

ЛОМОНОСОВ. КОСМОНАВТИКА

февраль 2018

7-9 класс

Вариант 2

1. На планете Бинара принята двоичная система счисления (каждое число записывается последовательностью нулей и единиц; последовательность $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, где каждая из цифр a_k – это 0 или 1, переводится в десятичную систему по правилу: $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_n \cdot 2^n$, например, число 1011100 в двоичной системе равняется

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = 4 + 8 + 16 + 64 = 92$$

в десятичной системе счисления). Малышка Би учится в первом классе и еще не очень хорошо умеет считать. Учитель задал ей вычислить: $100110 + 11011 = ?$ Помогите Би, запишите правильный ответ в двоичной и десятичной системах счисления.

Ответ: 1000001 в двоичной и 65 в десятичной системе.

2. Сферический астероид имеет среднюю плотность $5,5 \text{ г/см}^3$ и радиус $R = 0,6$ километров. С какой минимальной скоростью V нужно подпрыгнуть космонавту, находящемуся на поверхности астероида, чтобы навсегда покинуть его и улететь в космос? Значение скорости укажите в метрах в секунду, ответ округлите до одного знака после запятой. Значение гравитационной постоянной примите равным $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$; значение постоянной $\pi = 3,14$.

Ответ: $V = 11\,200 (R/6371)$ м/с.

Решение: Очевидно, подпрыгнуть нужно со второй космической скоростью, равной $(2GM/R)^{1/2}$. Учитывая, что плотность астероида равна плотности Земли, можно использовать значение второй космической скорости для Земли, чтобы облегчить вычисления: $11,2 \text{ км/с} (M_A/M_Z)^{1/2} (R_Z/R_A)^{1/2}$. Учитывая, что $M \sim R^3$, получим $11,2 \text{ км/с} (R_A/R_Z)^{3/2} (R_Z/R_A)^{1/2} = 11,2 \text{ км/с} (R_A/R_Z)$. Радиус Земли $R_Z = 6371 \text{ км}$.

3. К концу длинного путешествия бортовой вычислитель на корабле Ийона Тихого стал разговаривать сам с собой. Одна из тем для обсуждения - натуральные числа. Взяв вначале для рассмотрения число 2, вычислитель размышлял над такой последовательностью:

2

12

1112

3112

132112

...

а) Напишите восьмой член последовательности.

Ответ: 13211321322112

Решение: Каждый следующий член последовательности – результат прочтения слева направо цифр предыдущего члена. Например, второй член появляется в результате прочтения первой строки: «одна двойка», третий: «одна единица одна двойка» и т.д.

б) Может ли какая-либо строка иметь вид “222”? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет

Решение: Вторая строка уже содержит единицу, следовательно, любая следующая строка содержит единицу.

в) Напишите алгоритм вычисления n -го члена последовательности на одном из Ваших любимых языков программирования (опечатки не караются!) или на естественном языке.

4. Металлический шарик, нагретый до температуры $t = 70^\circ\text{C}$, положили в стакан с водой, имеющей температуру $t_0 = 20^\circ\text{C}$. После достижения теплового равновесия температура воды в стакане стала равной $t_1 = 30^\circ\text{C}$. Затем шарик переложили в другой стакан с таким же количеством воды, имеющей температуру t_0 . Какая температура t_2 установится в этом стакане? Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до одного знака после запятой.

Решение. Пусть $C_{\text{ш}}$ – теплоемкость шарика, а $C_{\text{в}}$ – теплоемкость стакана с водой. Уравнения теплового баланса имеют вид:

$$C_{\text{ш}}(t - t_1) = C_{\text{в}}(t_1 - t_0) \quad (\text{когда шарик положили в первый стакан}),$$

$$C_{\text{ш}}(t_1 - t_2) = C_{\text{в}}(t_2 - t_0) \quad (\text{когда шарик переложили во второй стакан}).$$

Из этих выражений следует равенство: $\frac{t - t_1}{t_1 - t_2} = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$. Выражая из него t_2 , находим, что

$$t_2 = \frac{t_1^2 + (t - 2t_1)t_0}{t - t_0}.$$

Ответ: $t_2 = \frac{t_1^2 + (t - 2t_1)t_0}{t - t_0}$

5. Пусть x и y – натуральные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

а) y делится на $x + 1$;

б) $y = 2x + 8$;

в) $x + y$ делится на 3;

г) $7x + y + 6$ – простое число –

три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары (x, y) таких чисел.

