 1" и закон взаимности для дифференциальных форм "сумма вычетов диференциальной формы на проективной кривой есть ноль".

Многомерные законы взаимности необходимы для многомерной глобальной теории полей классов.

Литература. [1] С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, Многомерный символ Конту-Каррера: локальная теория, Матем. сб., 206:9 (2015), 21–98. [2] Denis Osipov, Xinwen Zhu, The two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws, J. Algebraic Geom., 25 (2016), 703–774. [3] С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, Многомерный символ Конту-Каррера и непрерывные автоморфизмы, Функц. анализ и его прил., 50:4 (2016), 26–42.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
НИУ ВШЭ
НИТУ МИСиС
e-mail: d_ osipov@mi-ras.ru

А. Н. Панов (Самара)

Расстановки ладей и теория суперхарактеров для контракции GL^a над конечным полем

Теорией суперхарактеров конечной группы G называют пару $(\mathcal{S}, \mathcal{K})$, где $\mathcal{S} = \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ – система характеров (представлений) группы G, $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ – разбиение группы G, удовлетворяющую условиям: 1) характеры из $\mathcal{S}$ попарно ортогональны, 2) характеры из $\mathcal{S}$ постоянны на классах из $\mathcal{K}$, 3) $\{1\} \in \mathcal{K}$ (см [1]). Характеры из $\mathcal{S}$ называют суперхарактерами, а классы из $\mathcal{K}$ – суперклассами.

Группа $\mathrm{GL}(n)$ содержит верхнетреугольную подгруппу $B = HN$ и строго нижнетрегольную подгруппу $N_- = 1 + \mathfrak{n}_-$. Контракцией группы $\mathrm{GL}(n)$ будем называть полупрямое произведение $\mathrm{GL}^a = B \ltimes N_-^a$, в котором группа $N_-^a = 1 + \mathfrak{n}_-^a$ – абелева группа и B действует на $\mathfrak{n}_-^a = \mathfrak{n}^*$ коприсоединенным действием.

Пусть $\mathbb{F}_q$ - конечное поле характеристики, отличной от двух. В докладе будет построена теория суперхарактеров группы $\mathrm{GL}^a(n, \mathbb{F}_q)$. Группа $\mathrm{GL}^a(n, \mathbb{F}_q)$ является группой обратимых элементов приведенной алгебры над $\mathbb{F}_q$. Поэтому для нее может быть построена теория суперхарактеров, следуя работе [2].

Расстановкой ладей на $n \times n$ шахматной доске будем называть систему D, состоящую из пар (i, j), где $1 \le i, j \le n$, в которой нет двух элементов из одной строки и одного столбца. Расстановка ладей D распадается на верхне треугольную, диагональную, нижне треугольную части $D = D_+ \cup D_0 \cup D_-$.

В докладе будет проведена классификация суперклассов тройками $\beta = \{(D, h, \phi)\}$, где D расстановка ладей, $h = \operatorname{diag}(h_1, \dots, h_n) \in H$, удовлетворяющий условию $h_i \neq 1$ только в случае $(i, i) \in D_0$, и $\phi : D_+ \cup D_- \to \mathbb{F}_q^*$.

Будет проведена классификация суперхарактеров тройками $\alpha = \{(D, \theta, \phi)\}$, где D расстановка ладей, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ - набор неприводимых характеров группы $\mathbb{F}_q^*$, удовлетворяющий условию $\theta_i \neq 1$ только в случае $(i,i) \in D_0$, и $\phi : D_+ \cup D_- \to \mathbb{F}_q^*$.

Теорема. Система характеров $\{\chi_\alpha\}$ и подмножеств $\{K_\beta\}$ задают теорию суперхарактеров группы $\mathrm{GL}^a(n, \mathbb{F}_q)$.

Литература. [1] P.Diaconis, I.M.Isaacs, Supercharacters and superclasses for algebra groups, Trans.Amer.Math.Soc., 2008, vol. 360, 2359-2392. [2] А.Н.Панов, Теория суперхарактеров для групп обратимых элементов приведенных алгебр, Алгебра и анализ, 2015, т.27, no. 6, 242-259.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королева

e-mail: apanov@list.ru

А. В. Петухов (Москва)

Представления W-алгебр и алгебры Зиг-зага

В своём докладе хочу представить результат об эквивалентности блоков категорий конечномерных представлений алгебры минимальных нильпотентных W-алгебр вне типа A категориям представлений алгебр Зиг-Зага, введённых Хованым.

Пусть G — это некоторая простая группа Ли над $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{g}$ — это её алгебра Ли. Обозначим через $e \in \mathfrak{g}$ вектор старшего веса в $\mathfrak{g}$. Орбита Ge является минимальной по размерности нильпотентной орбитой и мы обозначим её $\mathcal{O}_{min}$. Элементу $e \in \mathfrak{g}$ сопоставляется ассоциативная алгебра $\mathrm{U}(\mathfrak{g}, e)$, называемая *$W$-алгеброй* (в нашем случае, при $e \in \mathcal{O}_{min}$, — минимальной нильпотентной W-алгеброй).

Известно, что неприводимые конечномерные представления W-алгебр соответствуют примитивным идеалам в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ (т.е. аннуляторам простых модулей); неприводимые представления $\mathrm{U}(\mathfrak{g}, e)$ находятся в биекции с примитивными идеалами в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, чьё ассоцированные многообразие совпадает с замыканием $Ge = \mathcal{O}_{min}$. Естественно ожидать, что описание всех конечномерных представлений W-алгебр тесно связано с описанием всех двухсторонних идеалов в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, чьё ассоциированное многообразие равно $\mathcal{O}_{min}$.

В докладе будет дано полное описание категории конечномерных представлений минимальной нильпотентной W-алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g}, e)$ вне типа A (а для типа A я поясню почему ответ должен быть категорически отличным от ответов в остальных типах).

Основным методом решения задачи является анализ действия набора точных функторов на категории конечномерных представлений $\mathrm{U}(\mathfrak{g}, e)$, редукция которых на K-группу совпадает с действим группы Вейля $\mathfrak{g}$ на своём естественном представлении на подалгебре Картана.

ИППИ РАН

Н. Д. Подуфалов (Москва), **О. В. Кравцова** (Красноярск)

О группах коллинеаций конечных полуполевых проективных плоскостей

Полуполем называется алгебраическая система $\langle S, +, \cdot \rangle$, удовлетворяющая всем аксиомам тела, за исключением, возможно, ассоциативности умножения (квазитело, в терминологии А. Г. Куроша). Проективная плоскость, координатизируемая полуполем, называется полуполевой плоскостью, она является плоскостью трансляций и дуальна плоскости трансляций. В частности, конечная проективная плоскость координатизируется полем тогда и только тогда, когда она дезаргова.

Известна гипотеза [1] о разрешимости полной группы коллинеаций (автоморфизмов) всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка (см. также [2], вопрос 11.76, 1990 г.). К настоящему моменту эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевых плоскостей ([3,4] и др.).

В предположении неразрешимости полной группы коллинеаций простые композиционные факторы должны быть изоморфны известным простым группам. Предлагается рассмотреть случаи, когда группа автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) содержит подгруппу либо фактор-группу, изоморфную знакопеременной группе A_5, подгруппе значительного количества простых неабелевых групп.

Получен ряд технических результатов. Выявлены серии конечных полуполевых плоскостей, не допускающих подгруппы автотопизмов, изоморфной A_5 либо $SL_2(5)$.

Второй автор поддержан грантом РФФИ (проект 19-01-00566).

Литература. [1] D. R. Hughes, F. C. Piper. Projective planes. Springer–Verlag New–York Inc., 1973. [2] В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 16-е, дополненное, включающее архив решенных задач. Новосибирск, 2006. [3] H. Huang, N. L. Johnson. 8 semifield planes of order 8^2. Discrete Math. **80** (1) (1990), 69–79. [4] Н. Д. Подуфалов, Б. К. Дураков, О. В. Кравцова, Е. Б. Дураков. О полуполевых плоскостях порядка 16^2, Сиб. Мат. Журн. **37** (3) (1996), 616–623.

Российская академия наук
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru

А. И. Созутов (Красноярск)

О группах с энгелевыми элементами

Элемент a произвольной группы G называется *энгелевым* [[1], стр. 541], если для любого элемента $b \in G$ существует такое зависящее от него натуральное число $n = n(b)$, что выполняется равенство $[...[[b,a],a]...,a] = [b,\, _na] = 1$. Свойства и расположение энгелевых элементов в группах изучались многими авторами [[1], стр. 540-544]. Составляют ли энгелевы элементы подгруппу (радикал [[1], стр. 515-520]) — один из основных исследуемых вопросов. Здесь он решается при некоторых естественных ограничениях.

Энгелевый элемент a группы G называем *конечным энгелевым* [2], если все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ конечны и, значит, нильпотентны. Доказательства результатов, ранее анонсированных в [2], отправлены в печать [3]; приведем формулировки теорем 3-5 из [3]:

Теорема 1. Если a — конечный энгелевый π-элемент группы G и $C_G(a)$ — артинова группа, то $\langle a^G \rangle$ — черниковская π-группа и G — артинова группа.

Теорема 2. Если в группе G есть конечный энгелев элемент a с артиновым централизатором $C_G(a)$, то G артинова группа и все ее конечные энгелевы элементы составляют черниковский локально нильпотентный радикал $PH(G)$.

Теорема 3. Сопряженно бипримитивно конечная p-группа (p-группа Шункова) с конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой является черниковской группой.

Как известно, множество счетных артиновых групп континуально, а множество черниковских групп счетно. Поэтому уместно отметить, что если в условиях теорем 1–2 $C_G(a)$ — черниковская группа, то и G будет черниковской группой.

В настоящее время ведется работа над доказательствами таких теорем:

Теорема 4. Если a — конечный энгелевый в G p-элемент и силовские p-подгруппы в $C_G(a)$ артиновы, то $\langle a^G \rangle$ — черниковская p-группа.

Теорема 5. сли a — конечный энгелевый в G элемент простого порядка p и все элементарные абелевы p-подгруппы в $C_G(a)$ конечны, то $\langle a^G \rangle$ — черниковская p-группа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-01-00566 А.

Литература. [1] А. Г. Курош, Теория групп.– М., Наука, 1967, 648 с. [2] А. И. Созутов, О группах с конечным энгелевым элементом. Тез. докл. Междунар. алгеб. конф., посвященной 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша.– М.: Изд-во МГУ (2018), 179–180. [3] А. И. Созутов, О группах с конечным энгелевым элементом. Алгебра и логика (в печати).

Сибирский федеральный университет
e-mail: sozutov_ ai@mail.ru

Е. В. Соколов, **Е. А. Туманова** (Иваново)

Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных конструкций групп

Настоящая работа посвящена исследованию аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений и HNN-расширений групп. Напомним, что согласно [1] класс групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение вида $\prod_{y\in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Из приведенного определения легко следует, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс. В частности, если $\mathcal{C}$ — корневой класс, то класс всех $\mathcal{C}$-групп без кручения также является корневым.

При изучении аппроксимируемости корневым классом $\mathcal{C}$ любой свободной конструкции групп основным является вопрос о наследовании данной конструкцией свойства $\mathcal{C}$-аппроксимируемости от групп, из которых она построена. В полном объеме ответ на этот вопрос известен только в случае свободного произведения произвольного семейства групп. Аппроксимируемость более сложно устроенных конструкций, таких как свободное произведение с объединенной подгруппой и HNN-расширение, изучают при различных дополнительных ограничениях, накладываемых на группы, из которых они построены, объединенные или связанные подгруппы, а также на аппроксимирующий класс (см, например, [1–6]). В настоящей работе таким ограничением служит центральность объединенных и связанных подгрупп.

Пусть T — конечное дерево с множеством вершин V и множеством ребер E, $P = \langle G_v\ (v \in V);\ H_{vw} = H_{wv}\ (\{v,w\} \in E)\rangle$ — соответствующее ему древесное произведение групп G_v с объединенными подгруппами H_{vw}, причем для любого ребра $\{v,w\} \in E$ подгруппа H_{vw} лежит в центре группы G_v, подгруппа H_{wv} — в центре группы G_w. Всюду далее будем считать также, что $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп и содержащий хотя бы одну неединичную группу. Справедлива

Теорема 1. Пусть каждая вершинная группа G_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема и обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективным на всех реберных подгруппах, лежащих в G_v. Тогда существует гомоморфизм σ группы P на группу из класса $\mathcal{C}$, продолжающий гомоморфизмы σ_v $(v \in V)$, и, в частности, группа P $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Пусть в дополнение к этому все группы $G_v\sigma_v$ $(v \in V)$ не имеют кручения и для любого ребра $\{v,w\} \in E$ подгруппа $H_{vw}\sigma_v$ изолирована в группе $G_v\sigma_v$, подгруппа $H_{wv}\sigma_w$ изолирована в группе $G_w\sigma_w$. Тогда образ гомоморфизма σ можно считать группой без кручения и потому, если все группы G_v $(v \in V)$ аппроксимируются $\mathcal{C}$-группами без кручения, то и группа P аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения.

Конкретным примером применения теоремы 1 служит

Следствие 1. Группа P является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой, если для любой вершины $v \in V$ выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:

1) группа G_v принадлежит классу $\mathcal{C}$;

2) группа G_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема и все лежащие в ней реберные подгруппы конечны;

3) группа G_v аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения и все лежащие в ней реберные подгруппы имеют конечный ранг.

Пусть теперь $B(t) = \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K\rangle$ — HNN-расширение группы B со связанными подгруппами H и K, лежащими в центре B. Имеет место

Теорема 2. Пусть группа B $\mathcal{C}$-аппроксимируема и выполняется одно из следующих двух условий:

1) класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу и существует гомоморфизм ρ группы B на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах H, K;

2) класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп и существует гомоморфизм ρ группы B на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах H, K и такой, что $H\rho \cap K\rho = 1$.

Тогда существует гомоморфизм σ группы $B(t)$ на группу из класса $\mathcal{C}$, продолжающий ρ, и, в частности, группа $B(t)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Если в дополнение к этому группа $B\rho$ не имеет кручения и подгруппы $H\rho$ и $K\rho$ изолированы в ней, то образ гомоморфизма σ можно считать группой без кручения и потому, если группа B аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения, то и группа $B(t)$ аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения.

Приводимое далее утверждение обобщает основные результаты из [3].

Следствие 2. Группа $B(t)$ является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой, если выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:

1) группа B принадлежит классу $\mathcal{C}$ и $H \cap K = 1$;

2) группа B $\mathcal{C}$-аппроксимируема, подгруппы H, K конечны и $H \cap K = 1$;

3) группа B аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг.

Нетрудно показать, что если Γ — конечный граф групп и все реберные подгруппы графа Γ конечны, то $\mathcal{C}$-аппроксимируемость фундаментальной группы $\pi_1(\Gamma)$ влечет за собой существование гомоморфизма этой группы на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективного на каждой реберной подгруппе. В общем случае, однако, наличие такого гомоморфизма, доставляемое теоремами 1 и 2, является более сильным утверждением, и именно оно зачастую используется при дальнейших исследованиях аппроксимируемости фундаментальных групп графов, реберные подгруппы которых уже не обязательно конечны (см., например, [2, 4, 6]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

Литература. [1] E. V. Sokolov, A characterization of root classes of groups. Comm. Algebra, 43:2 (2015), 856–860. [2] Е. А. Туманова, Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп. Модел. и анализ информ. систем, 21:4 (2014), 148–180. [3] Д. В. Гольцов, Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп. Матем. заметки, 97:5 (2015), 665–669. [4] Е. А. Туманова, Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением. Изв. вузов. Математика, 2015, № 10, 27–44. [5] Е. В. Соколов, Е. А. Туманова, Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп, Сиб. матем. журн., 57:1 (2016), 171–185. [6] Е. В. Соколов, Е. А. Туманова, Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами, Матем. заметки, 102:4 (2017), 597–612.

Ивановский государственный университет

e-mail: ev-sokolov@yandex.ru, helenfog@bk.ru

В. А. Стукопин (Ростов-на-Дону)

Об изоморфизме янгианов и квантовых петлевых супералгебр

Мы строим изоморфизм между янгианом специальной линейной супералгебры Ли и квантовой аффинной специальной линейной супералгеброй. Мы также распространяем построенное отображение на квантовый дубль янгиана и описываем образ построенного отбражения. Исследуем связь между категориями представлений янгиана и квантовой петлевой супералгебры.

Донской государственный университет, Южный математический институт

e-mail: stukopin@math.rsu.ru

А. Х. Табаров, **А. А. Давлатбеков** (Куляб, Таджикистан), **О. О. Комилов** (Душанбе, Таджикистан)

Порядок элемента и обобщение идемпотентного элемента в квазигруппах

Понятие порядок элемента для произвольных неассоциативных алгебраических структур разными авторами определены различными вариантами. Но общая идея, общий подход единый. Например, В.А.Шербаковым в работе [1] введено понятие (m,n) - элемента квазигруппы, где m,n - произвольные конечные натуральные числа. Более того, введены классы (m,n) - линейных и (m,n) - Т-квазигрупп. Ввиду отсутствия единичного элемента и закона ассоциативности в квазигруппах имеются различные подходы к определению порядка элемента в квазигруппах. М.М.Чобан и Л.Л.Кирияк в работе [2] ввели понятие (m,n) - единичного элемента и изучали топологические медиальные квазигруппы с (m,n) - единичным элементом. Известно [3], что всякая лупа Муфанг является диассоциативной, то есть произвольные два элемента лупы порождают подгруппу, левая лупа Бола является степенно ассоциативной, то есть любой элемент порождает подгруппу. Порядок элемента степенно ассоциативной лупы $(Q,\cdot)$ определяется как обычное понятие порядка элемента в группах [3].

Определение 1. [3] *Порядок элемента x степенно ассоциативной лупы $(Q,\cdot)$ называется порядок циклической группы $< x >$, которая порождается этим элементом.*

Определение 2.[1]*Элемент x квазигрупы $(Q,\cdot)$ имеет порядок (m,n), если существуют натуральные числа m и n, такие, что $L_x^m = R_x^n = \varepsilon$ и для произвольных m_1, n_1, где $1 \leq m_1 < n$, $1 \leq n_1 < n$, элемент x неявляется (m,n) - элементом, где L_x и R_x элементы мультипликативной группы $M(Q,\cdot)$ квазигруппы $(Q,\cdot)$.*

Замечание. Из определения 2 следует, что элемент L_x группы $M(Q,\cdot)$ имеет порядок m и элемент R_x имеет порядок n. Поэтому название (m,n) - порядок элемента можно интерпретировать как (L,R) порядок или двусторонней порядок элемента x.

Элемент x называется идемпотентым, если $x^2 = x$.

По индукции определяется правый (левый) идемпотентый элемент ступени $n(m)$, где $n,m \in N$.

Определение 3. *Элемент x называется правым идемпотентным ступени n, если*

$$\underbrace{(...((x \cdot x) \cdot x)...x) \cdot x}_{n-\text{раз}} = x, \tag{1}$$

Симметрично определяется левой идемпотентной элемент ступени m

$$\underbrace{x \cdot (...(x \cdot (x \cdot x))...)}_{m-\text{раз}} = x. \tag{2}$$

Для краткости тождество (1) и (2) обозначим следующим образом:

$$x^{[n]} = (\underbrace{(...(x \cdot x) \cdot x)...x) \cdot x}_{n-\text{раз}} = x, \quad x^{[n]} = x \tag{3}$$

Аналогично

$${}^{[m]}x = \underbrace{x \cdot (...x \cdot (x \cdot x))...)}_{m-\text{раз}} = x, \quad {}^{[m]}x = x \tag{4}$$

Если для элемента x выполняется одновременно тождества (3) и (4), то элемент x называется идемтпотентным ступени (n,m).

По существую определения 2 и 3 эквивалентны, в том смысле что элемент x квазигруппы $Q,\cdot$ имеющий порядок (m,n) это идемпотентный элементы ступени (m,n) и наоборот.

При $n = m = 2$ получим $x^2 = x$ обычное понятие идемтпотентного элемента в полугруппах, квазигруппах и т.д.

Пусть $x^{[n]} = x$, $y^{[n]} = y$ - две правоидемпотентные элементы ступени n, квазигруппы $(Q,\cdot)$, $\varphi \in Aut(Q,\cdot)$, $n \in N$.

Тогда
$$\varphi(x^{[n]}\cdot y^{[n]})=\varphi(x)^{[n]}\cdot\varphi(y)^{[n]},\quad \varphi(^{[k]}x\cdot^{[k]}y)=^{[k]}\varphi(x)\cdot^{[k]}\varphi(y).$$

Если φ - гомоморфизм квазигруппы $(Q,\cdot)$ на квазигруппу $(Q,\circ)$. то

$$\varphi(x^{[n]})=(\varphi(x))^{[n]},\quad \varphi(^{[k]}x)=^{[k]}(\varphi(x)).$$

Доказательство легко проводится индукцией по n.

Пример. Пусть $(Q,\cdot)$ - квазигруппа 4-того порядка $Q=\{a,b,c,d\}$ со следующей таблицей умножения

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	d	c	b	a
d	b	a	d	c

легко проверить, что $[a]^4=a$, $[b]^4=b$, $[c]^4=c$, $[d]^4=d$. то есть. $[x]^4=x,\forall x\in Q$.