Ответ: (1,10) и (5,18).

Решение: Так как $7x + y + 6 = (x + y) + 6(x + 1)$, то при выполнении в), выражение $7x + y + 6$ делится на три и больше 6, т.е. не простое число. Таким образом, возможны два случая – выполнено а), б) и в) или а), б) и г). Если выполнено б), то $x + y = 3x + 8$ – не делится на три, значит первый случай невозможен. Во втором случае $y = k(x + 1) = 2x + 8$, где k целое. Отсюда $x = \frac{8-k}{k-2}$ – натуральное число, т.е. $3 \leq k \leq 7$. Перебирая варианты, получаем ответ.

6. Космонавты, находящиеся на борту международной космической станции (МКС), проводят открытый урок по физике для учащихся седьмых – девярых классов. Предложите эксперимент, который они бы могли продемонстрировать. Опишите (в свободной форме, в

объеме 1-2 страницы) сам эксперимент, его физическую подоплеку, укажите, почему его интересно провести именно на борту МКС (ссылки на соответствующие законы физики приветствуются).

Критерии.

Задачи 3.б) и 3.в) оценивались вместе, задача 3.а) независимо.

За каждую из задач 1)-5) выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-” – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.

Оценка за задачу 6) складывалась из оценок: эксперимент может быть проведен: да/нет=1/0, учтена специфика МКС: да/нет=1/0, есть физическое обоснование да/не полное/нет=2/1/0, эксперимент полностью описан в работе: да/нет=1/0. Полученная сумма учитывалась по правилу 5=“+”, 4 и 3=“+/-”, 2 и 1=“-/+”.

Критерии общей оценки:

есть 6 плюсов=100;

ровно 5 плюсов и не менее одного плюс/минус=95;

ровно 5 плюсов, нет плюс/минус=90;

ровно 4 плюса и хотя бы один плюс/минус=85;

ровно 4 плюса, нет плюс/минус=80;

ровно 3 плюса и не менее 3 плюс/минус=75;

ровно 3 плюса и ровно 2 плюс/минус=70;

ровно 3 плюса и ровно один плюс/минус=65;

ровно 3 плюса, нет плюс/минус=60;

ровно 2 плюса и не менее 4 плюс/минус=55;

ровно 2 плюса и ровно 3 плюс/минус=50;

ровно 2 плюса и ровно 2 плюс/минус=45;

ровно 2 плюса и ровно один плюс/минус=40;

ровно 2 плюса, нет плюс/минус=35;

ровно 1 плюс=30;

нет плюсов, но есть плюс/минус=20;

нет плюс/минус=0.

Вариант 2

1. Во время своего очередного путешествия Ийон Тихий стартовал с Земли и, двигаясь с постоянной скоростью, прибыл на планету Панту в полдень 1 апреля. В пути он подсчитал, что если бы его скорость была на 20% больше, он прилетел бы ровно на 4 дня раньше. Какого числа Ийон Тихий покинул Землю?

Ответ: 8 марта.

Решение: Пусть v_1 - скорость Ийона. Если $v_2 = v_1 + 20\%v_1 = 1,2v_1$, то $t_2 = t_1 : 1,2 = \frac{5}{6}t_1$. Тогда $t_1 - t_2 = \frac{1}{6}t_1 = 4$, а значит Ийон был в пути 24 дня.