Далее $^{[4]}a=a$, $^{[4]}b\neq b$, $^{[3]}c=c$, $^{[3]}d=d$, то есть $[a]^4=^{[4]}a=a$.

Таким образом $\forall x\in Q$, $x=\{b,c,d\}$, $[x]^3=^{[4]}x=x$, $^{[3]}b=b$, $^{[3]}b=b^{[4]}=b$, $^{[3]}d=d$, $^{[4]}d\neq d$. Элемент a является идемпотентным элементом ступени (4,4), элементы b,c,d идемпотентные элементы ступени (3,4).

Литература. [1] V. A. Sherbakov. On orders of elements in quasigroups. Bul. Acad. Stinite Repub. Moldova, Mat (2004) no.2, p.49-54.[2] M. M. Choban and L. L. Kiriyak The medial topological ouasigroups with identities, Applied and Industrial Mathematics. Oradea, Romania and Chishinau, Moldova, Abstracts (Kishinev, Moldova), August 1995, p.11.[3] В. Д. Белоусов. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.

Кулябский государственный университет им. А.Рудаки
Таджикский национальный университет
e-mail: tabarov2010@gmail.com

А. В. Тищенко (Москва)

О мощности решетки подмногообразий полугруппового многообразия $varP_2^1$

Определение 1. Пусть $P_2^1=D^1=\langle a,b,1|a^2=ab=a,b^2a=b^2\rangle$ — пятиэлементный моноид.

Теорема 1 [1]. Любая полугруппа порядка пять или менее, отличная от P_2^1, является наследственно конечно базируемой. Следовательно, в этих случаях решетка $L(varS)$ всех подмногообразий многообразия, порожденного полугруппой S, является не более, чем счетной.

Вопрос 1 [2]. Является ли многообразие $varP_2^1$ наследственно конечно базируемым? Или, эквивалентно, является ли решетка $L(varP_2^1)$ всех подмногообразий многообразия, порожденного полугруппой P_2^1, не более, чем счетной?

Вопрос 2. Какова мощность решетки $L(\mathbf{SlwSl})$?

Оказывается вопросы 1 и 2 отчасти связаны между собой.

Предложение 1. $varP_2^1\subseteq\mathbf{SlwSl}$.

Предложение 2.
$$varP_2^1=varP_2\vee varL_2^1\vee varN_2^1. \tag{1}$$

Замечание 1. Решеточное объединение любых двух подмногообразий в (1) является наследственно конечно базируемым.

Частично предложенная информация докладывалась на конференциии кафедры высшей алгебры в 2018 году.

Литература. [1] E. W. H. Lee, Finite basis problem for semigroups of order five or less: generalization and revisitation. Studia Logica, 101 (2013), 95–115. [2] C. C. Edmunds, E. W. H. Lee, K. W. K. Lee, Small semigroups generating varieties with continuum many subvarieties. Order, 27 (2010), 83–100.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

e-mail: alextish@bk.ru

А. В. Токтарев (Москва)

Ортогональность двух идемпотентных квазигрупп со свойством: $x(xy) = y$

Определение 1. Рассмотрим аддитивную абелеву группу (G,+) нечетного порядка $N \in \mathbb{N}$, пусть $G^* = G \backslash \{0\}$ - множество ее ненулевых элементов,

$$G^* = \bigcup_{i=1}^{(N-1)/2} \{x_i, y_i\}$$

Тогда множество

$$X = \{\{x_i, y_i\} | i = 1, 2, ..., (N-1)/2\}$$

называется стартером, если выполнено следующее свойство:

$$G^* = \bigcup_{i=1}^{(N-1)/2} \pm(x_i - y_i).$$

Предложение 1. Для любой аддитивной абелевой группы (G,+) нечетного порядка без элементов порядка 2 и стартера X над (G,+) множество с операцией

$$Q(X) = (G, \times)$$

такое что для любых двух $s_1, s_2 \in G$

$$s_1 \times s_2 = \begin{cases} f_X(s_2 - s_1) + s1, s1 \neq s2 \\ s1, s1 = s2 \end{cases}$$

является идемпотентной квазигруппой со свойством

$$x \times (x \times y) = y.$$

Лемма 1. Для любых двух стартеров

$$X = \{\{x_i, y_i\} | i = 1, 2, ..., (N-1)/2\}$$

и

$$X' = \{\ \{x_i', y_i'\} | i = 1, 2, ..., (N-1)/2\}$$

над абелевой группой $(G, +)$ нечетной мощности без элементов порядка 2 таких, что

$$G^* = \{f_X(g_i) - f_{X'}(g_i) | g_i \in G^*\}$$

квазигруппы $Q(X)$ и $Q(X^i)$ ортогональны.

Рассмотрим конечные поля F_q для $q = ef + 1, e = 2^k, k > 1, f$ - нечетное. Рассмотрим примитивный элемент $g \in F_q^*$ и следующее разбиение мультипликативной группы F_q^* на e классов размера f:

$$C_i = \{g^{et+i} | t = 0, ..., f - 1\}$$

На множестве классов опеределим разбиение $\{V^+, V^-, D^+, D^-\}$ на 4 класса размера 2^{s-2}:

1) Вычеты со знаком + (обозначим их как V^+). $CV^+ = \bigcup_{g \in V^+} g$
2) Вычеты со знаком - (обозначим их как V^-); $CV^- = \bigcup_{g \in V^-} g$
3) Вычеты со знаком + (обозначим их как D^+); $CD^+ = \bigcup_{g \in D^+} g$
4) Вычеты со знаком - (обозначим их как D^-); $CD^- = \bigcup_{g \in D^-} g$

Для заданных коэффициентов $\beta_1, \beta_2 \in NQR(F_q^*)$ для некоторого разбиения $T = \{V^+, V^-, D^+, D^-\}$ на множестве классов $\{C_0, C_1, ..., C_{2^s-1}\}$ обозначим TQ-стартер как стартер вида:

$$X_T(\beta_1, \beta_2) = \{(x, \beta_1 x), (-x, \beta_2 x)\},$$

где $x \in CV^+$,$-x \in CV^-$,$\beta_1 x \in CD^+$,$\beta_2 x \in CD^-$.

Лемма 4. Для любого нечетного числа $q = p^s$, такого что $q = 2^s f + 1$, где $f \in \mathbb{N}$ - нечетное число, $s \in \mathbb{N}, s > 1$, p - простое нечетное число, (s-четное и $p^s = 1 \pmod 4$) или ($p = 1 \pmod 8$) и некоторого разбиения $T = \{V^+, V^-, D^+, D^-\}$ на множестве классов $\{C_0, C_1, ..., C_{2^s-1}\}$, если существуют два такие элемента

$\beta_1 \in C_i, C_i \in D^+$, $\beta_2 \in C_{i+2^{s-1}}, C_{i+2^{s-1}} \in D^-$, что

$$\beta_1 - 1 \in NQR(F_q^*)$$
$$\beta_2 + 1 \in QR(F_q^*)$$
$$\beta_2 - 1 \in NQR(F_q^*)$$
$$\beta_1 + 1 \in QR(F_q^*)$$
$$\beta_1 - \beta 2 \in NQR(F_q^*)$$

или

$$\beta_1 - 1 \in QR(F_q^*)$$
$$\beta_2 + 1 \in NQR(F_q^*)$$
$$\beta_2 - 1 \in QR(F_q^*)$$
$$\beta_1 + 1 \in NQR(F_q^*)$$
$$\beta_1 - \beta 2 \in NQR(F_q^*),$$

то квазигруппы $Q(X_T(\beta_1, -\beta_2))$, $Q(X_T(\beta_2, -\beta_1))$ ортогональны.

Литература. [1] Основы теории квазигрупп и луп. Белоусов В.Д. Издательство наука, 1967 год. [2] On two-quotient strong starters for Fq . Carlos A. Alfaro, Christian Rubio-Montiel, Adrian Vazquez Avila. http://arxiv.org/abs/1609.05496. Submitted on 18 Sep. 2016.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: toktarev@gmail.com

В. Л. Усольцев (Волгоград)

О решетках подалгебр Риса в некоторых классах тернарных алгебр с одним оператором

Обозначим через $\triangle_A$ нулевую конгруэнцию алгебры A, а через $ConA$ и $SubA$ — решетки ее конгруэнций и подалгебр соответственно. Подалгебра $B \in SubA$ называется подалгеброй Риса, если $B^2 \cup \triangle_A$ есть конгруэнция алгебры A. Конгруэнция $\theta \in ConA$ называется конгруэнцией Риса, если $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой $B \in SubA$.

Положим $\emptyset \in SubA$. При этом условии совокупность всех подалгебр Риса алгебры A образует решетку $Sub_R A$ [1] относительно включения. Мы рассматриваем решетки подалгебр Риса алгебр $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f, где d — одна из тернарных операций $p(x, y, z)$, $s(x, y, z)$, $m(x, y, z)$, определения которых можно найти в [2]. Операция $p(x, y, z)$ является мальцевской и операцией Пиксли (или 2/3-операцией меньшинства), то есть, удовлетворяет тождествам $p(x, y, y) = p(y, y, x) = p(x, y, x) = x$. Операция $s(x, y, z)$ также является мальцевской, и кроме того, операцией меньшинства, то есть, удовлетворяет тождествам $s(x, y, y) = s(y, y, x) = s(y, x, y) = x$. Операция $m(x, y, z)$ является операцией большинства, то есть, удовлетворяет тождествам $m(y, x, x) = m(x, x, y) = m(x, y, x) = x$.

Через C_h^t, где $h \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, обозначается унар $\langle A, f\rangle$ с порождающим элементом a, заданный определяющим соотношением $f^t(a) = f^{t+h}(a)$. Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n \geqslant 0, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A. Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их суммой и обозначается через $B+C$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$.

Теорема 1. Решетка $Sub_R A$ подалгебр Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$ является дистрибутивной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ либо содержит не более одного одноэлементного подунара, либо изоморфен $C_1^0 + C_1^0 + B$, где B — произвольный подунар (возможно, пустой) унара $\langle A, f\rangle$, не содержащий неподвижных элементов.

Теорема 2. Решетка $Sub_R A$ подалгебр Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$ является модулярной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ либо содержит не более одного одноэлементного подунара, либо все его одноэлементные подунары являются компонентами связности.

Литература. [1] R. F. Tichy, The Rees congruences in universal algebras. Publ. Inst. Math. (Beograd), 29 (1981), 229–239. [2] В. Л. Усольцев, О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами. Чебышевский сб., 15(3) (2014), 100–113.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

e-mail: usl2004@mail.ru

Л. М. Цыбуля (Москва)

О T-пространствах n-слов в относительно свободной алгебре Грассмана без единицы в характеристике 2

В настоящей заметке продолжается изучение вопроса о взаимосвязи не унитарно замкнутых T-пространств $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ при $r > n$ (см. [1], [2]) в *относительно свободной алгебре Грассмана* $\mathbb{F}^{(3)} = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle/([[x_1, x_2], x_3])^T$ *без единицы* над бесконечным полем k характеристики 2. Случай произвольной нечётной характеристики здесь не рассматривается, но будет предметом дальнейшего изучения в последующих работах. В нулевой характеристике все довольно прозрачно (см. [1]): $\mathbb{F}^{(3)} = \mathbb{W}_1 \supset \mathbb{W}_2 \supset \mathbb{W}_3 \supset \mathbb{W}_4 \supset \ldots$.

Напомним, что образы свободных переменных алгебры $k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ обозначаются теми же буквами. T-пространство $\mathbb{W}_n$ порождается всеми *n-словами*, т.е. одночленами, содержащими каждую свою переменную с кратностью n (ниже для удобства $\mathbb{W}_n$ иногда будем называть T-пространством n-слов). Именно T-пространство 2-слов в характеристике 2 дало первый пример не конечно базируемого T-пространства [3], практически послужившего основой для решения аналога проблемы Шпехта в ненулевой характеристике. Примерно в это же время другими авторами (см. [4], [5]) были предложены новые контрпримеры к этой проблеме, в той или иной мере использующие конструкцию бесконечно базируемых T-пространств в T-пространствах n-слов.

Согласно результатам работы [2] в характеристике 2 можно построить следующую диаграмму строгих включений, несколько проясняющую связь между T-пространствами r-слов и

n-слов.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{F}^{(3)} = & \mathbb{W}_1 & \supset & \mathbb{W}_{m_1} & \supset & \mathbb{W}_{m_2} & \supset & \mathbb{W}_{m_3} & \supset & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_2 & \supset & \mathbb{W}_{2n_1} & \supset & \mathbb{W}_{2n_2} & \supset & \mathbb{W}_{2n_3} & \supset & \ldots \\
& \cup & & ? & & ? & & ? & & \\
& \mathbb{W}_4 & \supset & \mathbb{W}_{4r_1} & ? & \mathbb{W}_{4r_2} & ? & \mathbb{W}_{4r_3} & ? & \ldots \\
& \cup & & ? & & ? & & ? & & \\
& \mathbb{W}_8 & \supset & \mathbb{W}_{8s_1} & ? & \mathbb{W}_{8s_2} & ? & \mathbb{W}_{8s_3} & ? & \ldots \\
& \cup & & ? & & ? & & ? & & \\
& \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & &
\end{array}
$$

Здесь $m_1 > 1$, $(m_i, 2) = 1$, $m_i < 2n_i$, $(n_i, 2) = 1$, $n_i < 2r_i$, $(r_i, 2) = 1$, $r_i < 2s_i$, $(s_i, 2) = 1$, $m_i < m_j$, $n_i < n_j$, $r_i < r_j$, $s_i < s_j$ и т.д. при $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots$. В [2] было доказано, что знаки вопросов всюду в этой диаграмме заменяются на знаки строгих включений, если r_i и r_j, s_i и s_j, а также n_i и r_i, r_i и s_i, и т.д., соответственно, связаны отношением делимости (заметим, что для первых двух строк делимости n_i на m_i, а также n_j на n_i и m_j на m_i не требуется). Однако, как показывает следующая теорема, делимость r на n не нужна, если соответствующие им T-пространства $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ находятся в одной и той же строке диаграммы.

Теорема 1. Пусть r и n делятся на одну и ту же степень 2, причём $r > n$. Тогда в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ над полем характеристики 2 выполнено строгое включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.

Положив в приведённой диаграмме $m_i = 2i + 1 = n_i = r_i = s_i = \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$ и используя утверждение теоремы 1, построим следующую диаграмму строгих включений между рассматриваемыми T-пространствами.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{F}^{(3)} = & \mathbb{W}_1 & \supset & \mathbb{W}_3 & \supset & \mathbb{W}_5 & \supset & \mathbb{W}_7 & \supset & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_2 & \supset & \mathbb{W}_6 & \supset & \mathbb{W}_{10} & \supset & \mathbb{W}_{14} & \supset & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_4 & \supset & \mathbb{W}_{12} & \supset & \mathbb{W}_{20} & \supset & \mathbb{W}_{28} & \supset & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_8 & \supset & \mathbb{W}_{24} & \supset & \mathbb{W}_{40} & \supset & \mathbb{W}_{56} & \supset & \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & &
\end{array}
$$

Из результатов работы [2] следует, что если r делится на меньшую степень 2, чем n (или вообще не делится на 2), то при $r > n$ любой элемент $\mathbb{W}_r$ произвольной строки последней диаграммы не связан отношением включения ни с каким элементом $\mathbb{W}_n$ из нижеследующих строк, хотя их пересечение ненулевое: $\mathbb{W}_r \not\subset \mathbb{W}_n$, $\mathbb{W}_r \not\supset \mathbb{W}_n$, $\mathbb{W}_r \cap \mathbb{W}_n \neq \{0\}$.

В случае же, когда r делится на большую степень 2, чем n, вопрос о включении $\mathbb{W}_r$ в $\mathbb{W}_n$ остается пока открытым. Имеются как положительные, так и отрицательные примеры. С одной стороны, из этой диаграммы видно, что T-пространства n-слов из разных строк могут быть связаны отношением строго включения, например, $\mathbb{W}_{20} \subset \mathbb{W}_6$, хотя 6 не делит 20. Можно также показать, что $\mathbb{W}_{24} \subset \mathbb{W}_{10}$. С другой стороны, несложно проверить, что $\mathbb{W}_{24} \not\subset \mathbb{W}_{20}$. Не известно, выполнено ли включение $\mathbb{W}_{12} \subset \mathbb{W}_{10}$. Но доказано, что если $r > n$, то любой элемент $\mathbb{W}_r$ диаграммы, кроме как из первой строки, лежит в $\mathbb{W}_n$ самой верхней строки, причем делимость r на n не нужна, как утверждалось в [2].

Теорема 2. Если $r > n$, то при четном r и нечетном n в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ над полем характеристики 2 выполнено строгое включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.

По-видимому, имеют место аналоги теорем 1 и 2 в произвольной нечетной характеристике. Доказательству этих аналогов и решению открытых вопросов будут посвящены наши дальнейшие исследования.

Литература. [1] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля. О структуре относительно свободной алгебры Грассмана. // Фундам. прикл. мат., 2009, том 15, №8, с. 3–93. [2] Л. М. Цыбуля. Основные T-пространства относительно свободной алгебры Грассмана без 1 // Фундам. прикл. мат. 2018.

В печати. [3] А. В. Гришин. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 101–118. [4] В. В. Щиголев. Примеры бесконечно базируемых T-идеалов // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 307–312. [5] А. Я. Белов. О нешпехтовых многообразиях // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 47–66.

Московский педагогический государственный университет

e-mail: liliya-kinder@mail.ru

А. И. Чистопольская (Москва)

Нильпотентные порождающие полупростых алгебр Ли

Поиск минимального набора порождающих алгебры является важной и активно изучаемой задачей в теории алгебр Ли. В 1951 году Кураниши [5] показал, что любая полупростая алгебра Ли над полем нулевой характеристики порождается двумя элементами. Через 25 лет Ионеску [4] доказал, что если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то для любого ненулевого элемента $X \in \mathfrak{g}$ найдётся такой элемент $Y \in \mathfrak{g}$, что X и Y порождают $\mathfrak{g}$. В работе [1] 2009 года Боа доказал, что полупростая алгебра Ли над полем характеристики, не равной 2 и 3, порождается двумя элементами, а также перенёс результат Ионеску на случай основного поля характеристики отличной от $2, 3$.

В работе [2] мы получили следующий аналог результата Ионеску для нильпотентных порождающих алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — бесконечное поле характеристики, отличной от 2.

Теорема 1. Для любого ненулевого нильпотентного элемента $X \in \mathfrak{g}$ найдётся такой нильпотентный элемент $Y \in \mathfrak{g}$, что X и Y порождают $\mathfrak{g}$.

В этом году с помощью общей теории полупростых алгебр Ли удалось обобщить эту теорему на случай симплектической алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики ноль.

Литература. [1] J.-M. Bois. Math. Z. 262 (2009), no. 4, 715-741. [2] A.Chistopolskaya. Lin. Algebra Appl. 559, 2018, 73-79. [3] D.H. Collingwood and W.M. McGovern. Nilpotent orbits in Semisimple Lie Algebras. Van Nostrand Reinhold, New York, 1993. [4] T. Ionescu. Lin. Algebra Appl. 15 (1976), 271-292. [5] M. Kuranishi. Nagoya Math. J. 2 (1951), 63-71

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: achistopolskaya@gmail.com

И. А. Чубаров (Москва)

О конечных группах, критических относительно некоторых классов групп

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Группа G называется критической относительно класса групп F, если она не принадлежит F, а все ее собственные подгруппы принадлежат. Исследование критических групп началось с минимальных неабелевых групп (Миллер и Морено [1]). Затем О.Ю. Шмидт определил минимальные ненильпотентные группы [2] (с тех пор такие группы называют группами Шмидта), его работы были развиты и обобщены многими авторами (см. по этому поводу статьи [4,5] в сборнике [3]).

Строение групп Шмидта использовал Виландт при доказательстве сопряженности холловских подгрупп порядка d в группе с нильпотентной холловской подгруппой порядка d [6].

Изучались минимальные несверхразрешимые группы (см. [7,8]). Напомним, что группа называется сверхразрешимой, если она обладает главным рядом с факторами простых порядков. Описание минимальных несверхразрешимых групп получил В.Т.Нагребецкий [9].

В докладе будет рассказано об истории и современном состоянии этих исследований. Будет рассмотрена возможность обобщения теоремы Виландта [6] на группы с сверхразрешимой холловской подгруппой.

Литература. [1] G. A. Miller G.A., H. C.Moreno, Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. Trans. Amer. Math. Soc., 1903, N 4, 398-404. [2] О. Ю. Шмидт, Группы, все подгруппы которых специальные. Матем. сборник,1924, N 3, 366-372. [3] Отто Юльевич Шмидт (1891-1956)- к 125-летию со дня рождения. –М., 2017. – 232 с. [4] Л. А. Шеметков, Алгебраическая школа Отто Юльевича Шмидта в Гомеле. В сборнике [3], с.158-185. [5] В. И. Логинов, И. А. Чубаров, Отто Юльевич Шмидт и его традиции в теории конечных групп. В сборнике [3], с.192-209. [6] H. Wielandt, Zum Satz von Sylow. I. Math.Zeitschr.,1954, 60, 407-408; II. Math.Zeitschr.,1959, 71, 461-462. [7] B. Huppert, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math.Zeitschr.,1954, 60, 409-434. [8] K. Doerk, Minimal nicht ueberauflosbare, endliche Gruppen. Math.Zeitschr.,1966, 91, 198-205. [9] В. Т. Нагребецкий, О конечных минимальных несверхразрешимых группах. "Конечные группы", Минск, 1975, с.104-108.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: igor.chubaroff@gmail.com

Г. Б. Шабат (Москва)

Поверхности, разбиваемые на квадраты, и кривые над числовыми полями

В докладе будет рассказано об аналоге одного старого результата автора и В.А. Воеводского [3], согласно которому риманова поверхность допускает равностороннюю триангуляцию тогда и только тогда, когда соответствующая ей алгебраическая кривая определяема над полем алгебраических чисел. Будет сформулирован аналогичный результат, в котором равносторонние треугольники заменяются квадратами. Оба результата связывают между собой разделы математики, на первый взгляд далеко отстоящие друг от друга, и доказательства обоих основаны на идеях А. Гротендика [1].

Поверхности, разбиваемые на квадраты (называемые также *поверхностями "в клеточку"* и *оригами*) интенсивно изучаются в современной математике, см., например, [2]. Возможно, статистические результаты, полученные относительно этих поверхностей, удастся применить к вопросам о типичных свойствах детских рисунков со многими рёбрами – например, о распределении размеров их орбит Галуа.

Литература. [1] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. Geometric Galois actions, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. [2] A. Zorich, Flat Surfaces. Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry Vol.I, P. Cartier; B. Julia; P. Moussa; P. Vanhove (Editors), Springer Verlag, 2006, pp. 439–586. [3] В. А. Воеводский, Г. Б. Шабат, Равносторонние триангуляции римановых поверхностей и кривые над полями алгебраических чисел, Доклады АН СССР. 304 (1989), No 2, 265–268.

Российский Государственный Гуманитарный Университет

e-mail: george.shabat@gmail.com

А. А. Шафаревич (Москва)

Гибкость нормальных S-многообразий

Доклад основан на работе [1].

Алгебраическое многообразие X называется гибким, если касательное пространство в каждой его регулярной точке порождено касательными векторами к орбитам различных действий одномерных унипотентных групп. В статье [2] было показано, что для аффинных многообразий, имеющих размерность большую единицы, гибкость эквивалентна бесконечной транзитивности действия группы регулярных автоморфизмов на множестве гладких точек.

В 1972 году Э.Б. Винберг и В.Л. Попов ввели класс аффинных S-многообразий, т.е. таких многообразий, на которых действует связная алгебраическая группа G с открытой орбитой, причем стационарная подгруппа любой точки этой орбиты содержит максимальную унипотентную подгруппу группы G.

В нашей работе мы доказываем, что нормальные аффинные S-многообразия, у которых нет обратимых регулярных функций, за исключением констант, являются гибкими.

Литература. [1] S. Gaifullin, A. Shafarevich, Flexibility of normal affine horospherical varieties. arXiv:1805.05024 (2018) [2] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg, Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. 162 (2013), No 4, 767–823.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

e-mail: shafarevich.a@gmail.com

А. А. Шлепкин (Красноярск, Россия)

Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $L_3(2^k)$, $L_4(2^l)$

Группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1]. В Коуровской тетради [2] поставлен вопрос 14.101:

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа ?

Получен частичный ответ на этот вопрос для групп, насыщенных конечными простыми группами лиева типа $L_3(2^n)$ и $L_4(2^l)$. Положим

$$\mathfrak{C} = \{L_3(2^k) \mid k - \text{ науральное, не фиксированное}\},$$

$$\mathfrak{A} = \{L_4(2^l) \mid l \leq l_0 - \text{ науральное, фиксированное}\},$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{C}.$$

Теорема 1. Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$ Тогда G изоморфна одной из групп следующего множества

$$\{L_3(R), L_4(2^l)\},$$

где R — локально конечное поле.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 18-71-10007.

Литература. [1] А. К. Шлепкин, О некоторых периодических группах, насыщенных конеными простыми группами, Математические труды. 1998. Т.1, № 1. С. 129–138. [2] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 18-е изд., Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2014.

Сибирский федеральный университет

e-mail: shlyopkin@mail.ru

А. К. Шлёпкин, **А. С. Федосенко** (Красноярск), **К. А. Филиппов**

О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями циклических групп нечетного порядка и линейных групп степени 3

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [2].

Напомним, что группа G называется группой Шункова, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу [1]. Данный класс групп был введен В.П. Шунковым в 70-е годы, и первоначально, сам В.П. Шунков называл такие группы сопряженно бипримитивно конечными.

Группы Шункова отличны от периодических групп. Кроме того, построены примеры групп Шункова содержащих элементы бесконечного порядка и не обладающих периодической частью. Напомним, что под периодической частью группы понимается множество всех элементов конечного порядка группы, при условии, что они образуют подгруппу.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех конечных циклических групп нечётного порядка, $\mathfrak{B} = \{L_3(q) \mid q = 2^k, k = 1, 2, \cdots\}$ — множество всех унитарных групп степени 3 над конечными полями четной характеристики.

Теорема 1. Группа Шункова G, насыщенная группами из множества

$$\mathfrak{R} = \{B \times A | A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\},$$

обладает периодической частью, которая локально конечна и изоморфна $L_3(Q) \times I$, где I — локально циклическая группа без инволюций, Q — локально конечное поле четной характеристики.

Литература. [1] Сенашов В. И., Шунков В. П., Группы с условиями конечности. *Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН,* (2001) 326 с. [2] Шлёпкин А. К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. *III межд. конф. по алгебре, тезиы докладов, Красноярск,* (1993).

Красноярский государственный аграрный университет, Сибирский федеральный университет

e-mail: filippov_kostya@mail.ru

e-mail: ak_kgau@mail.ru

В. В. Шокуров (Москва)

Ограниченность логканонического индекса

Пусть $(X/Z \ni o, B)$ – максимальная логканоническая 0-пара, где B – граница неприводимого, нормального многообразия или алгебраического пространства X, а $X \to Z \ni o$ – собственный морфизм над окрестностью точки o базы Z. Пара называется глобальной, если многообразие X отображается целиком в точку o. В противном случае – пара локальна. База Z предполагается афинной схемой над основным полем k. Логканоничность пары $(X/Z \ni o, B)$ означает логканоничность пары (X, B). Логканоничность максимальна, если пара (X, B) имеет логканонический центр над точкой o. В глобальном случае это выполнено всегда, поскольку многообразие X, а, точнее, его общая точка является всегда логканоническим центром по определению и отображается в точку o. В локальном случае максимальность означает существование собственного по вложению логканонического центра пары (X, B) над точкой o. Если это условие не выполнено, то его можно добиться добавлением подходящей положительной вещественной кратности достаточно общего вертикального дивизора Картье на X, содержащего центральный слой – слой над точкой o и численно тривиального над базой Z. Требуемая кратность называется логканоническим порогом. Полученная пара максимально логканонична в том смысле, что увеличение кратности выше порога нарушает логканоничность. Иначе говоря, такой порог равен нулю для максимальных логканоничских пар $(X/Z \ni o, B)$.

Напомним, что пара $(X/Z \ni o, B)$ является 0-парой, если она логканонична и $K + B \equiv 0/Z \ni o$, где K – канонический дивизор многообразия X.

Пусть $\Gamma \subset [0, 1]$ – подмножество единичного интервала вещественных чисел, удовлетворяющее условию обрыва убывающих цепей и содержащее 0. Например таково гиперстандартное множество $\Phi(\mathfrak{R})$ ассоциированное с конечным подмножеством $\mathfrak{R}$ неотрицательных вещественных чисел [3] и $1 \in \mathfrak{R}$. Для дивизора B мы пишем, что $B \in \Gamma$, если все его кратности лежат в Γ. Такой дивизор является границей.

Пусть $\langle K + B\rangle$ – минимальное рациональное афинное подпространство в пространстве вещественных дивизоров $\mathrm{Div}_{\mathbb{R}} X$ многообразия X. Всякое такое подпространство задаётся линейными (возможно неоднородными) уравнениями с целыми коэффициентами в стандартном базисе пространства дивизоров. Будем говорить, что пространство ограничено, если оно задаётся линейными уравнениями с целыми ограниченными коэффициентами. Если все кратности границы B рациональны, то ограниченность равносильна конечности возможных кратностей. По рациональности теории пересечений всякий дивизор $D \in \langle K + B\rangle$ как и дивизор $K + B$

численно тривиален над $Z \ni o$. Более того каждый такой дивизор $\mathbb{R}$-линейно тривиален над $Z \ni o$. В частности, некоторая положительная кратность каждого рационального дивизора $D \in \langle K+B \rangle$ линейно тривиальна.

Пусть I – целое положительное число. Будем говорить, что I – логканонический индекс пары $(X/Z \ni o, B)$, если пространство $\langle K+B \rangle$ имеет рациональные образующие D_i такие, что кратность ID_i каждого дивизора D_i линейно тривиальна над $Z \ni o$. То что дивизоры D_i являются образующими пространства $\langle K+B \rangle$ означает, что минимальное рациональное подпространство в $\mathrm{Div}_{\mathbb{R}} X$, содержащее все дивизоры D_i, совпадает с $\langle K+B \rangle$. В частности, если все кратности границы B рациональны, то дивизор $I(K+B)$ линейно тривиален над $Z \ni o$.

Гипотеза. Для множества Γ и любого натурального числа d существует конечное подмножество $\Gamma(d) \subseteq \Gamma$ и целое положительное число $I(d,\Gamma)$ такие, что если размерность максимальной пары $(X/Z \ni o, B)$ равна d и $B \in \Gamma$, то

(1) $B \in \Gamma(d)$;

(2) пространство $\langle K+B \rangle$ ограничено и

(3) $I = (d,\Gamma)$ – логканонический индекс пары $(X/Z \ni o, B)$ как это было объяснено выше.

Теорема [4]. Гипотеза верна, если морфизм $X \to Z \ni o$ имеет слабый тип Фано, а k – поле характеристики 0.

Слабый тип Фано – обобщение типа Фано и означает почти тоже самое: на многообразии X существует эффективная граница B' с вещественными коэфициентами такая. что $(X/Z \ni o, B')$ – Кавамата логтерминальная 0-пара и граница B' объёмна. Однако относительная проективность $X/Z \ni o$ не предполагается.

Доказательство основано на теории n-дополнений. Однако для доказательства конечности (1) в глобальном случае имеются и другие подходы [1] [2].

Литература. [1] C. Birkar, V. V. Shokurov, Mld's vs thresholds and flips. J. reine angew. Math. 638 (2010), 209–234. [2] C. Hacon, J. McKernan, C. Xu, ACC for log canonical thresholds. Ann. Mathematics, 180 (2014), 523–571. [3] Yu. G. Prokhorov, V. V. Shokurov, Towards the second main theorem on complements. J. Algebraic Geometry, 18 (2009), 151–199. [4] V. V. Shokurov, Existence and boundedness of n-complements, in preparation 124 pp

Отдел алгебраической геометрии, институт математики им. В. А. Стеклова, РАН
Johns Hokins University

e-mail: shokurov@mi-ras.ru
shokurov@math.jhu.edu

Павел Штейнер (Москва)

Линейные отображения, сохраняющие многомерную мажоризацию матриц

Пусть $M_{n,m}$ — пространство действительных матриц размера $n \times m$ (пишем M_n при $m = n$). Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $x_{[j]}$ его j-ю по невозрастанию координату.

Определение 1. Пусть x, v — вектора из $\mathbb{R}^n$. Говорим, что v *мажорирует* x, $x \preceq v$ (или $v \succeq x$), если $\sum_{j=1}^{k} x_{[j]} \leq \sum_{j=1}^{k} v_{[j]}$ для $k = 1, \ldots, n$, и при $k = n$ достигается равенство.

Определение 2. Различные типы мажоризаций матриц определяются следующим образом (см. [2], [3]):

- Слабая мажоризация: $A \preceq^w B$, если существует такая строчно-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.

- Мажоризация по направлению: $A \preceq^d B$, если $Ax \preceq Bx$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$.

- Сильная мажоризация: $A \preceq^s B$, если существует такая двояко-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.

Определим многомерную матричную мажоризацию на $M_{n,m}^k$:

Определение 3. Пусть $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$, $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_k) \in M_{n,m}^k$.

Тогда $\mathcal{A} \preceq^x \mathcal{B}$, если $A_i \preceq^x B_i$ для любого $i = 1, \dots, k$

Линейные операторы на $M_{n,m}^k$ определяются следующим образом:

Пусть $\mathcal{T} : M_{n,m}^k \to M_{n,m}^k$ — линейный оператор. Тогда

$$\mathcal{T}(0, \cdots, 0, X_j, 0, \cdots, 0) = (T_1^j(X_j), \cdots, T_k^j(X_j))$$

$$\mathcal{T}(X_1, \dots, X_k) = (\underbrace{T_1^1(X_1) + \cdots + T_k^1(X_k)}_{\text{компонента } 1}, \cdots, \underbrace{T_1^k(X_1) + \cdots + T_k^k(X_k)}_{\text{компонента } k})$$

где T_i^j — линейные операторы на $M_{n,m}$

Замечание 1. Пусть $\mathcal{T}$ — линейный оператор на $M_{n,m}^k$, определенный так, как показано выше. Тогда, если $\mathcal{T}$ сохраняет многомерную мажоризацию какого-либо типа, то каждый T_i^j сохраняет матричную.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{T}$ — линейный оператор на $M_{n,m}^k$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- $\mathcal{A} \preceq^w \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A}) \preceq^w \mathcal{T}(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^k$
- Каждый T_i^j — линейный оператор, сохраняющий слабую мажоризацию матриц. Более того, в каждой компоненте j только 1 оператор T_i^j ненулевой.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{T}$ — линейный оператор на $M_{n,m}^k$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- $\mathcal{A} \preceq^d \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A}) \preceq^d \mathcal{T}(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^k$
- $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A}) \preceq^s \mathcal{T}(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^k$
- $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A}) \preceq^d \mathcal{T}(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^k$
- Каждый T_i^j может иметь вид:
  1. $\exists\, S_1, \dots, S_m \in M_{n,m} : |R(S_p)| = 1\ \forall p$ и $T_i^j(X) = \sum\limits_{p=1}^{m} (e^t x^p) S_p$.
  2. $\exists\, p$ и $S_1, \dots, S_m \in M_{n,m} : |R(S_p)| > 1$ и $T_i^j(X) = \sum\limits_{p=1}^{m} (e^t x^p) S_p$.
  3. $\exists\, S \in M_m : T_i^j(X) = JXS$.
  4. $\exists\, R, S \in M_m$ и $P \in P_n : R \neq 0$ и $T_i^j(X) = PXR + JXS$.

  Более того, если T_i^j имеет вид (4), то остальные T_q^j в компоненте j имеют вид отличный от (2) и (4).

Автор доклада благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и ценные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ-16-11-10075.

Литература. [1] G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner. Majorization for matrix classes. Linear Algebra Appl., 555(2018), 201–221. [2] A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Second Edition, Springer, New York, 2011. [3] F.D. Martínez Pería, P.G. Massey, L.E. Silvestre. Weak matrix majorization. Linear Algebra Appl., 403 (2005) 343–368.

e-mail: pashteiner@ya.ru

А. А. Ядченко (Гомель, Беларусь)

О степенях некоторых неприводимых характеров и нормальных подгруппах конечных групп

Пусть π — множество простых нечетных чисел, G — конечная π-разрешимая группа, которая имеет точный комплексный характер χ степени n и содержит π-холлову TI-подгруппу H. Если характер χ неприводим, то в [1] утверждается, что либо $H \lhd G$, либо n делится на $|H|$ или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1$ или $1(\mathrm{mod}|H|)$.

Допустим, что $(\chi_H, 1_H)_H \neq 0$. По закону взаимности Фробениуса для характеров $((1_H)^G, \chi)_G \neq 0$. Уточним утверждение теоремы из [1] для степеней таких характеров χ. Обозначим $\mathrm{Irr}((1_H)^G)$ – множество всех неприводимых компонент характера $(1_H)^G$.

Теорема 1. Пусть G – конечная группа с π-холловой TI-подгруппой H нечетного порядка. Тогда $H \lhd G$ тогда и только тогда, когда $|H|$ не делит $\chi(1)$ для всех неприводимых компонент $\chi \in Irr((1_H)^G)$.

Верна также теорема 2.

Теорема 2. Пусть G – конечная группа с π-холловой TI-подгруппой H нечетного порядка. Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) $H \lhd G$;

(2) $|H|$ не делит $\chi(1)$ для всех неприводимых компонент $\chi \in Irr((1_H)^G)$;

(3) $\chi(h) \neq 0$ для всех неприводимых компонент $\chi \in Irr((1_H)^G)$ и для всех элементов $h \in H$.

Литература. [1] А. А. Ядченко, К проблеме Айзекса. Матем. сборник, 204 (2013), No 12, 147–156.

Институт математики НАН Беларуси

e-mail: yadchenko_56@mail.ru

D. V. Artamonov (Moscow)

Newton diagramns in the representation theory

Consider a Lie group $GL_n(\mathbb{C})$ and the space of functions on this group. This space has a natural structure of a representation of $GL_n(\mathbb{C})$ and hence a structure of a representation of the corresponding Lie algebra $gl_n(\mathbb{C})$. Every irreducible finite dimensional representation of a Lie algebra $gl_n(\mathbb{C})$ can be realized as a subrepresentation of this representation.

For an irreducible finite dimensional representation of $gl_n(\mathbb{C})$ other constructions are know. For example, there exists the Gelfand-Tsetlin construction, where base vectors are indexed by some tableaux and explicit formulas for the action of generators of $gl_n(\mathbb{C})$ onto this tableaux are know.

The natural question is the following one: which functions correspond to Gelfand-Tselin tableau and what is an interpretation of the formulas for the action from the point of view functional realization.

The answer is know in the case $n = 3$. It turns out that the functions correspondind to Gelfand-Tselin tableaux are written as classical hypergeometric depending on minors of an element from $GL_n(\mathbb{C})$. The coefficients describing the action of the generators can be drived by investigation of the behaviou of these function in their singulaties.

In the talk I will present a progress in the problem of genralization of these result to an arbitrary n. It turnes out that the situation in the case $n > 3$ is much more difficult than in the case $n = 3$.

The natural candidate for the function which allows to express explicitely a function corresponding to a Gelfand-Tselin tableaux as a hypergeometric Γ-series which was defined by Gelfand, Kapranov and Zelevinsky. But using it we mange to obtain in the case of arbitrary n a weak analog of the results in case $n = 3$.

Theorem 1. 1. These exists a base in an irreducible finite dimensional representation of $gl_n(\mathbb{C})$ formed by functions which are solutions of some PDE, the initial conditions for these PDE are hypergeometric Γ-series.

2. The formulas for the action of the generators of the algebra onto this base are written explicitely. They can be drived by investigation of the behaviou of these function in their singulaties of the PDE.

3. In the case $n=3$ this is the Gelfand-Tselin base.

The main method for obtainig of these results is a consideration of Newton diagramns of the functions.

M.V. Lomonosov Moscow State University
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: artamonov.dmitri@gmailr.com

Ivan Arzhantsev, **Sergey Bragin**, **Yulia Zaitseva** (Moscow)

Commutative algebraic monoid structures on affine spaces

An (affine) algebraic monoid is an irreducible (affine) algebraic variety S with an associative multiplication

$$\mu\colon S\times S\to S,\quad (a,b)\mapsto ab,$$

which is a morphism of algebraic varieties, and a unit element $e\in S$ such that $ea=ae=a$ for all $a\in S$. Examples of affine algebraic monoids are affine algebraic groups and multiplicative monoids of finite dimensional associative algebras with unit. The group of invertible elements $G(S)$ of an algebraic monoid S is open in S. Moreover, $G(S)$ is an algebraic group. By a result of A. Rittatore, every algebraic monoid S, whose group of invertible elements $G(S)$ is an affine algebraic group, is an affine monoid. An affine algebraic monoid S is called reductive if the group $G(S)$ is a reductive affine algebraic group.

By a group embedding we mean an irreducible affine variety X with an open embedding $G\hookrightarrow X$ of an affine algebraic group G such that both actions by left and right multiplications of G on itself can be extended to G-actions on X. In other words, the variety X is a $(G\times G)$-equivariant open embedding of the homogeneous space $(G\times G)/\Delta(G)$, where $\Delta(G)$ is the diagonal in $G\times G$.

Any affine monoid S defines a group embedding $G(S)\hookrightarrow S$. The converse statement claims that for every group embedding $G\hookrightarrow S$ there exists a structure of an affine algebraic monoid on S such that the group G coincides with the group of invertible elements $G(S)$. This is proved in [3] under the assumption that G is reductive and in [2] for arbitrary G.

Nowadays the theory of affine algebraic monoids and group embeddings is a rich and deeply developed area of mathematics lying at the intersection of algebra, algebraic geometry, combinatorics and representation theory.

We study commutative algebraic monoids on affine spaces. The ground field $\mathbb{K}$ is an algebraically closed field of characteristic zero. The theory of commutative reductive algebraic monoids, i.e. algebraic monoids with an algebraic torus as the group of invertible elements, is nothing but the theory of affine toric varieties. We concentrate on non-reductive commutative monoids.

Let us define the rank of a commutative monoid S as the dimension of the maximal torus of the group $G(S)$. We give a classification of commutative monoids on $\mathbb{A}^n$ of rank 0, $n-1$ and n. In particular, this provides a classification of commutative monoid structures on $\mathbb{A}^n$ for $n\le 2$.

In our main result in [1] we classify commutative monoid structures on $\mathbb{A}^3$. For $b,c\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $b\le c$, denote by $Q_{b,c}$ the polynomial

$$Q_{b,c}(x_1,y_1,x_2,y_2)=\sum_{k=1}^{d}\binom{d+1}{k}x_1^{e+b(k-1)}y_1^{e+b(d-k)}x_2^{d-k+1}y_2^{k},$$

where $c=bd+e,\ d,e\in\mathbb{Z},\ 0\le e<b$. Note that $Q_{b,c}(x_1,y_1,x_2,y_2)=Q_{b,c}(y_1,x_1,y_2,x_2)$ and

$$Q_{b,c}(x_1,y_1,x_2,y_2)=\frac{(x_1^by_2+y_1^bx_2)^{d+1}-(x_1^by_2)^{d+1}-(y_1^bx_2)^{d+1}}{x_1^{b-e}y_1^{b-e}}.$$

Theorem 1. Every commutative monoid on $\mathbb{A}^3$ is isomorphic to one of the following monoids:

rk	Notation	$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3)$
0	$3A$	$(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3)$
1	$M \underset{b}{+} A \underset{c}{+} A$	$\big(x_1y_1,\ x_1^b y_2 + y_1^b x_2,\ x_1^c y_3 + y_1^c x_3\big),$
1	$M \underset{b}{+} A \underset{b,c}{+} A$	$\big(x_1y_1,\ x_1^b y_2 + y_1^b x_2,\ x_1^c y_3 + y_1^c x_3 + Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2)\big),$
2	$M + M \underset{b,c}{+} A$	$(x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_1^b x_2^c y_3 + y_1^b y_2^c x_3),$
3	$3M$	$(x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_3y_3)$

Moreover, every two monoids of different types or of the same type with different values of parameters from this list are non-isomorphic.

The proof is based on the classification of pairs of commuting homogeneous locally nilpotent derivations of degree zero on a positively graded polynomial algebra $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$.

The first and the third authors were supported by RSF grant 19-11-00172.

References. [1] I. Arzhantsev, S. Bragin, and Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. arXiv:1809.05291. [2] A. Rittatore. Algebraic monoids and group embeddings. Transform. Groups 3 (1998), no. 4, 375-396. [3] E. Vinberg. On reductive algebraic semigroups. In: Lie Groups and Lie Algebras. AMS Transl. 169, 145-182, Amer. Math. Soc., 1995

National Research University Higher School of Economics
Lomonosov Moscow State University
e-mail: arjantsev@hse.ru, sbragin@hse.ru, yuliazaitseva@gmail.com

Ivan Arzhantsev (Moscow), **Alvaro Liendo** (Talca), **Taras Stasyuk** (Moscow)

Lie algebras of vertical derivations on semiaffine varieties with torus actions

Let X be a normal variety endowed with an algebraic torus action. An additive group action on X is called vertical if a general orbit of the action is contained in the closure of an orbit of the torus action and the image of the torus normalizes the image of the additive group in $\mathrm{Aut}(X)$. Our first result is a classification of vertical additive group actions on X under the assumption that X is proper over an affine variety. Then we establish a criterion as to when the infinitesimal generators of a finite collection of additive group actions on X generate a finite-dimensional Lie algebra inside the Lie algebra of derivations of X.

The results are based on the combinatorial description of homogeneous locally nilpotent derivations on graded algebras in terms of proper polyhedral divisors obtained in [4]. In turn, we obtain a Demazure type theorem that generalizes results obtained earlier in [3] and [2].

References. [1] Ivan Arzhantsev, Alvaro Liendo, and Taras Stasyuk. Lie algebras of vertical derivations on semiaffine varieties with torus actions. arXiv:1902.01523; 15 pages [2] Ivan Arzhantsev, Jürgen Hausen, Elaine Herppich, and Alvaro Liendo. The automorphism group of a variety with torus action of complexity one. Moscow Math. J. 14 (2014), no. 3, 429–471 [3] Michel Demazure. Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 (1970), 507–588 [4] Alvaro Liendo. $\mathbb{G}_a$-actions of fiber type on affine T-varieties. J. Algebra 324 (2010), no. 12, 3653–3665

National Research University Higher School of Economics
University of Talca, Chile
Lomonosov Moscow State University
e-mail: arjantsev@hse.ru, aliendo@inst-mat.utalca.cl, taras4834@gmail.com

T. S. Busel, **I. D. Suprunenko** (Minsk, Belarus)

On the behaviour of unipotent elements from subsystem subgroups of small ranks in modular representations of algebraic groups

The talk will be devoted to a series of results on the behaviour of unipotent elements from subsystem subgroups of small ranks in irreducible representations of simple algebraic groups in positive characteristic. It occurs that often the images of such elements have Jordan blocks of all a priori possible sizes. A detailed information on the properties of the images of individual elements in representations is important for solving recognition problems on representations and linear groups on the base of the presence of certain matrices.

In the first part of the talk results on root elements and unipotent elements of the classical algebraic groups with the minimal polynomial of degree 2 in the standard realization of a relevant group will be briefly discussed. We also plan to mention some open questions for short root elements.

The bulk of the talk is concerned with the behaviour of regular unipotent elements from proper subsystem subgroups of type A_3 and C_2 in irreducible representations of algebraic groups of types A_n and C_n, respectively. It occurs that if the ground field characteristic p is not too small, then the image of such element in a p-restricted irreducible representation usually has blocks of all a priori possible sizes provided a certain linear combination of two or three coefficients of the highest weight is less than p. In what follows K is an algebraically closed field of characteristic $p > 3$, $G = A_n(K)$ with $n > 3$ or $C_n(K)$ with $n > 2$, ω_i, $1 \leq i \leq n$, are the fundamental weights of G, $H \subset G$ is a subsystem subgroup of type A_3 for $G = A_n(K)$ and of type C_2 for $G = C_n(K)$. Denote by $\mathbf{N}_m$ the set of all integers i with $1 \leq i \leq m$ and for an irreducible representation φ of G and a regular unipotent element x of H, denote by J_φ the set of the sizes of blocks in the canonical Jordan form of $\varphi(x)$ (without multiplicities).

Theorem 1. Let φ be a p-restricted irreducible representation of G with highest weight $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i$. If $G = A_n(K)$, assume that $3a_i + 4a_{i+1} + 3a_{i+2} < p$ for some i with $1 \leq i < n-1$. If $G = C_n(K)$, suppose that $3a_{n-1} + 4a_n < p$. Set $S = 3a_1 + 4a_2 + \ldots + 4a_{n-1} + 3a_n$ for $G = A_n(K)$ and $S = 3a_1 + 4a_2 + \ldots + 4a_n$ for $G = C_n(K)$.

1). Let $n > 3$ and $S < p$. Assume that $\omega \notin \{\omega_i, a_1\omega_1 + a_n\omega_n\}$ for $G = A_n(K)$ and $\omega \notin \{\omega_i, a_1\omega_1\}$ for $G = C_n(K)$. Then $J_\varphi = \mathbf{N}_{S+1}$.

2) Let $(p-1)/3 < a < p$, $\omega = a\omega_1$ or $a\omega_n$ for $G = A_n(K)$, and $\omega = a\omega_1$ for $G = C_n(K)$. Then $J_\varphi = \mathbf{N}_p \setminus \{2, p-3, p-2\}$ for $a = (p+1)/3$ and $J_\varphi = \mathbf{N}_p \setminus \{2, p-2\}$ otherwise.

3) Let $p \geq 11$ and $S \geq p$. Then $|J_\varphi| \geq p-3$ and $|J_\varphi| \geq p-2$ if ω is not a weight from Item 2.

Actually, in the assumptions of Theorem 1 a more detailed information on J_φ is available. The length of the abstract does not permit us to give exact statements here, but they will be presented in the talk. If $S < p$, the set J_φ is completely determined in all cases (and for $G = C_3(K)$). If $p \geq 11$ and $S \geq p$, this set is found for all representations, except some special ones. Here usually $J_\varphi = \mathbf{N}_p$.

Observe that regular unipotent elements of subsystem subgroups considered in Theorem 1 have order p if and only if $p > 3$.

For $G = A_n(K)$ and $p \geq 11$, Theorem 1 was proved by A.A. Osinovskaya and the second author and has been announced in [1]. For $G = A_n(K)$ and $p \geq 11$, this theorem will appear in [2].

This research has been supported by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus in the framework of the State Research Programme "Convergence-2020".

References. [1] A.A. Osinovskaya and I.D. Suprunenko, Unipotent elements from subsystem subgroups of type A_3 in representations of the special linear group (in Russian). Doklady NAN Belarusi, 56 (2012), no 4, 11–15. [2] T.S. Busel and I.D. Suprunenko, The block structure of the images of regular unipotent elements from subsystem symplectic subgroups of rank 2 in irreducible representations of symplectic groups. I–III (in Russian). Matematicheskie Trudy (Sobolev Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences), 22–23 (2019–2020).

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: tbusel@im.bas-net.by
suprunenko@im.bas-net.by

D. A. Dolgov (Kazan, KFU)

Polynomial k-ary gcd algorithms over finite fields

Computing greatest common divisor (GCD) is one of the oldest problem in mathematics. Euclidean algorithm is the oldest gcd algorithm. Algorithm complexity equals to $O(n^2)$ in the worst case, where n is a degree of two input polynomials. We will introduce the main k-ary gcd algorithms and complexity estimations in the worst case. In the beginning we introduce degree estimations for auxiliary polynomials a, b and division polynomial k.

Theorem 1. Let F is a field. $\forall u,\ v,\ k \in F[x]$, $\exists\ a,\ b,\ t \in F[x]$: $au + bv = tk$, $\exists\ w,\ q,\ r_1,\ r_2 \in F[x]$, $au = qk + r_1$, $bv = wk + r_2$, $1 \leqslant \deg(q) \leqslant \sqrt{\deg(k)} - \deg(k) + deg(u)$, $1 \leqslant \deg(w) \leqslant \sqrt{\deg(k)} - \deg(k) + deg(v)$, $\deg(u) \geqslant \deg(v) > \deg(k)$.

Then, $r_1 = r_2$, $1 \leqslant \deg(a), \deg(b) \leqslant \sqrt{\deg(k)}$. If we take a, b: $\deg(a) \geqslant \deg(b)$, then $\deg(k) \in [1, \frac{(1+\sqrt{1-4(\deg(v)-rank)})^2}{4})$, $\deg(u) \leqslant rank < \frac{(\sqrt{4\deg(v)}-1)^2-1}{4} + \deg(v)$, where $rank$ is rank of the Sylvester matrix of two input polynomials u, v.

Polynomial k is chosen as irreducible. We consider two polynomials u, v over finite field F_p with small charasteristic p. We store residues x of the form $u \mod k$, that is we will store field elements $F_{p^n}[x]/(k)$, $deg(k) = n$. Input polynomials will be taken from the ring $F_p[x]$, not from $F_{p^n}[x]/(k)$. Next theorem is described iteration count in the worst case.

Theorem 2. Let $u, v, k \in F_p[x]$, F_p is a finite field, $q = degmin\{t^e : t^e || n$, and $n \in F_p[x]$, t is irreducible polynomial in $F_p[x]\}$, $q \in F_p[x]$. Computation of $gcd(u, v)$ takes $O((deg(u) + deg(v))/deg(Q(k)))$ iteration in the worst case.

Next theorem is described division complexity $D(n, m)$ for right-shift polynomial k-ary gcd algorithm.

Theorem 3. Let $u, v, k \in F[x]$, k is irreducible polynomial in a field F, $deg(u) = n > deg(v) = m > deg(k)$. Then $D(n, m) \sim O(n^2)$ in the worst case.

Next theorem is described multiplication complexity $M(n, m)$ for right-shift polynomial k-ary gcd algorithm, for detais see [3], [4].

Theorem 4. Let $u, v, k \in F[x]$, k is an irreducible polynomial in a field F, $deg(k) = O(\log_2(n)\log_2\log_2(n))$ or $deg(k) = O(n^{\log_2 3/2})$, $deg(u) = deg(v) = n$. So, $M(n, m) \sim O(n^2)$ in the worst case.

Corollary 1. u, v, $k \in F$, F is a field. A general estimation of the complexity of the main loop of the right shift k-ary gcd algorithm is $O(n^2)$ in the worst case.

Also we introduce a generalization of the Weber's gcd algorithm and complexity estimation in the worst case. Weber's algorithm allows you to get rid of precomputation phase in the beginning of k-ary gcd algorithm [1], [2].

References. [1] J. Sorenson, Two fast GCD Algorithms. J.Alg., 1(16) (1994), 110–144. [2] K. Weber, The accelerated integer GCD algorithm. ACM Transactions on Math. Soft., 1(21) (1995), 111–122. [3] A. Schönhage, Schnelle Berechnung von Kettenbruchentwicklungen. Acta Informat., 2(1) (1971), 139–144. [4] S. B. Gashkov, Entertaining computer arithmetic: Fast algorithms for operations with numbers and polynomials. Librokom, 2012.

Kazan (Volga region) Federal University

e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

A. S. Dzhumadil'daev (Almaty, KAZAKHSTAN)

Associative- and Lie-admissible operads

An algebra A is called *Lie-admissible* (LiA), if its minus algebra $A^{(-)} = (A, [\,,])$ is Lie, *associative-admissible* (AsA) if its plus-algebra $A^{(+)} = (A, \{\,,\})$ is associative, $< a, b, c >= 0$, for any $a, b, c \in A$, where $[a, b] = ab - ba$, $\{a, b\} = ab + ba$ and $< a, b, c >= \{a, \{b, c\}\} - \{\{a, b\}, c\}$. Non-commutative Lie algebra (NCL) is an algebra that satisfies Jacobi identity and all consequences of skew-symmetric identity in degree 3. Let us introduce some classes of algebras.

Name of algebras	identities
Reverse-associative	revas$=t_1(t_2t_3)-(t_3t_2)t_1$
Anti-reverse-associative	arevas$=t_1(t_2t_3)+(t_3t_2)t_1$
Left-weak-Leibniz	lwlei$=[t_1,t_2]t_3-2t_1(t_2t_3)+2t_2(t_1t_3)$
Right-weak-Leibniz	rwlei$=t_1[t_2,t_3]-2(t_1t_2)t_3+2(t_1t_3)t_2$
Weak-Leibniz	lwlei, rwlei
Non-commutative Lie =Two-sided Leibniz	$(t_1t_2)t_3+(t_2t_3)t_1+(t_3t_1)t_2$, $(t_1t_2+t_2t_1)t_3$, revas

Theorem 1. *Associative-admissible operad is Koszul and its dual is non-commutative Lie operad, $AsA^! = NCL$. Dimensions of multilinear parts of AsA in degree n is equal to*

$$\left(\frac{1+x}{1-x-x^2}\,\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\frac{1+x}{1-x-x^2}\right)\Bigg|_{x->0}.$$

Let $AsLiA = AsA \cap LiA$ be associative- and Lie-admissible operad. Then $AsLiA$ is Koszul. Its Koszul dual is reverse-associative and (one-sided) weak-Leibniz operad, $AsLiA^! = RevAs \cap LwLei$. Dimensions of multi-linear parts of $AsLiA$ in degree n is equal to

$$\left(\frac{e^x(1+x)}{1+(1-e^x)x}\,\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\frac{e^x(1+x)}{1+(1-e^x)x}\right)\Bigg|_{x->0}.$$

Example. Any Zinbiel algebra, i.e., algebra with identity $a(bc) = (ab + ba)c$ is associative-admissible, but not Lie-admissible.

Example. Any two-sided Leibniz algebra is weak Leibniz.

Example. Let $U = K[x]$ and $a \star b = a\partial(b) - \partial(a)b + uab$, for some $u \in U$. Then $(U, \star)$ is weak-Leibniz. It is associative-admissible and Lie-admissible.

Well known that if Leibniz algebra is simple, then it is Lie. Any Leibniz algebra is weak-Leibniz. Our example shows that the class of weak Leibniz algebras contains simple algebras, that are not Leibniz and not Lie.

Theorem 2. *Weak Leibniz operad is self-dual, $WLei^! = WLei$, but it is not Koszul.*

Theorem 3. *Reverse-asociative operad is Koszul and $RevAs^! = ARevAs$. Let X be set of generators, $F(X)$ free reverse-associative algebra, $Com(X)$ free commutative algebra and $ACom(X)$ free anti-commutative algebra. Then $F(X) \cong Com(X) \oplus ACom(X)$. In particular, dimensions of multi-linear parts of free reverse-associative algebra in degree $n > 1$ is* $2(2n-3)!!$.

Institute of Mathematics, Almaty, KAZAKHSTAN

A. S. Dzhumadil'daev (Almaty, RK), **K. M. Tulenbayev** (Almaty, RK)

Universal enveloping Bicommutative algebras for metabelian Lie algebras

Authors establish Poincare-Birkhoff-Witt theorem (PBW theorem) for metabelian Lie algebras and Bicommutative algebras. We also prove that the variety of Bicommutative algebras is not Schreier. Freiheitssatz also is not true for Bicommutative algebras. Word decidability is true for Bicommutative algebras.

Projective metabelian algebras of finite rank were studied in [1]. Second author of given article establish the definition of Zarisky topology on bicommutative algebras. Let $A = (A, \circ)$ be an algebra over field with characteristic $p \geq 0$ and $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, is product. An algebra $(A, \circ)$ is called *Bicommutative*, if

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b (RCom)$$

$$a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c) (LCom)$$

for any $a, b, c \in A$. We mention that bicommutative algebra over new commutator operation

$[a,b] = a \circ b - b \circ a$ satisfies the following three equations:

$$1.[a,b] = -[b,a]$$
$$2.[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$$
$$3.[[a,b],[c,d]] = 0.$$

It means that bicommutative algebra over new commutator operation is Lie metabelian algebra.
We establish Poincare-Birkhoff-Witt theorem (PBW theorem) for metabelian Lie algebras and Bicommutative algebras. We use description of linear basis of algebras metabelian Lie algebras. Let $F = F < a_1, \cdots, a_r >$ be free Lie metabelian algebra generating on free variables $a_1, \cdots, a_r$. Then linear basis of F will be the following right-normed products $[[[a_{i_1}, a_{i_2}], a_{i_3}], \cdots, a_{i_k}]$ where $i_1 > i_2 \leq i_3 \leq i_k$ Also we use representation of bicommutative basis as a pair (X,Y). Let us introduce order on bicommutative monomials. Degree of (X,Y) is equal to sum of degree X and degree Y. We say that $Z = (X,Y) < Z_1 = (X_1, Y_1)$ if $degZ < degZ_1$.
When $degZ = degZ_1$ at first we will compare X and X_1 as monomials in associative and commutative algebra. If $X = X_1$ then we will compare Y and Y_1 as monomials in associative and commutative algebra with deg-lex order.
This representation we use in Buchberger algorithm for bicommutative algeras in order to prove Theorem 4.

Theorem 1. Let $F = F < a_1, \cdots, a_r >$ be free Lie metabelian algebra and $B = B < x_1, \cdots, x_r >$ be free Bicommutative then mapping $\phi : F \to B$ expanding from generating elements $\phi(a_i) = x_i$ is injective homomorphism.

Let I be an ideal of free metabelian Lie algebra F. Denote $< \phi(I) >$ an ideal of Bicommutative algebra B, generated by$\phi(I)$. Also we find that the following Lemma is true.

Lemma 1. $\phi(I) =< \phi(I) > \cap \phi(F)$.

Theorem 2. Any metabelian Lie algebra L is subalgebra of some bicommutative algebra B over commutator.

Given construction of Bicommutative algebra give us universal enveloping Bicommutative for metabelian Lie algebra. Now we can prove analogue of Poincare-Birkhoff-Witt theorem (PBW theorem) for metabelian Lie algebras and Bicommutative algebras.
Let $e_1, \cdots, e_n, \cdots$ be linear basis of metabelian Lie algebra L then there exists universal enveloping Bicommutative algebra U(L) with linear basis $T(((e_{i_1} \circ e_{i_2}) \circ \cdots) \circ e_{i_k})$, where $i_1 > i_2 \leq i_3 \leq i_k$.The operator T is taken from right-normed products (head) and defined by formula $T(((e_{i_1} \circ e_{i_2}) \circ \cdots) \circ e_{i_k}) = [[[e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}], \cdots, e_{i_k}]$.

Theorem 3. For any homomorphism $\tau : L \to D$, where D is Bicommutative algebra with commutator operation [,] exists only one homomorphism $\theta : U(L) \to D$ as Bicommutative algebras and $\tau = \theta \circ \phi$

Theorem 4. The graded algebra grU(L) is abelian algebra

Any metabelian Lie algebra can be represented as subalgebra of $Bicom^-$. For example it is not true for Jordan and Ass^+ algebras. The subalgebra membership problem is decidable also for free metabelian groups and free metabelian Lie algebras[6]. Word decidability is true for Metabelian Lie algebras, proof one can see in[7]. Variety of Metabelian Lie algebras is not Schreier. Proof of this result is given in Theorem 1 [4]. Freiheitssatz is not true because of metabelian idenity. Lets take $0 = [[x_2, x_3], [[x_2, x_3], x_2]]$. We have relation without x_3. Using results of A.A. Mikhalev and I. P. Shestakov in [5], we have for PBW pair is not Schreier and Freiheitssatz is not true for second algebra if first algebra has no this property. Because metabelian Lie algebras and Bicommutative algebras over commutator give PBW pair, we prove theorem.

Theorem 5. The variety of Bicommutative algebras is not Schreier. Freiheitssatz is not true and Word decidability is true for Bicommutative algebras.

Authors are grateful to U.U. Umirbaev and M.V. Zaicev for helpful comments. The work is supported by the grant AP05133271 of SC of the MES of RK.

References. [1] V. A. Artamonov. Projective metabelian algebras of finite rank. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser.Mat.,36, (1972), 510–522 [2] L. A. Bokut, Y. Chen, Z. Zhang. Grobner-Shirshov bases method for Gelfand-Dorfman-Novikov algebras. Journal of Algebra and Its Applications,16(1),(2017). [3] A S. Dzhumadil'daev, K. M. Tulenbaev.Bi-commutative algebras. Uspechi Math. Nauk.,2003, No.6, 149–150=engl.transl. Russian Math. Surv., 1196-1197. [4] M. V. Zaitsev. Schreier Varieties of Lie algebras. Mathematical Notes. (v.28,1), 1980, 119–126 [5] A. A. Mikhalev, I. P. Shestakov. PBW-pairs of varieties of linear algebras Communications in Algebra, 2014, V.42, P.667–687 [6] U. U. Umirbaev. Metabelian binary-Lie algebras. (Russian).Algebra i Logika 23 (1984), no. 2, 220–227, 242. [7] U. U. Umirbaev. The word problem for central-by-metabelian Lie algebras. (Russian) Algebra i Logika 23 (1984), no. 3, 305–318 [8] A. S. Dzhumadil'daev, K. M. Tulenbayev. Realization of Buchberger algorithm for bicommutative and Novikov algebras. Collection of abstracts. International conference Malt'sev Meetings(2018), 169–170.

Suleyman Demirel University

e-mail: tulen75@hotmail.com

A. V. Galatenko, **V. A. Nosov**, **A. E. Pankratiev** (Moscow)

Construction of multivariate quadratic quasigroups by means of proper families of functions

A finite quasigroup is a pair (Q, f) such that Q is a finite set, $f : Q \times Q \to Q$ is an operation, and for any $a, b \in Q$ all equations of the form $f(x, a) = b$ and $f(b, y) = b$ are solvable. If $|Q| = 2^n$ for some $n \in \mathbb{N}$ then elements of Q can be encoded by binary n-tuples, and f can be thought of as a vector function $(f_1, \ldots, f_n)^T$ where f_i are $2n$-ary Boolean functions. Since any Boolean function can be represented by a unique (up to permutation) polynomial over the field $GF(2)$, we can consider the vector $(d_1, \ldots, d_n)^T$ of degrees of the polynomials corresponding to f_i, $i = 1, \ldots, n$. If k, $0 \le k < n$, polynomials are of degree 1 and the remaning $n-k$ polynomials are of degree 2 then the quasigroup is said to be a multivariate quadratic quasigroup (MQQ) of type $Quad_{n-k}Lin_k$. MQQ are used in a number of public key cryptosystems (see e.g. a survey [1]). We propose four methods for construction of a large number of MQQ by means of proper families of Boolean functions.

A family $(g_1, \ldots, g_n)$ of n-ary Boolean functions is called proper (of order n) if for any two distinct binary n-tuples $(t_1, \ldots, t_n)$ and $(t'_1, \ldots, t'_n)$ there exists an index i, $1 \le i \le n$, such that $t_i \ne t'_i$, but $g_i(t_1, \ldots, t_n) = g_i(t'_1, \ldots, t'_n)$. Nosov proved that the functions

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_i \oplus y_i \oplus g\left(\pi_1(x_1, y_1), \ldots, \pi_n(x_n, y_n)\right), \tag{1}$$

$i = 1, \ldots, n$, specify a quasigroup for any choice of Boolean functions $\pi_1, \ldots, \pi_n$ if and only if the family $(g_1, \ldots, g_n)$ is proper (see e.g. [2]). Thus a single proper family can identify up to 16^n quasigroups, however the functions defined by different values of π_i may coincide. Note that the degree of the polynomial corresponding to a Boolean function in two variables is at most 2. Hence two obvious options for generating MQQ are using linear proper families and using proper families formed by quadratic functions and disallowing to substitute quadratic π_i for variables in quadratic terms.

A family of n-ary Boolean functions $(g_1, \ldots, g_n)$ is called triangular if up to consistent renumbering of functions and variables a function g_i does not essentially depend on variables $t_i, \ldots, t_n$ (in particular, g_1 is a constant). It can be easily seen that any triangular family is proper. Note that any MQQ generated by a triangular proper family contains at least one linear component.

The results of Nosov and Pankratiev from [2] almost directly imply that the following assertion holds.

Theorem 1. A family of linear functions is proper if and only if it is triangular.

Theorem 1 allows to obtain a lower bound on the number of MQQ generated by linear proper families.

Theorem 2. The number of MQQ of type $Quad_{n-k}Lin_k$, $0 < k < n$, generated by linear proper families is $2^{\frac{n^2}{2}+o(n^2)}$.

The construction can be further improved.

Theorem 3. Suppose that $(g_1, \ldots, g_n)$ is a triangular family. Then for any $\pi_{i,j}$ the functions $f_i = x_i \oplus y_i \oplus g_i\left(\pi_{i,1}(x_1, y_1), \ldots, \pi_{i,n}(x_n, y_n)\right)$ identify a quasigroup.

Piven proved that applying permutations to indices of the variables x_i and y_j in (1) is an isotopy ([3]); it can be easily shown that in case of linear proper families this technique preserves degrees of functions and increases the number of quasigroups generated by the factor $(n!)^2$.

Now consider the case of triangular families of quadratic functions. Note that if some g_i contains a monomial of degree 2 and the corresponding functions π_j are nonconstant then the resulting quasigroup can not be generated using linear proper families. Thus the following assertion holds.

Theorem 4. Quadratic triangular families of order $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, generate $2^{\frac{n^3}{6}+o(n^3)}$ MQQ that can not be generated by linear proper families.

Similarly to the linear case, additional quasigroups can be generated using Theorem 3 and Piven's permutation construction.

All quasigroups constructed above contained at least one linear component f_i. A possible way to construct an MQQ such that all components are quadratic is to use multiaffine families, i.e. to consider $g_i = l_i^1 \cdot l_i^2$, where l_i^j are linear Boolean functions. The fact that such family is proper can be proved using the criterion obtained by Nosov ([4], Theorem 5). An example of a proper multiaffine family is given in the following theorem.

Theorem 5. Let $n \geq 2$ be a natural number, $g_1 = \bar{t}_2 \cdot t_3$, $g_2 = \bar{t}_3 \cdot t_4$, $\ldots$, $g_{n-1} = \bar{t}_n \cdot t_1$, $g_n = \bar{t}_1 \cdot t_2$. Then the family $(g_1, \ldots, g_n)$ is proper if and only if n is odd.

Finally recall a construction proposed by Nosov in [4] that allows to produce proper families of a larger number of variables from smaller proper families. This construction allows e.g. generating MQQ of type $Quad_nLin_0$ for arbitrary value of n from a family described in Theorem 5. Suppose that $(g_1, \ldots, g_n)$ is a proper family, $n' > n$ is the required size of the new family. Represent n' as a sum $n + s_1 + \ldots + s_n$, $s_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$. Consider the family $(g'_{1,1}, \ldots, g'_{1,s_1}, g'_{1,0}, g'_{2,1}, \ldots, g'_{2,s_2}, g'_{2,0}, \ldots, g'_{n,1}, \ldots, g'_{n,s_n}, g'_{n,0})$ (if s_i is equal to 0 then $g'_{i,j}$ with natural j are omitted). Define functions $g'_{i,j}$ in the following way (dummy variables are omitted):

$$\begin{aligned}
&g'_{i,1} = G_{i,1}\left(g_i(t_{1,0}, \ldots, t_{n,0})\right)\\
&g'_{i,2} = G_{i,2}\left(g_i(t_{1,0}, \ldots, t_{n,0}), t_{i,1}\right)\\
&\ldots\\
&g'_{i,s_i} = G_{i,s_i}\left(g_i(t_{1,0}, \ldots, t_{n,0}), t_{i,1}, \ldots, t_{i,s_i-1}\right)\\
&g'_{i,0} = G_{i,0}\left(g_i(t_{1,0}, \ldots, t_{n,0}), t_{i,1}, \ldots, t_{i,s_i}\right),
\end{aligned}$$

where G_{ij} are arbitrary Boolean functions. By [4, Theorem 6] the resulting system is proper. Thus if g'_i is at most qadratic, all functions G_{ij} are linear in the first variable and at most quadratic in the remaining variables, and all functions π_i are linear, then equations (1) define a MQQ.

References. [1]. C. Wolf, B. Prenel. Taxonomy of public key schemes based on the problem of multivariate quadratic equations. Cryptology ePrint Archive, Report 2005/077, 2005. [2]. V. A. Nosov, A. E. Pankratiev. Latin squares over abelian groups. Journal of Mathematical Sciences, 149, 3 (2008), 1230–1234. [3]. N. A. Piven. Investigation of quasigroups generated by proper families of Boolean functions of order 2. Intelligent Systems. Theory and Applications, 22, 1 (2018), 21–35 (in Russian). [4]. V. A. Nosov. Constructing Families of Latin Squares over Boolean Domains. Boolean Functions in Cryptology and Information Security, 2008, 200–207.

e-mail: agalat@msu.ru

A. A. Galt (Novosibirsk)

On splitting of the normalizer of a maximal torus in groups of Lie type

Let $\overline{G}$ be a simple connected linear algebraic group over the algebraic closure $\overline{\mathbb{F}}_p$ of a finite field of positive characteristic p. Let σ be a Steinberg endomorphism and $\overline{T}$ a maximal σ-invariant torus of $\overline{G}$. It's well known that all the maximal tori are conjugated in $\overline{G}$ and the quotient $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ is isomorphic to the Weyl group W of $\overline{G}$. The following problem arises.

Problem 1. Describe the groups $\overline{G}$ in which $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ splits over $\overline{T}$.

A similar problem arises in simple groups of Lie type. Let $T = \overline{T} \cap G$ be a maximal torus in a finite group of Lie type G, $N(G,T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ an algebraic normalizer of G.

Problem 2. Describe the groups G and their maximal tori T in which $N(G,T)$ splits over T.

The problem of splitting of the normalizer of a maximal torus was stated by J.Tits in [1]. We will discuss the progress in these questions.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-11-00039).

References. [1] J. Tits, Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus // Journal of Algebra, 1966, V.4, 96–116.

e-mail: galt84@gmail.com

Pavel Kolesnikov (Novosibirsk), **Hassan AlHussein** (Novosibirsk)

Hochschild cohomology via Morse matching

Homological methods allow us to get important information about the structure of an algebra. For associative algebras, Hochschild cohomologies play an important role in structure and representation theory. Finding the Hochschild cohomology group $H^n(A,M)$ of a given algebra A with coefficients in a given A-bimodule M is often a difficult problem. In order to solve this problem one needs a long exact sequence starting from A, a resolution of A. The most natural bar-resolution is easy to construct but it is too bulky for computations. Another approach was proposed by David J. Anick in 1986 [1], where it was built a free resolution for associative algebra which is homotopy equivalent to the bar-resolution. The Anick resolution was also used to find Poincare Series. Computation of the differentials in the Anick resolution according to the original algorithm described in [1] is extremely hard. In order to make the computation easier, one may use the discrete algebraic Morse theory based on the concept of a Morse matching defined in [3, 4]. This concept was used in geometry first, then it became applicable in algebra. In the present work, we apply the Morse matching theory to find the Anick resolution and calculate the groups of Hochschild n-cohomologies of the Manturov group (which has applications in Dynamical Systems [6]), Weyl algebra and chinese algebra.

References. [1] D. J. Anick. On the homology of associative algebras, Transactions of the American Mathematical Society, 1986, Vol. 296, No 2, P. 641-659. [2] V. Lopatkin. Cohomology rings of the plastic monoid algebra via a Grobner - Shirshov basis, 2017, arXiv:1411.5464v7 [math.AT]. [3] E. Sköldberg, Morse theory from an algebraic viewpoint, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **358** *(1) (2006) 115 – 129.* [4] M. Jöllenbeck and V. Welker, *Minimal Resolutions Via Algebraic Discrete Morse Theory*, Mem. Am. Math. Soc. **197** (2009). [5] Yuxiu Bai and Yuqun Chen, Gröbner-Shirshov Bases for the Groups G_3^2 and G_4^3, School of Mathematical Sciences, South China Normal University, (2017). [6] V. O. Manturov, Non-reidemeister knot theory and its applications in dynamical sestems, geometry, and topology, preprint (2015), arXiv:1501.05208.

Sobolev Institute of Mathematics, Russia

e-mail: hassanalhussein2014@gmail.com

A. V. Kondrateva, **M. I. Kuznetsov** (Nizhny Novgorod)

Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in characteristic two

Well known Lie algebras of Cartan type consisting of vector fields preserving special, Hamiltonian or contact form have the analogous in characteristic p. Note that the algebra of functions must be replaced by an algebra of divided powers $\mathcal{O}_n(\mathcal{F})$(see [1]) that corresponds to some generalized flag $\mathcal{F}$ in the space of variables $E =< x_1, \ldots, x_n >$, $\mathcal{F} : E = E_0 \supset E_1 \supset \ldots$. In the case of a field of characteristic 2 one can construct a large class of simple Hamiltonian Lie algebras corresponding to symmetric differential forms. The class of Hamiltonian Lie algebras of characteristic 2 with the simplest symmetric Poisson bracket was constructed in 1993 by Lei Lin [2]. Later on, in [3] the symmetric Hamiltonian forms in divided powers were introduced and the symmetric Poisson brackets of L.Lin were obtained by classical Hamiltonian formalism. But only classical forms analogous to those which correspond to Hamiltonian Lie superalgebras were considered [4]-[5]. In [6] the invariant construction of the complex of symmetric differential forms in characteristic 2 was given and some program of investigation was proposed. In the first stage the authors have obtained all invariants of symmetric Hamiltonian differential forms with constant coefficients with respect to parabolic subgroup of $GL(V)$ corresponding to flag $\mathcal{F}$. In particular, it was shown that there exists a basis of V coordinated with flag $\mathcal{F}$ such that a form has a matrix $diag(M_0, \ldots, M_0,\ M_1, \ldots, M_1,\ 1_s)$ where

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Later on, the authors have proved that in the case when $n > 4$ or $n = 4$ and the flag $\mathcal{F}$ is non-trivial or $n = 2,\ 3$ and E_1 contains a non-isotropic vector with respect to the form $\overline{\omega}$ on E dual to the form ω, each filtered Lie algebra associated with a graded non-alternating Hamiltonian algebra is given by a symmetric Hamiltonian differential form with non-constant polynomial (in divided powers) coefficients. It has been proved that in case when the heights of some variables is large enough, such a form can be reduced to non-alternating Hamiltonian form with constant coefficients. Thus, in the case when variables are of large enough heights the graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras are rigid with respect to filtered deformations in contrast to the classical Hamiltonian algebras.

The investigation was supported by RFBR, grant 18-01-00900/a.

References. [1] A. I. Kostrikin, I. R. Shafarevich, Graded Lie algebras of finite characteristic. Izv. AN SSSR. Ser. Matem., 33 (1969), 251–322. [2] L. Lin, Non-alternating Hamiltonian algebra P(n, m) of characteristic 2. Comm. Alg., (21) (1993), 399–411. [3] S. Bouarrouj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, Divided power (co) homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan Matrix. Homology, Homotopy Appl., 12 (2010),237–248. [4] S. Bouarroudj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, I. Shchepochkina, New simple Lie algebras in characteristic 2. Math. Research Notices, 2009 (2015),1–16. [5] U. Yier, D. Leites, M. Messaoudene, I. Shchepochkina, Examples of simple vectorial Lie algebras in characteristic 2. J. Nonlin. Math. Phys., 17, Suppl. 1 (2010), 311–374. [6] M. I. Kuznetsov, A. V Kondrateva, N. G. Chebochko, On Hamiltonian Lie algebras of characteristic 2. Matem. J. (NAS of Kazakhstan), 16 (2016), 54–65.

Nizhny Novgorod State University

e-mail: kuznets-1349@yandex.ru, alisakondr@mail.ru

Li Lu (Moscow)

On thick subcategories of derived categories of perfect complexes of quasi-coherent sheaves on noetherian schemes

Classification of subcategories of derived categories is quite an active subject widely studied by a number of authors(see, for example, [1-11]. In [9], Neeman and Bokstedt state a remarkable theorem:

Theorem (Neeman-Bokstedt)

Let R be a commutative noetherian ring. We denote by $supp^{-1}(\Phi)$ the subcategory of $\mathfrak{Perf}(R)$ consisting of all R-complexes $M^\bullet$ with $supp(M^\bullet) \subset \Phi$. There is an inclusion-preserving bijection of sets

$$\begin{array}{c} \{Thick\ subcategories\ of\ \mathfrak{Perf}(R)\} \\ supp^{-1} \Big\Uparrow \Big\Downarrow supp \\ \{Specialization\ closed\ subsets\ of\ Spec(R)\}. \end{array}$$

Neeman and Bokstedt's theorem is a beautiful result. Our aim is to prove a similar result for a noetherian separated scheme.

Main Theorem Let X be a noetherian separated scheme. Consider the following three sets:

- (1) $\mathbb{SC} = \{Specialization\ closed\ subsets\ of\ X\}$.
- (2) $\mathbb{TS} = \{Thick\ subcategories\ of\ \mathfrak{Perf}(X)\}$.
- (3) $\mathbb{SS} = \{Serre\ subcategories\ of\ Coh(X)\}$.
- (4) $\mathbb{HT} = \{Hereditary\ torsion\ theories\ of\ QCoh(X)\}$.

All of the sets are bijectively corresponding to one another.

References. [1] P. Balmer. The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories. Journal fur die reine und angewandte Mathematik,, 2005(588) : 149–168, 2005. [2] D. Benson, S. Iyengar, and H. Krause. Stratifying modular representations of finite groups. Annals of mathematics, 17(3): 1643–1684, 2011. [3] P. Gabriel. Des categories abeliennes. Bulletin de la Societe Mathematique de France, 90: 323–448, 1962. [4] J. Hall and D. Rydh. Perfect complexes on algebraic stacks. Compositio Mathematica, 153(11): 2318–2367, 2017. [5] M. J. Hopkins. Global methods in homotopy theory. Proceedings of the 1985 LMS Symposium on Homotopy Theory, 73–96, 1987. [6] R. Kanda. Classifying Serre subcategories via atom spectrum. Advancesin Mathematics, 231(3-4):1572–1588, 2012. [7] R. Kanda. Classification of categorical subspaces of locally noetherian schemes. Documenta Mathematica, 20:1403–1465, 2015. [8] H. Krause. Thick subcategories of modules over commutative Noetherian rings. Mathematische Annalen, 340(4):733–747, 2008. [9] A. Neeman and M. Bokstedt. The chromatic tower for D(R). Topology, 31(3):519–532, 1992. [10] R. Takahashi. Classifying subcategories of modules over a commutative Noetherian ring. Journal of the London Mathematical Society, 78(3):767–782, 2008. [11] L. A. Tarrio, A. J. Lopez, and M. J. S. Salorio. Bousfield localization on formal schemes. Journal of Algebra, 278(2): 585–610, 2004.

M.V. Lomonosov Moscow State University

e-mail: lu.li.bo1990@gmail.com

D. V. Lytkina, **V. D. Mazurov** (Novosibirsk), **A. Kh. Zhurtov** (Nalchik)

Finite generalized Frobenius groups

Let G be a group, F a proper non-trivial subgroup of G. A coset Fx of G by F is said to be a *primary coset* if all elements of Fx are p-elements for some prime p (depending on Fx). A periodic group G having a non-trivial proper normal subgroup F is called a *generalized Frobenius group* with *kernel* F if Fx is a primary coset for every element $Fx \in G/F$ of prime order.

Notice that every finite Frobenius group and every finite Camina group [1] are generalized Frobenius groups. The talk is devoted to the classification of perfect finite generalized Frobenius groups. The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 19-01-00507.

Let V be a G-module over a field of prime characteristic p. We say that V is a *p'-free module* (and G acts *p'-freely* on V) if $vh \neq v$ fro every $0 \neq v \in V$ and every $1 \neq g \in G$ such that g is a p'-element.

Finite perfect groups which have a p'-free module for some p are described in [2].

The main result of this talk is the following

Theorem. Let G be a non-trivial perfect finite generalized Frobenius group with kernel F. Then F is nilpotent and G acts p'-freely on every chief factor of G inside F.

Moreover, one of the following holds:

(1) F is a p-group for some odd prime p dividing $|G : F|$ and $G/O_p(G) \simeq SL_2(p^a)$, $a \geqslant 1$.

(2) F is a 2-group and $G/O_2(G)$ is isomorphic to $L_2(2^a)$, $a \geqslant 2$, $Sz(2^{2b+1})$, or to $L_2(2^{2a+1}) \times Sz(2^{2b+1})$, $(2a + 1, 2b + 1) = 1$.

(3) F is a 3-group and $G/O_3(G) \simeq SL_2(r)$, $r \in \mathfrak{R} \cup \{7, 17\}$.

(4) F is a $\{3, r\}$-group, $G/F \simeq SL_2(r)$, $r \in \mathfrak{R} \cup \{7, 17\}$.

(5) $G/F \simeq SL_2(5)$.

Here $\mathfrak{R}$ is the set of all primes r satisfying the following conditions:

(a) $r = 2^a \cdot 3^b + 1$ for $a \geqslant 2$, $b \geqslant 0$;

(b) $(r + 1)/2$ is a prime.

The authors are grateful to Professor A. S. Kondratiev who drew their attention to Camina groups.

References. [1] A. R. Camina, Some conditions which almost characterize Frobenius groups. Israel J. Math., 31, No. 2 (1978), 153–160. [2] P. Fleischmann, W. Lempken, P. H. Tiep, Finite p'-semiregular groups. J. Algebra, 188, No. 2 (1997), 547–579.

Siberian state university of telecommunications and information sciences
Sobolev Institute of Mathematics
Kabardino-Balkarian state university

e-mail: daria.lytkin@gmail.com, mazurov@math.nsc.ru, zhurtov_ a@mail.ru

A. Mamontov, **A. Staroletov** (Novosibirsk), **M. Whybrow** (Kaiserslautern, Germany)

Minimal 3-generated groups of 6-transpositions and Majorana algebras

The Monster group was first constructed as the automorphism group of the Griess algebra $V_{\mathbb{M}}$, which is a 196884-dimensional commutative non-associative real algebra [1]. Then it appeared in the context of Vertex Operator Algebras (VOA). A. A. Ivanov [2] introduced Majorana theory as the axiomatization of certain properties of this algebra, presuming the bijection between involutions in the automorphism group and certain idempotens (axes) of the algebra, and reproving the classification of algebras generated by two axes.

It is natural to study next algebras, generated by three axes. This is in generally a hard question, since S. P. Norton has shown that the Monster algebra is 3-generated in many different ways. We introduce the definition of a minimal 3-generated Majorana algebra and provide an almost complete classification of such algebras. In our work we use correspondence between groups and algebras, and definition of «minimality» for groups and algebras is similar.

Classification of two-generated algebras imply that involutions D, corresponding to the axes, have 6-transposition property, i.e. the order of their product is not greater than 6. Morover, corresponding group is minimal 3-generated, i.e. if $H \leq G$ and $H = \langle H \cap D \rangle$ then either $H = G$ or H can be generated by two elements of D. The classification of minimal 3-generated groups will be presented on the talk.

References. [1] R. L. Griess. The friendly giant. Invent. Math. 69 (1982), 1–102, 1982. [2] A. A. Ivanov. The Monster Group and Majorana Involutions. Number 176 in Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

Sobolev Institute of Mathematics
Novosibirsk State University
Arbeitsgruppe Algebra, Geometrie und Computeralgebra, TU Kaiserslautern
e-mail: mamontov@math.nsc.ru

V. H. Mikaelian (Yerevan)

On pairs of wreath products of groups generating equal varieties

The aim of this communication is to present our recent note [5] which suggests a method of detection of wreath products which generate the same variety of groups. More precisily: we are given the groups A_1, A_2, B_1, B_2 such that A_1 and A_2 generate the same variety $\mathfrak{U}$, and the groups B_1 and B_2 generate the same variety $\mathfrak{V}$. Do the wreath products $A_1 \mathrm{Wr} B_1$ and $A_2 \mathrm{Wr} B_2$ generate the same variety? In other words, does the equality

$$\mathrm{var}(A_1 \mathrm{Wr} B_1) = \mathrm{var}(A_2 \mathrm{Wr} B_2) \tag{$*$}$$

hold for the given A_1, A_2, B_1, B_2 (see background information on varieties of groups in [7])? This topic continues our research of [3, 4, 6] in which we discussed other properties of varieties generated by wreath products, in particular, equality of the variety generated by $A_1 \mathrm{Wr} B_1$ to the product $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$.

To give an answer to the above question for some classes of nilpotent and abelian groups we need some auxiliary notations for abelian groups (we adopt them from [2]). Let B_1 and B_2 be abelian groups of finite exponent, and let for a prime p their p-primary components $B_1(p)$ and $B_2(p)$ have direct decompositions $B_1(p) = C_{p^{u_1}}^{\mathfrak{m}_{p^{u_1}}} \times \cdots \times C_{p^{u_r}}^{\mathfrak{m}_{p^{u_r}}}$ and $B_2(p) = C_{p^{v_1}}^{\mathfrak{m}_{p^{v_1}}} \times \cdots \times C_{p^{v_s}}^{\mathfrak{m}_{p^{v_s}}}$, where $C_{p^{u_i}}^{\mathfrak{m}_{p^{u_i}}}$ is the direct product of $\mathfrak{m}_{p^{u_1}}$ copies of the cycle $C_{p^{u_i}}$ of order p^{u_i}; and $C_{p^{v_i}}^{\mathfrak{m}_{p^{v_i}}}$ is defined similarly for B_2. Suppose $u_1 > \cdots > u_r$ and $v_1 > \cdots > v_r$. Define $B_1(p) \equiv B_2(p)$ if and only if: either $B_1(p), B_2(p)$ both are *finite* and isomorphic; or $B_1(p), B_2(p)$ both are *infinite*, and there is a k such that: (i) $C_{p^{u_k}}^{\mathfrak{m}_{p^{u_k}}}$ is the first infinite factor of $B_1(p)$, $C_{p^{v_k}}^{\mathfrak{m}_{p^{v_k}}}$ is the first infinite factor of $B_2(p)$; (ii) $u_k = v_k$; (iii) $u_i = v_i$, $\mathfrak{m}_{p^{u_i}} = \mathfrak{m}_{p^{v_i}}$ for each $i = 1, \ldots, k-1$.

Theorem. (Theorem 2.3 in [5]) Let A_1, A_2 be non-trivial nilpotent groups of exponent m generating the same variety, and let B_1, B_2 be non-trivial abelian groups of exponent n generating the same variety. If any prime divisor p of n also divides m, then the equality $(*)$ holds for A_1, A_2, B_1, B_2 if and only if $B_1(p) \equiv B_2(p)$ for each of such primes p.

We have especially simple situations in cases, when B_1, B_2 both are finite, or if one of them is finite, and the other is infinite:

Corollary. In the above notations:

1. equality $(*)$ holds for finite groups B_1, B_2 if and only if B_1 and B_2 are isomorphic,

2. equality $(*)$ never holds if one of the groups B_1, B_2 is finite, and the other is infinite.

The presented facts generalize some results of Kovács and Newman on subvariety structure of product varieties of groups [1].

The proofs technique uses both standard methods of varieties of groups reflected in [7], and also newer methods, such as, Shield's theory developed for computation of the nilpotency class for wreath products [8, 9].

References. [1] L.G. Kovács, M.F. Newman, Torsionfree varieties of metabelian groups, de Giovanni, Francesco (ed.) et al., Infinite groups 1994. Proceedings of the international conference, Ravello, Italy, May 23-27, 1994. Berlin: Walter de Gruyter. 125–128 (1996). [2] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups. Volume II, Academic Press, New York, 1973. [3] V.H. Mikaelian, Metabelian varieties of groups and wreath products of abelian groups, J. Algebra, 2007 (313), 2, 455–485. [4] V.H. Mikaelian, The criterion of Shmel'kin and varieties generated by wreath products of finite groups (Russian), Algebra and Logic, 56, 2, (2017), 164–175. [5] V.H. Mikaelian, Subvariety structures in certain product varieties of groups, Journal of Group Theory, 21 (2018), 5, 865–884. [6] V.H. Mikaelian, On the classification of varieties generated by wreath products, Izvestiya: Mathematics, 82 (2018), 5, 1006–1018. [7] H. Neumann, Varieties of Groups, Varieties of groups (Ergebn. Math. Grenzg., 37), Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1967. [8] D. Shield, Power and commutator structure of groups, Bull. Austral. Math. Soc. 17, (1977) 1–52. [9] D. Shield, The class of a nilpotent wreath product, Bull. Austral. Math. Soc. 17 (1977) 53–89.

Yerevan State University
American University of Armenia

e-mail: vmikaelian@ysu.am
vmikaelian@aua.am

A. V. Mikhalev, **E. E. Shirshova** (Moscow)

The ordered projective geometry over skew fields

Let $F =< F, +, \cdot >$ be a skew field. Recall that the skew field F is said to be *a partially ordered skew field* whenever $< F, +, \leqslant>$ is a partially ordered group and the following condition holds:

if $a \leqslant b$ and $c > 0$, then $ac \leqslant bc$ and $ca \leqslant cb$ for all $a, b, c \in F$.

We will call a partially ordered skew field F *a directed skew field* whenever the group $< F, +, \leqslant>$ is a directed group.

Everywhere below, F always denotes a partially ordered skew field, the characteristic of F is equal to zero, and the unity element of the field F is a positive element.

One can find the next definition in books [1] and [2].

A left vector space ${}_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\} >$ over a partially ordered skew field F is said to be *a partially ordered vector space* whenever the group $< V, +, \leqslant>$ is a partially ordered group and the following condition holds:

if $0 \leqslant v$, then $0 \leqslant \alpha v$ for all elements $v \in V$ and all $\alpha > 0$ from the skew field F.

A partially ordered vector space ${}_FV$ over a partially ordered skew field F is said to be *directed (linearly ordered)* if the group $< V, +, \leqslant>$ is a directed (linearly ordered) group. The vector space ${}_FV$ is called *a vector lattice* if the group $< V, +, \leqslant>$ is a lattice-ordered group.

The idea of vector lattices was first considered by L. V. Kantorovich [3] and Riesz [5]. The concept of vector lattices is important in the functional analysis. For this reason, properties of real function spaces were investigated by different authors (see [4]).

At present, we have seen a beginning of systematic investigation for partially ordered vector spaces over different partially ordered skew fields.

Let M be a linear subspace of a partially ordered vector space ${}_FV$ over a partially ordered skew field F. We will call M *a directed subspace* if the group $< M, +, \leqslant>$ is a directed subgroup of the group $< V, +, \leqslant>$.

Let us denote by $L = L({}_FV)$ the set of all directed subspaces of a partially ordered vector space ${}_FV$ over a partially ordered skew field field F.

Theorem 1. Suppose ${}_FV$ is a partially ordered vector space over a directed skew field F, and $0 < v \in V$; then there exists a directed subspace M_v of the space ${}_FV$, where any positive element $u \in M_v$ satisfies inequalities $u \leqslant \alpha v$ for some elements $\alpha > 0$ from the skew field F.

A partially ordered group G is referred to *interpolation groups* whenever for inequalities $u_1, u_2 \leqslant v_1, v_2$ there exists an element $w \in G$ for which $u_1, u_2 \leqslant w \leqslant v_1, v_2$ for all $u_1, u_2, v_1, v_2 \in G$.

We will call a partially ordered vector space ${}_FV$ over a partially ordered skew field F *an interpolation space* if the group $< V, +, \leqslant>$ is an interpolation group.

Positive elements a and b are called to be *almost orthogonal* in a partially ordered group G whenever inequalities $g \leqslant a, b$ imply the validity of inequalities $g^n \leqslant a, b$ for all elements $g \in G$ and all integers $n > 0$. A partially ordered group G is referred to *$\mathcal{AO}$-groups* whenever each element $g \in G$ has a representation $g = ab^{-1}$ for some almost orthogonal elements a and b of the group G. An interpolation $\mathcal{AO}$-group is said to be *a pseudo lattice-ordered group.*

Theorem 2. If $_FV$ is an interpolation space, then L is a sublattice for the lattice of all subspaces of the vector space V which has a least element and the greatest element.

In addition: 1) L is a complete upper sublattice;

2) if the group $< V, +, \leqslant >$ is a pseudo lattice-ordered group, then L is a complete distributive lattice, where L has the least element and the greatest element. Furthermore, L is Brauer's lattice.

References. [1] G. Birkhoff, Lattice theory. Providence: Rhode Island, 1967 [2] R. Ber, Linear algebra and projective geometry. Moscow: IL, 1955. [3] L. V. Kantorovich, Linear semiordered spaces. Math.Annalen, 2 (1937), 121–168. [4] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, Functional analysis. Moscow: Nauka, 1977. [5] F. Riesz, Sur la théorie générale des opérations linéaires. Ann.Math, 41(1940), 174–206.

M.V. Lomonosov Moscow State University
Moscow Pedagogical State University
e-mail: shirshiva.elena@gmail.com

D. V. Millionshchikov (Moscow)

Naturally graded Lie superlagebras

We consider positively graded Lie superalgebras

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_0^i \oplus \oplus_{j=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_1^j, \quad [\mathfrak{g}_\alpha^i, \mathfrak{g}_\beta^j] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta \; mod \; 2}^{i+j}, \ \alpha, \beta \in \{0, 1\}.$$

We call a positively graded Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ naturally graded if it is isomorphic to its associated graded Lie superalgebra $\mathrm{gr}_C \mathfrak{g}$ with respect to the filtration by the ideals $C^i\mathfrak{g}$ of the lower central series.

We classify narrow in the sense of Shalev and Zelmanov [1] naturally graded Lie superalgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_0^i \oplus \oplus_{j=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_1^j$ such that

$$1 \leq \dim \mathfrak{g}_0^1 \leq 2, \dim \mathfrak{g}_0^i = 1, i \geq 2, \dim \mathfrak{g}_1^j = 1, j \geq 1.$$

This classification generalizes the classical result by Vergne [3] on naturally graded filiform Lie algebras and the recent classification of narrow naturally graded Lie algebras [1].

References. [1] A. Shalev, E. Zelmanov, Narrow algebras and groups. J. of Math. Sciences, 93 (1999), 951–963. [2] D. V. Millionshchikov, Narrow positively graded Lie algebras. Dokl. Math., 98 (2018), 626–628. [3] M. Vergne, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Bull. Soc. Math. France, 98 (1970), 81–116.

Lomonosov Moscow State University
e-mail: mitia_m@hotmail.com

E. A. Morozov (Moscow)

Surfaces containing two parabolas through each point

We prove that any surface in $\mathbb{R}^3$ containing two arcs of parabolas with axes parallel to Oz through each point has a parametrization $\left(\frac{P(u,v)}{R(u,v)}, \frac{Q(u,v)}{R(u,v)}, \frac{Z(u,v)}{R^2(u,v)}\right)$ for some $P, Q, R, Z \in \mathbb{R}[u, v]$ such that P, Q, R have degree at most 1 in u and v, and Z has degree at most 2 in u and v (under some additional technical assumptions). This result can be considered in the context of describing surfaces containing two isotropic circles through each point in isotropic geometry (in the Euclidean case all such surfaces are described in [1]). We also consider some other problems about surfaces containing isotropic circles and lines through each point.

References. [1] M. Skopenkov, R. Krasauskas. Surfaces containing two circles through each point // Math. Ann. (2018).

National Research University “Higher School of Economics”
e-mail: gorg.morozov@gmail.com

D. Osin (Nashville)

Quasi-isometric diversity of finitely generated groups

Geometric group theory studies groups as metric spaces. The most interesting results in this direction are obtained by neglecting local features of groups and exploring their large scale geometry. In particular, it is customary to consider groups up to the *quasi-isometry relation*, which plays the same role is geometric group theory as the isomorphism relation in algebra.

We use standard tools of descriptive set theory to show that every set of finitely generated groups with “sufficiently complicated structure"contains $2^{\aleph_0}$ quasi-isometry classes. Several known constructions of continuous families of non-quasi-isometric groups due to Grigorchuk, Bowditch, Cornullier-Tessera, and Kropholler–Leary–Soroko can be thought of as particular manifestations of this general phenomenon. The exact statement of our main result is somewhat technical and we do not reproduce it here. Instead we record three applications to constructing non-quasi-isometric groups satisfying certain interesting algebraic or geometric properties.

Theorem 1. There exist $2^{\aleph_0}$ quasi-isometry classes of finitely generated groups of asymptotic dimension 1.

This result should be compared to the well-known fact that every finitely presented group of asymptotic dimension 1 is virtually free; in particular, there are only 2 quasi-isometry classes of such groups.

The next result is related to the famous Burnside problem, asking whether every finitely generated group of a fixed exponent $n \in \mathbb{N}$ is finite. In modern terms, the question of Burnside can be reformulated as follows: *Are all finitely generated groups of bounded exponent quasi-isometric?*. The negative solutions due to Novikov-Adian and Ivanov imply that there are at least 2 quasi-isometry classes of groups of exponent n for every sufficiently large n. Our approach allows us to prove the following.

Theorem 2. For every sufficiently large n, there exist $2^{\aleph_0}$ quasi-isometry classes of finitely generated torsion groups of exponent n.

Yet another application of our method yields non-quasi-isometric solvable groups. It is well-known that finitely generated metabelian groups satisfy the maximum condition for subgroups. In particular, there exist only countably many such groups up to isomorphism. On the other hand, there are $2^{\aleph_0}$ isomorphism classes of solvable groups of class 3. In [**?**], Cornulier and Tessera showed that, up to quasi-isometry, there are continuously many solvable groups of step 4. We improve their result as follows.

Theorem 3. There exist $2^{\aleph_0}$ quasi-isometry classes of finitely generated center-by-metabelian groups.

Vanderbilt University
e-mail: denis.v.osin@vanderbilt.edu

D. Piontkovski

Algebras and formal languages

In a number of cases, either an infinite algebraic system or a linear basis of such a system are in one-to-one correspondence with a common formal language. This gives a way to calculate the corresponding generating function (such as the Hilbert series of a graded of a filtered algebra). For example, a linear basis of an associative algebra defined by a finite number of monomial relations forms a regular language, as well as the set of nonzero words in a finitely presented monomial semigroup. It follows that the Hilbert series of such an algebra a rational function (Govorov’s theorem). A natural more general class with rational Hilbert series is the class of automaton algebras introduced by Ufnarovski. By definition, the normal basis of such an algebra forms a regular language.

In the first part of the talk, we will discuss a class of associative algebras and monoids for which the leading terms of the Groebner basis of relations form an unambiguous context-free language. Under mild restrictions, such algebras have algebraic Hilbert series. We discuss examples of finitely presented algebras of that kind with irrational Hilbert series (discovered in co-operation with La Scala and Tiwari) and their connection with classical context-free languages (such as the Dyck language). So to say, in these examples the noncommutative Groebner basis machine generates a context-free language like a formal grammar.

In the second part, we discuss more general (linear) algebras defined over an arbitrary non-symmetric operad with finite Groebner basis (such as the operad of associativity and its more general versions). We show that a linear algebra defined by a finite set of monomial relations has a monomial basis which forms a deterministic context-free language. It follows that the Hilbert series of such an algebra is again an algebraic function.

National Research University Higher School of Economics

e-mail: dpiontkovski@hse.ru

M. E. Semenov (Tomsk, Russia)

Self-crossing points of a closed-path motion

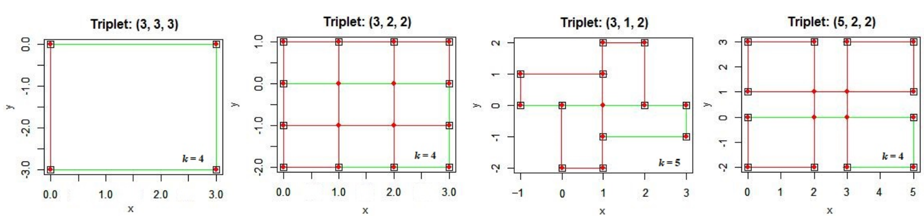
We consider a closed-path motion in the two-dimensional Cartesian coordinate system. This model has been studied for a number of applications: geological faults, textile structure, robots trajectory planning, bioinformatics, computer graphics [1-3].

Let $(a, b, c) \in \mathbf{N}_1$ be a triple and $\alpha \in (-\pi, \pi]$ is an angle of rotation. A line segment is represented by its two end-points $[x, y]$. To construct a closed-path motion, we proceed as follows:

1. Draw a first line segment of length a on the horizontal axis.
2. Turn right by an angle of α.
3. Draw a second line segment of length b from the end-point of the first segment.
4. Turn right by an angle of α.
5. Draw a third line segment of length c from the end-point of the second segment.
6. Repeat previous steps $n = \frac{2\cdot\pi}{\alpha}$ times.

After steps 1-6 we shift from origin $(0, 0)$ by some vector $\vec{x_1}$ and turn by the angle of α. Now repeat the deterministic algorithm, and shift from the current position by some vector $\vec{x_2}$ which is exactly like $\vec{x_1}$, but turned by the angle of α. The sum of vectors $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \ldots \vec{x_n}$ is zero because all of them have the same length, and each one is turned by the angle of α. As the result of the algorithm we get the closed-path motion and return to the starting point. Moreover, intermediate positions will be n points forming a regular n-sided polygon.

We are interested in the number of self-crossing points, k, between the line segments for the triple (a, b, c). Self-crossing points in a line segment for different triples (a, b, c) are depicted in Figure, the origin $(0, 0)$ is the starting point for the construction of a closed-path motions, the angle of $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. The green line marks the movement by steps 1-6 from the origin $(0, 0)$, then the red line indicates the rest of a closed-path motion to the starting point. End-points of line segments are denoted with open squares while self-crossing points denoted with filled red circles.



When forming a triplet (a, b, c) it is necessary to consider at least three cases: a) all numbers are equal to one another $a = b = c$, b) all numbers are unique $a \neq b \neq c$, and c) a triplet has the two repeating elements, for example, $a = b$. In the last case, there are three possible relations between a and b should be emphasized: a) $a = 2 \cdot b$, b) $a > 2 \cdot b$, and c) $a < 2 \cdot b$. The order of a, b, and c in the triplet is irrelevant and a desired closed-path motion can be obtained by combining translation and rotation [1] for the original closed-path motion through matrix multiplications.

The further research can be continued in the following directions. At first, it is the detection whether line segments interfere or intersect with each other. At second, it is the computaion of interferensions or intersections of analytic curves.

References. [1] S. M. LaValle. Planning algorithms. Cambridge University Press, 2006. [2] B. Chazelle, H. Edelsbrunner. An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the Plane. Journal of the Association for Computing Machinery. 39 (1) 1–54 (1992). [3] N. M. Patrikalakis, T. Maekawa. Intersection Problems in "Handbook of Computer Aided Geometric Design". North-Holland, Amsterdam, 623-649, (2002).

Tomsk Polytechnic University

e-mail: sme@tpu.ru

D. V. Skokov (Ekaterinburg, Russia)

Special elements of the lattice of semigroup varieties

The collection of all semigroup varieties forms a lattice with respect to classtheoretical inclusion. This lattice is denoted by **SEM**. The lattice **SEM** has been intensively studied since the beginning of 1960s. A systematic overview of the material is given in the survey [1]. There are a number of article devoted to an examination of special elements of different types in the lattice **SEM** (see [1, Section 14] or the recent survey [2] devoted specially to this subject).

We continue study the special elements of the lattice **SEM** and here we focus on modular elements.

An element x of a lattice $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ is called *modular* if

$$\forall y, z \in L \quad \big(y \leq z\big) \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y.$$

It is interesting that the problem of description of modular elements of the **SEM**, being historically the first type of special elements of the **SEM** that attracted the attention of researchers, is open so far.

We are going to talk about a recent results and some constructions on modular elements of the **SEM**.

The reported study was funded by RFBR according to the research projects No. 18-31-00443 and No. 17-01-00551 and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 1.6018.2017/8.9).

References. [1] L. N. Shevrin, B. M. Vernikov, M. V. Volkov, Lattices of semigroup varieties. Izvestiya VUZ. Matematika, 3 (2009), 3–36 [Russian; Engl. translation: Russian Math., 53:3 (2009), 1–28]. [2] B. M. Vernikov, Special elements in lattices of semigroup varieties, Acta Sci. Math. (Szeged), 81 (2015), 79–109.

Ural Federal University
Institute of Natural Sciences and Mathematics

e-mail: dmitry.skokov@urfu.ru

M. B. Skopenkov (Moscow)

Surfaces containing two circles through each point

This is a joint work R. Krasauskas.

Motivated by potential applications in architecture, we find all analytic surfaces in 3-dimensional Euclidean space such that through each point of the surface one can draw two transversal circular arcs fully contained in the surface (and analytically depending on the point). The search for such surfaces traces back to the works of Darboux from XIXth century. We prove that such a surface is an image of a subset of one of the following sets under some composition of inversions:

- the set $\{\, p + q : p \in \alpha, q \in \beta \,\}$, where α, β are two circles in $\mathbb{R}^3$;

- the set $\{\, 2\frac{p\times q}{|p+q|^2} : p \in \alpha, q \in \beta, p+q \neq 0 \,\}$, where α, β are circles in the unit sphere S^2;
- the set $\{\, (x,y,z) : Q(x,y,z,x^2+y^2+z^2) = 0 \,\}$, where $Q \in \mathbb{R}[x,y,z,t]$ has degree 2 or 1.

The proof uses a new factorization technique for quaternionic polynomials. A substantial part of the talk is elementary and is accessible for high school students.

This research was conducted within the framework of the Academic Fund Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE) in 2015-2016 (Grant No 15-01-0092) and supported within the framework of a subsidy granted to the HSE by the Government of the Russian Federation for the implementation of the Global Competitiveness Program, and also by the President of the Russian Federation Grant MK-6137.2016.1, "Dynasty" foundation, and the Simons–IUM fellowship.

References. [1] R. Beauregard, When is F[x,y] a unique factorization domain?, Proc. Amer. Math. Soc. 117:1 (1993), 67–70. [2] J. Kollár, Quadratic solutions of quadratic forms, http://arxiv.org/abs/1607.01276. [3] J. Schicho, The multiple conical surfaces, Contrib. Algeb. Geom. 42:1 (2001), 71–87. [4] M. Skopenkov, R. Krasauskas, Surfaces containing two circles through each point, Math. Annalen (2018).

NRU Higher school of economics, Institute for information transmission problems RAS

e-mail: skopenkov@rambler.ru

M. M. Sorokina (Bryansk)

On $\mathfrak{F}^\omega$-abnormal maximal subgroups of finite groups

Only finite groups are considered. A subgroup H of the group G is called quasisubnormal in G if for every Sylow p-subgroup P of G a subgroup $H \cap P$ is a Sylow p-subgroup of H for all $p \in \pi(G)$ [1], where $\pi(G)$ is the set of all prime divisors of $|G|$. L.A. Polyakov in [2] established the criterion of quasisubnormality of $\mathfrak{F}$-abnormal maximal subgroups of the group where $\mathfrak{F}$ is a local formation. We consider the concept of an $\mathfrak{F}^\omega$-abnormal maximal subgroup of a group which is the natural generalization of the concept of an $\mathfrak{F}$-abnormal maximal subgroup. Let $\mathfrak{F}$ be a class of groups, ω be a non-empty subset of the set $\mathbb{P}$ of all primes. According to [3] a maximal subgroup M of the group G is said to be $\mathfrak{F}^\omega$-abnormal ($\mathfrak{F}^\omega$-normal) in G if $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \notin \mathfrak{F}$ ($G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ respectively) where $Core_G(M)$ and $O_\omega(G)$ are the largest normal subgroup of G included into M and the largest normal ω-subgroup of G respectively. If $\mathfrak{F}$ is a homomorph then every $\mathfrak{F}$-abnormal maximal subgroup of the group is its $\mathfrak{F}^\omega$-abnormal maximal subgroup, the opposite is not true. If $\pi(G) \subseteq \omega$ then the concepts of an $\mathfrak{F}$-abnormal maximal subgroup and an $\mathfrak{F}^\omega$-abnormal maximal subgroup of the group G coincide. We have obtained the necessary and sufficient conditions under which $\mathfrak{F}^\omega$-abnormal maximal subgroups of the group G are quasisubnormal (Theorems 1 and 2 respectively).

Not listed designations and definitions can be found in [3]. Denote the class of all finite groups by $\mathfrak{E}$ and the class of all finite nilpotent groups by $\mathfrak{N}$; $\mathfrak{F}_\omega$ is a class of all ω-groups belonging to the class $\mathfrak{F}$; $\pi(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\pi(G)$. If $\mathfrak{F}_1$ and $\mathfrak{F}_2$ are classes of groups then $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{E}$: there exists $N \triangleleft G$ such that $N \in \mathfrak{F}_1$ with $G/N \in \mathfrak{F}_2\}$. Let $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$formations of groups$\}$, where $f(\omega') \neq \emptyset$, and $\delta : \mathbb{P} \to \{$non-empty Fitting formations of groups$\}$ be functions. A formation $\omega F(f,\delta) = \{G \in \mathfrak{E} : G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ and $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ for all $p \in \omega \cap \pi(G)\}$ is called an ω-fibered formation with the ω-satellite f and the direction δ [4], where $G_{\delta(p)}$ is the largest normal subgroup of G belonging to the class $\delta(p)$. A formation $\omega F(f,\delta)$ is called an ω-local formation if $\delta(p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ for all $p \in \mathbb{P}$ where $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ is the class of all p-nilpotent groups.

Theorem 1. Let $\mathfrak{F}$ be an ω-local formation closed under normal subgroups and extensions, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\omega \subseteq \pi$ and G be a group. If every $\mathfrak{F}^\omega$-abnormal maximal subgroup of G is quasisubnormal in G then $G = [A]B$ where $A \in \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi\cap\omega'}$ and B is a nilpotent ω'-group.

Theorem 2. Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty formation, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ and G be a group. If $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ and M is an $\mathfrak{F}^\omega$-abnormal maximal subgroup of G with $\pi(|\, G : M \,|) \subseteq \pi'$ then M is quasisubnormal in G.

References. [1] O. Kegel, Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. Math. Z., 78:3 (1962), 205–221. [2] L. A. Polyakov, On the Theory of Generalized Subnormal Subgroups of

Finite Groups. Subgroup Structure of Finite Groups. Minsk: Science and Technology, 1981, 62–66. [3] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin-New Jork: Walter de Gruyter, 1992. [4] V. A. Vedernikov, M. M. Sorokina, ω-Fibered Formations and Fitting Classes of Finite Groups. Math. Notes, 71:1 (2002), 39–55.

I.G. Petrovsky Bryansk State University

e-mail: mmsorokina@yandex.ru

A. Staroletov (Novosibirsk)

On minimal polynomials of powers of cycles in ordinary representations of symmetric and alternating groups

Denote the symmetric (alternating) group of degree n by S_n (A_n). Recall that a partition of n is a nonincreasing sequence of positive integers $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ whose sum equals n. It is well-known that there exists one-to-one correspondence between the set of equivalence classes of ordinary irreducible representations of S_n and the set of partitions of n.

The *alternating representation* is the representation of degree 1 such that $\sigma \in S_n$ maps to $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Furthermore, if V is a vector space of dimension n with a basis e_1,e_2,. . .,e_n then S_n acts in the natural way on V, namely, for every $\sigma \in S_n$ and $i \in \{1, \dots, n\}$ we have $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. There are two irreducible constituents in such representation: the line $l = \langle e_1 + e_2 + ... + e_n\rangle$ and its orthogonal complement $l^\perp$. This representation of S_n on $l^\perp$ is called *the standard representation* of S_n. It is known that this representation corresponds to a partition $(n-1, 1)$. Any irreducible representation that corresponds to a partition $(1^{n-1}, 2) = (1, 1, ..., 1, 2)$ is called *the representation conjugated with the standard representation.*

Consider a permutation $\sigma \in S_n$ and an irreducible $\mathbb{C}S_n$-module (or $\mathbb{C}A_n$-module) V. The minimal polynomials of σ on V such that $|\sigma|$ is a prime were found in [1]. Observe that $|\sigma| = p$ for a prime p iff σ is a product of some pairwise disjoint cycles of length p. We say that $\sigma \in S_n$ is of shape $[a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_k^{b_k}]$, where a_i are distinct integers, if a cycle decomposition of σ consists of b_1 cycles of length a_1, b_2 cycles of length a_2,. . ., b_k cycles of length a_k. The main result is the following.

Theorem 1. Let n, r and m be positive integers such that $n \geq 3$, $r \geq 2$ and $rm \leq n$. Assume that $\sigma \in S_n$ is of shape $[r^m 1^{n-rm}]$ and $\rho : S_n \to GL(V)$ is an irreducible nontrivial representation of S_n over $\mathbb{C}$. Denote the minimal polynomial of $\rho(\sigma)$ by $\mu_V^\sigma(x)$. Then $\mu_V^\sigma(x) \neq x^r - 1$ if and only if one of the following holds:

(i) $r = n$, $m = 1$ and ρ is the standard representation. In this case $\mu_V^\sigma(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$;

(ii) n is odd, $r = n$, $m = 1$, and ρ is the conjugated with standard representation. In this case $\mu_V^\sigma(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$.

(iii) n is even, $r = n$, $m = 1$, and ρ is the conjugated with standard representation. In this case $\mu_V^\sigma(x) = \frac{x^n-1}{x+1}$.

(iv) σ is odd, ρ is the alternating representation and $\mu_V^\sigma(x) = x + 1$;

(v) σ is even, ρ is the alternating representation and $\mu_V^\sigma(x) = x - 1$;

As a corollary of this result, we find minimal polynomial of $\rho(\sigma)$ in ordinary representations of alternating groups. Moreover, we give examples for other shapes of permutations, where 1 is not an eigenvalue.

References. [1] A. E. Zalesskii. Eigenvalues of prime-order elements in projective representations of alternating groups. (Russian) Vestsi Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk 131:3 (1996), 41–43.

Sobolev Institute of Mathematics
Novosibirsk State University

e-mail: staroletov@math.nsc.ru

S. V. Tikhonov

On genus of division algebras

The genus $\mathbf{gen}(D)$ of a finite-dimensional central division algebra D over a field F is defined as the collection of classes $[D'] \in Br(F)$, where D' is a central division F-algebra having the same maximal subfields as D. This means that D and D' have the same degree n, and a field extension K/F of degree n admits an F-embedding $K \hookrightarrow D$ if and only if it admits an F-embedding $K \hookrightarrow D'$.

The following questions were formulated in [1]:

Does the fact that division algebras D and D' have the same maximal subfields imply that the matrix algebras $M_l(D)$ and $M_l(D')$ have the same maximal subfields / étale subalgebras for any (or even some) $l > 1$?

Let n_1 and n_2 be relatively prime positive integers. Let also D_i and D_i' be central division algebras of degree n_i over a field F for $i = 1, 2$. Is it true that if $\mathbf{gen}(D_i) = \mathbf{gen}(D_i')$ for $i = 1, 2$, then $\mathbf{gen}(D_1 \otimes D_2) = \mathbf{gen}(D_1' \otimes D_2')$?

Negative answers to these questions are given in [2].

References. [1] V. I. Chernousov, A. S. Rapinchuk, I. A. Rapinchuk. The finiteness of the genus of a finite-dimensional division algebra, and some generalizations. arXiv:1802.00299. [2] S. V. Tikhonov. On genus of division algebras. arXiv:1904.03933.

Byelorussian State University

e-mail: tikhonovsv@bsu.by

I. A. Timofeenko (Krasnoyarsk)

The Chevalley groups of type E_l over a ring of Gaussian integers is $(2, 2, 2)$-generated

A group is called $(2, 2, 2)$-generated if it can be generated by three involutions. Let Φ be a reduced indecomposable root system. We denote $\Phi(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ the adjoined Chevalley group of type Φ over the ring of Gaussian integers $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$. It is generated by root subgroups $X_r = \{x_r(t) \mid t \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i\},\ r \in \Phi$ [1, corollary 3, p. 107]. By following notations from [2], we define monomial and diagonal elements respectively

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t),$$

$$h_r(t) = n_r(t)n_r(-1),\ r \in \Phi,\ t \in \{\pm 1, \pm i\},$$

$$n_r = n_r(1),$$

$$h_r = h_r(-1).$$

Theorem 1. *The adjoined Chevalley groups of type E_l over the ring of Gaussian integers are generated by the involutions α_1, α_2 and α_3 from table 1.*

Таблица 3: Involutions

Group	α_1	α_2	α_3
$E_6(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$	$x_{r_1}(i)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}h_{r_2}h_{r_4}h_{r_6}$
$E_7(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$	$x_{r_1}(i)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}h_{r_5}h_{r_7}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}$
$E_8(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$	$x_{r_1}(i)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}n_{r_8}h_{r_5}h_{r_1}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}h_{r_2}$

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 18-71-10007.

References. [1] R. Steinberg, Lectures On Chevalley Groups, Mir, 1974. (In Russian) [2] R.W. Carter, Simple Groups of Lie Type, John Wiley and Sons, 1972.

Siberian Federal University

e-mail: ivan@timofeenko.com

N. V. Timofeeva (Yaroslavl)

On resolution of torsion-free coherent sheaves: arbitrary dimension

I will discuss the iterative process to resolve a flat family of torsion-free coherent sheaves on nonsingular polarized (i.e. supplied with very ample invertible sheaf L) projective algebraic variety (S, L) of arbitrary finite dimension. The procedure returns a family of locally free sheaves on projective algebraic schemes of appropriate class. This is intended to be higher dimensional analog of the «standard resolution» of family of coherent sheaves on a surface (for description of two-dimensional case see [1] and references to author's papers within).

The standard resolution for dimension two contains one step and is a key procedure to interpret moduli scheme for semistable coherent sheaves with fixed rank and Hilbert polynomial on the surface S as moduli scheme of so called admissible pairs (i.e. locally free sheaves on appropriate schemes) with same rank and same Hilbert polynomial. The higher dimensional analog for standard resolution contains number of steps which is equal to homological dimension of the sheaf under resolution.

The procedure of standard resolution has two versions.

- *Pointwise version* is the transformation of the data $((S, L), E)$ to the data (admissible pair) $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ where E is a torsion-free coherent sheaf on (S, L) and $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ is certain class projective scheme $\widetilde{S}$ with very ample invertible sheaf $\widetilde{L}$ and $\widetilde{E}$ a locally free sheaf. If Hilbert polynomial of E is compute with respect to L and Hilbert polynomial of $\widetilde{E}$ is compute with respect to $\widetilde{L}$ then these two polynomials are equal.

- *Global version* is the transformation of a flat family $((T \times S, \mathcal{O}_T \boxtimes L), \mathbb{E})$ of torsion-free sheaves with base scheme T to the family of pairs, i.e. to $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{T}, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$. It consists of the flat family of projective schemes $\pi : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{T}$ with base scheme $\widetilde{T}$, of invertible sheaf $\widetilde{\mathbb{L}}$ which is very ample relative to π, and of locally free coherent sheaf $\widetilde{\mathbb{E}}$. Scheme $\widetilde{T}$ is birational to T and $\tau : \widetilde{T} \to T$ is the corresponding morphism. If restricted to points $\widetilde{p} \in \widetilde{T}$ and $p = \tau(\widetilde{p}) \in T$ this transformation leads to pointwise version taking $((S, L), \mathbb{E}|_{p \times S})$ to $((\pi^{-1}(\widetilde{p}), \widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(\widetilde{p})}), \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(\widetilde{p})})$. Hilbert polynomials of sheaves $\widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(\widetilde{p})}$ with respect to $\widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(\widetilde{p})}$ remain equal as the point $\widetilde{p}$ varies.

Acknowledgement: this work was carried out within the framework of the State Programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project No. 1.12873.2018/12.1

References. [1] N. V. Timofeeva. Admissible Pairs vs Gieseker–Maruyama. arXiv:1711.07816. To appear in: SB MATH, 2019, 210 (in press). In Russian: Mat. Sbornik, 2019, 210(5), pp. 109–134

P.G. Demidov Yaroslavl State University

Centre of Integrable Systems

e-mail: ntimofeeva@list.ru

Aleksandr Tsarev (Jeju, South Korea)

Lattices of foliated formations of T-groups and the laws

A class closed under taking homomorphic images and finite subdirect products is called a *formation.*

There is a duality in the research of formations of finite groups and formations of other algebraic systems. This gives the motivation to consider their properties from a unified viewpoint. Such a unified approach can be realized considering formations of so-called T-groups.

Consider an additive group G with zero 0. Refer to G as a **T-group** whenever we are also given some system T of k-ary algebraic operations on G for some positive integer k, while $t(0,\dots,0)=0$ for all $t\in T$, where 0 appears on the left k times if t is an k-ary operation ([3], [4,III], [6, VI]). Some particular cases of T-groups are **groups, modules, rings**, and multirings (i.e., T-groups with the condition every $t\in T$ on G is distributive with respect to addition).

In the theory of group classes, the constructions of the lattice theory have found some interesting applications, which allow creating simple proofs both the known facts and new results. Every law of the lattice of all formations is fulfilled in the lattice of all n-multiply ω-composition formations for all positive integers n [10, 12]. We generalize this fact for the lattices of formations of T-groups. For obtaining our main result, we use an elegant concept of partially foliated formation, which was introduced by Vedernikov [11].

Theorem [9]. Let $\mathfrak{M}$ be the class of all T-groups satisfying the minimality and maximality conditions for T-subgroups, and let n be a positive integer. Then every law of the lattice of all τ-closed $\mathfrak{M}$-formations (denoted by $\tau\Omega_1 F_0^{\varphi}$) is fulfilled in the lattice $\tau\Omega_1 F_n^{\varphi}$ (of all τ-closed n-multiply Ω_1-foliated $\mathfrak{M}$-formations with direction φ, such that $\varphi_0\leqslant\varphi$).

Formations of finite rings appeared first in [1]; and in [5], the concept of formation (local formation, n-multiply local formation) of multirings was introduced. As an immediate corollary from the theorem, for T-groups G with the condition every $t\in T$ on G is distributive with respect to addition, we obtain the following result.

Corollary. Every law of the lattice of all formations of finite multirings is fulfilled in the lattice of all n-multiply local formations of finite multirings.

Corollary [2, Theorem 2]. Let $\mathfrak{M}$ be the class of all T-groups satisfying the minimality and maximality conditions for T-subgroups. Then the lattice $\tau\Omega_1 F_n^{\varphi}$ (of all τ-closed n-multiply Ω_1-foliated $\mathfrak{M}$-formations) is modular for any nonnegative integer n and any direction φ, such that $\varphi_0\leqslant\varphi$.

Corollary [13, Theorem 3.1]. The lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations $c^{\tau}_{\omega_n}$ is modular for any nonnegative integer n.

Let $\mathfrak{F}$ be a formation. We denote the intersection of all maximal τ-closed n-multiply ω-composition subformations of $\mathfrak{F}$ by $\Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$, and we set $\Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}$ if there are no such subformations.

Corollary [7]. Let $\mathfrak{F}_1$ and $\mathfrak{F}_2$ be nonempty τ-closed n-multiply ω-composition formations. If $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2\neq(1)$ then $\Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1)\subseteq\Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_2)$ for any nonnegative integer n.

This work was partially supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (BRFFI–RFFI M-20017, grant F17RM-063).

References. [1] C. Christensen, An analogue of lubeseder's theorem for formations of finite rings. J. Austr. Math. Soc., 16 (1973), No 3, 375–378. [2] E. N. Demina, The lattices of n-multiply Ω_1-foliated formations τ-closed formations of multioperator T-groups. Discrete Math. Appl., 22 (2012), No 2, 147–172. [3] P. J. Higgins, Groups with multiple operators. Proc. London Math. Soc., 6 (1956), No 3, 366–416. [4] A. G. Kurosh. Lectures on General Algebra. [in Russian]. Fizmatgiz. Moscow, 1962. [5] L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, Formations of Algebraic Systems. Sovremennaya Algebra. [in Russian]. Nauka. Moscow, 1989. [6] L. A. Skornyakov (ed.). General Algebra. **2** [in Russian]. Nauka. Moscow, 1991. [7] A. Yu. Olshanskii. Geometry of defining relations in groups. [in Russian]. Nauka. Moscow, 1991. Translated in Mathematics and its Applications (Soviet Series), **70**, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers Group (1991). [8] A. Tsarev, On the maximal subformations of partially composition formations of finite groups, Bol. Soc. Mat. Mex., 2018, to appear. DOI: 10.1007/s40590-018-0205-y [9] A. Tsarev, Laws of the lattices of foliated formations of T-groups, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser., to appear. DOI: 10.1007/s12215-018-0369-3, 2018. [10] A. Tsarev, N. N. Vorob'ev, Lattices of composition formations of finite groups and the laws. J. Algebra Appl., 17 (2018), No 5, 17 p. [11] V. A. Vedernikov, E. N. Demina, Ω-Foliated formations of multioperator T-groups, Siberian Mathematical Journal, 51 (2010), No 5, 789–804. [12] N. N. Vorob'ev, A. N. Skiba, A. A. Tsarev, Laws of the lattices of partially composition formations. Sib. Math. J., 52 (2011), No 5, 802–812.

[13] N. N. Vorob'ev, A. A. Tsarev, On the modularity of a lattice of τ-closed n-multiply ω-composition formations. Ukr. Math. J., 62 (2010), No 4, 518–529.

Department of Mathematics,
Jeju National University,
690-756, Jeju,
South Korea
e-mail: alex_ vitebsk@mail.ru

L. Yu. Tsiovkina (Yekaterinburg)

An upper bound for the prime spectrum of the automorphism group of an arc-transitive $AT4(p, p+2, r)$-graph

Let Γ be a nonbipartite antipodal distance-regular graph of diameter 4. If the fundamental bound (in the sense by Koolen, Jurišić and Terwilliger) for Γ holds with equality, then the local graphs of Γ are strongly regular, and the intersection array of Γ is expressed in terms of the non-trivial eigenvalues p and $-q(q > 0)$ of the local graphs and the antipodality index of Γ. In this case, Γ is called an antipodal tight graph of diameter 4 with parameters (p, q, r) or simply an $AT4(p, q, r)$-graph.

The study of the class of $AT4(p, q, r)$-graphs is motivated by the fact that it contains almost all known non-bipartite antipodal distance-regular graphs of diameter 4, including the famous antipodal triple cover of the 3-transposition graph of the sporadic Fischer group $Fi_{24}{}'$. Many of the known examples are related to important permutation representations of some quasisimple groups or have pseudogeometric local graphs.

The case when parameters of an $AT4(p, q, r)$-graph satisfy the equation $q = p + 2$ is of special interest: each $AT4(p, p+2, r)$-graph has zero Krein parameter q^4_{44} and, by a theorem of Jurišić, any its second subconstituent is again a non-bipartite antipodal distance-regular graph of diameter 4, which makes the family of $AT4(p, p+2, r)$-graphs a potentially rich source of new examples of non-bipartite antipodal distance-regular graphs of diameter 4.

In this talk, we consider the problem of classification of AT4$(p, p+2, r)$-graphs with arc-transitive automorphism groups. By a Brouwer's result, the unique AT4$(p, p+2, r)$-graph with $p = 2$ is the distance-transitive Soicher graph with intersection array $\{56, 45, 16, 1; 1, 8, 45, 56\}$ (its local graphs are isomorphic to the Gewirtz graph). This graph admits an arc-transitive action of $3_2.U_4(3)$. There are no known examples of AT4$(p, p+2, r)$-graphs with $p > 2$.

An approach to the above stated problem involves a necessity to determine the prime spectrum of the automorphism group of an AT4$(p, p+2, r)$-graph. In recent papers [2] and [3] it was noticed that the prime spectrum the automorphism group of an AT4$(p, p+2, r)$-graph with $p = 5, 7$ depends essentially on the structure of its local graphs. It is known that the local graphs of any AT4$(p, p+2, r)$-graph are strongly regular graphs with parameters $((p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), p-2, p)$. In the talk, we will give a description of the automorphism group of any strongly regular graph with these parameters and find an upper bound for its prime spectrum in case when p is a prime power. On the basis of these results we will find some restrictions for the prime spectrum and the structure of the automorphism of $AT4(p, p+2, r)$-graph with p being a prime power. In particular, we will show the following statements.

Theorem 1. Let Γ be an AT4$(p, p+2, r)$-graph, let $\{a, b\}$ be an edge of Γ and $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Then G_a acts faithfully both on $\Gamma_1(a)$ and on $\Gamma_2(a)$, and if $p > 2$ is a prime power, then $\pi(G_{a,b}) \subseteq \{2, 3, ..., p\}$.

Corollary. Suppose that Γ is an AT4$(p, p+2, r)$-graph, where $2 < p$ is a prime power, $a \in \Gamma$ and the group $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ acts transitively on arcs of Γ. Then

$$\pi((p+2)(p^2+4p+2)(p+1)(p+4)) \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, ..., p+2\} \cup \pi((p^2+4p+2)(p+4)).$$

If, moreover, the numbers $p+2$ and p^2+4p+2 are prime, then the group G_a is almost simple.

Theorem 2. AT4$(p, p+2, r)$-graphs with $p \in \{11, 17, 27\}$ are not arc-transitive.

References. [1] A. Jurišić, J. H. Koolen, P. Terwilliger, Tight Distance-Regular Graphs, J. Algebr. Comb., 12 (2000), 163–197. [2] L. Yu. Tsiovkina, On the automorphism group of an antipodal tight graph of diameter 4 with parameters $(5, 7, r)$, Math Notes, 105 (2019), 104–114. [3] L. Yu. Tsiovkina. On automorphism groups of $AT4(7, 9, r)$-graphs and their local subgraphs, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 24 (2018), 263–271.

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS

e-mail: tsiovkina@imm.uran.ru

K. M. Tulenbayev (Almaty, RK)

Algebraic geometry over Bicommutative algebras

Author construct Zarisky topology over prime ideals for Free Bicommutative algebras. Algebraic geometry over free metabelian Lie algebras was created in [2].

Let $A = (A, \circ)$ be an algebra over field with characteristic $p \geq 0$ and $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, is product. An algebra $(A, \circ)$ is called *Bicommutative*, if

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b (RCom)$$

$$a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)(LCom)$$

for any $a, b, c \in A$.

A^2 is associative and commutative [3].
Definition. An ideal I is called prime iff $I \cap A^2$ is prime.

The description of basis of Bicommutative algebras in terms of Young diagrams of special type, which we call hooks, was given in [4] .

Also we use another representation of hook as a pair (X,Y). Let us introduce order on bicommutative monomials. Degree of (X,Y) is equal to sum of degree X and degree Y. We say that $Z = (X, Y) < Z_1 = (X_1, Y_1)$ if $degZ < degZ_1$. When $degZ = degZ_1$ at first we will compare X and X_1 as monomials in associative and commutative algebra. If $X = X_1$ then we will compare Y and Y_1 as monomials in associative and commutative algebra with deg-lex order.
Let $A = C < x_1, \ldots, x_n >$ be free Bicommutative algebra on n variables. Then A is a Noetherian algebra.
The Noetherianity of bicommutative algebras over an arbitrary field of any characteristic was given in [5].
Realization of Buchberger algorithm for Bicommutative algebras needs new definition of S-polynomials.
Another representation is as pair $(x_1^{\alpha_1} \star x_2^{\alpha_2} \star \ldots \star x_n^{\alpha_n}; x_1^{\beta_1} \star x_2^{\beta_2} \star \ldots \star x_n^{\beta_n})$. Let I to be an ideal of A. Firstly, consider case of homogeneous ideal I and monomial $Z \in I$ and Z=(X,Y), where $X = (x_1^{\alpha_1} \star x_2^{\alpha_2} \star \ldots \star x_n^{\alpha_n}$ and $Y = x_1^{\beta_1} \star x_2^{\beta_2} \star \ldots \star x_n^{\beta_n})$ Suppose we have $Z_1 = (X_1, Y_1)$ and $Z_2 = (X_2, Y_2)$ then $Z_1 \circ Z_2 = (X_1 \cdot X_2, Y_1 \cdot Y_2)$ where $\cdot$ is usual multiplication in polynomial ring. (X,Y) is not Cartesian product and but is useful notation for base elements of linear vector space. Also we must add unit element 1 as element with $\alpha_i = 0$ and $\beta_i = 0$.

The realization of Burberger algorithm is organized as follows. We consider an ideal K of polynomial ring on n variables, generated by elements X from base elements (X,Y) from bicommutative ideal I. So K by is finitely generated by elements f_i, where $i = 1, \cdots, k$. Next we take vector subspace of bicommutative ideal I $V(f_i) = Lin < (f_i, Y) >$. Ideal of polynomial ring on n variables M_i, generated by such Y, is finitely generated by $g_{s(j)}$. We consider an ideal L of polynomial ring on n variables, generated by elements Y from base elements (X,Y) from bicommutative ideal I. So L is finitely generated by elements h_p, where $p = 1, \cdots, l$. Next we take vector subspace of bicommutative ideal I $V(h_p) = Lin < (X, h_p) >$ Ideal of polynomial ring on n variables N_p, generated by such X, is finitely generated by $r_{l(p)}$. We introduce the order on bicommutative base elements. We take elements (u, v) from the ideal I such that (u, v)<$(f_i, g_{s(j)})$ or (u, v)<$(r_{l(p)}, h_p)$ The number of such elements is finite. Then I is generated by $(f_i, g_{s(j)})$ and $(r_{l(p)}, h_p)$ and (u, v) as an ideal.

The work is supported by the grant AP05133271 of SC of the MES of RK.

References. [1] L. A. Bokut', P. S. Kolesnikov, Grobner-Shirshov bases: from incipiency to nowadays Problems in the theory of representations of algebras and groups. Part 7, Zap.Nauchn.Sem. POMI, 272, POMI, St. Petersburg, 2000,26-67. [2] E. Yu. Daniyarova, I. V. Kazatchkov, V. N. Remeslennikov.Algebraic geometry over free metabelian Lie algebras. I.U-algebras and universal classes. Journal of mathematical sciences, June 2006, Volume 135, Issue 5, p 3292-3310. [3] A. S. Dzhumadil'daev, K. M. Tulenbaev,Bi-commutative algebras Uspechi Math. Nauk.,2003, No.6, 149-150=engl.transl. Russian Math. Surv., 1196-1197. [4] A. S. Dzhumadil'daev, N. A. Ismailov, K. M. Tulenbaev. Free Bicommutative algebras Serdica Mathematical Journal., 2011, V.37,No.1, P.25-44. [5] V. Drensky, B. Zhakhayev. Noetherianity and Specht problem for varieties of bicommutative algebras. arXiv:1706.02529. [6] A. S. Dzhumadil'daev, K. M. Tulenbayev. Realization of Buchberger algorithm for bicommutative and Novikov algebras. Collection of abstracts. International conference Malt'sev Meetings(2018), 169–170.

Suleyman Demirel University

e-mail: tulen75@hotmail.com

A. V. Vasil'ev (Novosibirsk)

The 2-closure of a permutation group, the Weisfeiler-Leman closure of a color graph and an isomorphism problem

In 1968, B. Weisfeiler and A. Leman establish a rather simple procedure (called now the Weisfeiler–Leman algorithm) which given a graph constructs a matrix algebra with two multiplications that keeps all the information on the automorphism group of the graph [1]. This algebra has a uniquely determined linear basis consisting of $\{0, 1\}$-matrices and the binary relations underlying these matrices form a combinatorial object now known as a *coherent configuration*. The use of the Weisfeiler–Leman algorithm for graph isomorphism testing was one of the reasons that forced researchers to study the theory of coherent configurations. An outstanding example of the coherent configuration approach to the Graph Isomorphism Problem is a recent breakthrough result by L. Babai [2] giving a quasipolynomial algorithm testing isomorphism of arbitrary graphs.

The term 'coherent configuration' itself first appeared in D. Higman's article [3]. Following ideas of I. Schur and H. Wielandt, he used it as a tool to study permutation groups via analyzing invariant binary relations. In fact, there is a natural Galois correspondence between subgroups of symmetric group on a set Ω and coherent configurations defined on Ω (see, e.g., [4]). The closed objects with respect to that correspondence are 2-*closed* permutation groups and *schurian* coherent configurations. In our talk, we will discuss these notions from various points of view: algebraic, combinatorial, algorithmic. We will also address the question how one can effectively solve the following problems.

2-Closure Problem. Given a finite permutation group, find its 2-closure.

Isomorphism Problem for Schurian Coherent Configurations. Given two finite schurian coherent configurations, find the set of isomorphisms between them.

References. [1] B. Weisfeiler, A. Leman. Reduction of a graph to a canonical form and an algebra which appears in the process. NTI, Ser. 2 (1968), no. 9, 12–16 (Russian). [2] L. Babai. Groups, Graphs, Algorithms: The Graph Isomorphism Problem. Proc. ICM 2018, Rio de Janeiro, Vol. 3, 3303–3320. [3] D. G. Higman. Coherent configurations. I, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 44 (1971), 1–25. [4] G. Chen and I. Ponomarenko. Coherent Configurations, Electronical Lecture Notes, 2019 (http://www.pdmi.ras.ru/∼inp/ccNOTES.pdf).

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University
e-mail: vasand@math.nsc.ru

M. Vuković (Sarajevo, BA)

About paragraded rings and their radicals

Abstract radical theory begins with rings. In the theory of rings many structure result were obtained with the use of radicals. In generalizing the classical notion of the radical in a ring, different kinds of radicals have been defined by many authors, including Azumaya, Baer, Brown-McCoy, Jacobson, Koethe, Kurosh, Levitzki, and McCoy, Kostrikin.

In this talk we present some results from the radical theory of paragraded rings, structures introduced by Krasner and myself [M. Krasner, M. Vuković, Queen's Papers, Ontario, 1987] (see also [M. Vuković, Institut Fourier, Grenoble, 2001]).

It is well known that the ADS (Anderson-Divinski-Suliński) - Theorem overcomes the problem of the relation "being an ideal"not being transitive for associative rings. We prove a version of the ADS-Theorem for associative paragraded rings, that is, we prove that for any paragraded radical α (in the sense of Kurosh - Amitsur) and any associative paragraded ring R, if I is a homogeneous ideal of R, then $\alpha(I)$ is a homogeneous ideal of R.

We also examine properties of some concrete radicals, the Baer and the Jacobson radical of a paragraded ring and their paragraded versions. In particular, we prove that the paragraded Baer radical of a paragraded ring coincides with the largest homogeneous ideal which is contained in the classical Baer radical of a paragraded ring.

Similar results are obtained for the Jacobson radical but, following Halberstadt's results on graded rings, we also establish a relation between the paragraded Jacobson radical and the Jacobson radical of a ring which corresponds to an idempotent, under assumptions that the underlying paragraded ring is regular and that each element of its paragrading set is either idempotent or nilpotent of degree two with respect to minimal multiplication.

We also study special paragraded radicals of paragraded rings. It is known that any special radical of a ring can be defined by means of same class of modules over that ring [V.A. Andrunakievich, Y. A. Ryabuhin, Moscow, 1979]. Besides tt is proved that the largest special class of paragraded rings coincides with the class of allparagraded rings.

The aime if my talk is to show that all special paragraded radicals of paragraded rings can be described by an appropriate class of their paragraded modules. This is already done for graded rings [I.N. Balaba, Buletinul Academie de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica, 2004].

We define the general class of a paragragraded radical of a paragraded ring as the intersection of annihilatrs of paragraded modules over that ring which belong to the general class

Key words and phrases: paragraded ring, radical and paragraded radical, Bear radical, Jacobson radical.
2010 *Mathematics Subject Classification:* 16W50, 16N20, 16N60, 16N80.

References. [1] V. A. Andrunakievich, Y. A. Ryabuhin, Moscow, 1979. [2] I. N. Balaba, Buletinul Academie de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica, 2004. [3] E. Halberstadt, Théorie artinienne homogène des anneaux gradués a grades non commutatifs réguliers, PhD Thesis, University Piere and Marie Curie, Paris, 1971. [4] E. Ilić-Georgijević, M. Vuković, The Wedderburn-Artin Theorem for paragraded rings, Fundam. Prikl. Mat., 19 (6) (2014), 125-139 (Journal of Math. Sci., New York, 221, No. 3 (2017), 391-400). [5] M. Krasner, M. Vuković, Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules), Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, No. 77, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, 1987. [6] M. Vuković, Graded and paragraded structures, Preprint Joseph Fourier, 2001. [7] M. Vuković, E. Ilić-Georgijević, Paragraded rings and their ideals, Fundam. Prikl. Mat., 17 (4) 2012), 83 - 93, J. Math. Sci., New York 191, No. 5 (2013), 654-660

Academy of Sciences and Arts of Bosnia and Herzegovina
Sarajevo, BA
e-mail: mvukovic@anubih.ba

V. I. Yanchevskii (Minsk)

Graded algebras and anisotropic algebraic groups of classical types

Let k be a field and G be a k-defined k-simple algebraic group of a classical type (except $^3D_4$ and $^6D_4$). Then its group G_k of k-rational points is either a special linear group, or one of unitary groups (including orthogonal and symplectic groups). Classical groups are called groups of a noncommutative type if division algebras used for their definition are noncommutative. We shall consider simply connected groups of such type and the series A_n. The Kneser-Tits conjecture on the structure of k-isotropic groups is well known. It was proved in many cases for special fields k, but for anisotropic groups it is false as it was shown by V.P. Platonov [1]. So the necessity to study the so called reduced Whitehead groups has appeared. Now many results on computing such groups are available in the case of inner forms of groups of the series A_n (see, e.g., [2–10]). But the anisotropic case still remains almost unapproachable (for the first steps see [11–12,14]). The aim of the talk is to present a scheme of computing such groups associated with so called graded division algebras with unitary involutions. Observe that in the case of inner forms of groups of the series A_n associated with such algebras results on these groups were obtained in [9-10,13].

There will be three parts in the talk. The first one will be devoted to describing an important class of so called cyclic unitary involutions (the existence, the cloning, etc.). The second part will contain the scheme mentioned above. The final part will be devoted to an analysis of some important examples for special fields and algebras.

This research has been partially supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, Project F17MC-021.

References. [1] V. P. Platonov. On the Tannaka-Artin problem (in Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 221:5 (1975), 1038–1041. [2] V. P. Platonov. The Tannaka-Artin problem and reduced K-theory (in Russian). Izv. AN SSSR. Ser. matem., 40:2 (1976), 227–261; Math. USSR-Izv., 10:2 (1976), 211–243. [3] P. Draxl. SK_1 von Algebren *ü*ber vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen. J. reine angew. Math., 293/294 (1977), 116–142. [4] U. L. Ershov. Henselian valuations of division rings and the group SK_1. Matem. sb., 117(159):1 (1982), 60–68; Math. USSR-Sb., 45:1 (1983), 63–71. [5] V. I. Yanchevskii. Reduced unitary K-theory and division rings over discretely valued Henselian fields (in Russian). Izv. AN SSSR. Ser. matem., 42:4 (1978), 879–918; Math. USSR-Izv., 13:1 (1979), 175–213. [6] A. A. Suslin. SK_1 of division algebras and Galois cohomology revisited. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 219, Amer. Math. Soc., Providence, RI. (2006). [7] A. S. Merkurjev. Generic element in SK_1 for simple algebras. K-Theory, 7 (1993), 1–3. [8] R. Hazrat, A. R. Wadsworth, SK_1 of graded division algebras. Israel J. Math. 183 (2011) 117–163. [9] R. Hazrat, A. R. Wadsworth. Unitary SK_1 of graded and valued division algebras. Proc. London Math. Soc. 103:3 (2011), 508–534. [10] A. R. Wadsworth, V. I. Yanchevskii. Unitary SK_1 for a graded division ring and its quotient division ring. Journal of Algebra. 352 (2012), 62–78. [11] B. A. Sethuraman, B. Sury. On the special unitary group of a division algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2005), 351–354. [12] B. Sury. On $SU(1,D)/[U(1,D),U(1,D)]$ for a quaternion division algebra D, Archiv der Mathematik, 90 (2008), 493–500. [13] A. R. Wadsworth, Unitary SK_1 of semiramified graded and valued division algebras, Manuscripta Math., 139 (2012), 343–389. [14] V. I. Yanchevskii. Reduced Whitehead groups and the conjugacy problem for special unitary groups of anisotropic Hermitian forms. Zap. nauchn. sem. POMI, 400 (2012), 222–245; J. Math. Sci. (N. Y.), 192:2 (2013), 250–262.

Institute of Mathematics,
National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: yanch@im.bas-net.by

Index