2. Планета двигалась по круговой орбите радиуса $R = 26$ астрономических единиц, но внезапно остановилась и начала падать на Солнце. Через какое время t (суток) она достигнет поверхности Солнца? (Считайте, что R много больше радиуса Солнца.)

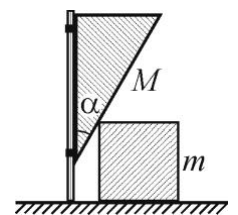
Ответ: $t = 64,6 R^{3/2}$.

Решение: Падение по радиусу к Солнцу с расстояния R можно представить как движение по предельно сжатому эллипсу с большой полуосью $a = R/2$. Время падения t равно половине орбитального периода P на этой орбите. Значение P легко определяется из 3-го закона Кеплера путем сравнения с движением Земли: $(P / 1 \text{ год})^2 = (a / 1 \text{ а. е.})^3$. Отсюда $t = P/2 = 0,5 \text{ года } (R / 2 \text{ а. е.})^{3/2} = 0,177 \text{ года } (R / 1 \text{ а. е.})^{3/2} = 64,6 \text{ суток } (R / 1 \text{ а. е.})^{3/2}$

3. Вес выводимого на орбиту спутника не превышает 1 тонны. Одна ракета-носитель может вывести на орбиту не более 4 тонн полезной нагрузки.
- 3.1. Докажите, что группировку спутников общей массой 36 тонн можно вывести на орбиту не более чем за 11 пусков.
- 3.2. Напишите алгоритм, распределяющий спутники по запускам в условиях этой задачи, на вашем любимом языке программирования или на естественном языке (опечатки не караются!).

Решение: Ракету нагружаем до тех пор, пока масса груза не превысит 4т. После этого снимаем один спутник и откладываем его в сторону. За восемь стартов мы отложим в сторону не более 8 спутников, а на складе останется менее 4т. груза, который запустим на девятый старт. За десятый и одиннадцатый старт запустим оставшиеся 8 спутников.

4. Клин массой $M = 1$ кг с углом $\alpha = 30^\circ$ при вершине может двигаться поступательно по вертикальным направляющим. Боковой стороной он касается кубика массой $m = 0,9$ кг, лежащего на горизонтальной поверхности стола. Найдите ускорение a , с которым будет двигаться клин, если его отпустить. Трением между всеми поверхностями можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ округлите до одного знака после запятой.



$$a = \frac{Mg}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Ответ:

Решение: Модули и направления сил, действующих на клин и кубик, изображены на рисунке, где приняты следующие обозначения: Mg и mg – модули сил тяжести, N и N' – модули сил взаимодействия клина и кубика, N_1 – модуль силы реакции стола, R – модуль силы реакции вертикальных направляющих. Силы \vec{N} и \vec{N}' направлены перпендикулярно поверхности клина, так как трением можно пренебречь. По третьему закону Ньютона $N' = N$. Обозначив через a и a_1 ускорения клина и кубика, запишем уравнения движения этих тел: $Ma = Mg - N \sin \alpha$, $ma_1 = N \cos \alpha$. Перемещения кубика и клина за любой промежуток времени связаны соотношением $x = y \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда следует, что $a_1 = a \operatorname{tg} \alpha$. Исключая из уравнений движения N и используя соотношение между величинами ускорений клина и

кубика, получаем, что

$$a = \frac{Mg}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

5. Бортовой компьютер вышел из строя и вместо любого числа выводит на экран только его последнюю цифру. Компьютеру была дана задача: вычислить $22^{88} + 88^{22}$. Какую цифру он выведет на экран?

Ответ: 0.

Решение: Так как $22^n = (20 + 2)^n = 10p + 2^n$, то последняя цифра числа 22^n равна последней цифре числа 2^n . Для $n = 1$ она равна 2, для $n = 2$ она равна 4, $n = 3$ она равна 8, $n = 4$ она равна 6, $n = 5$ она равна 2. Далее цифры повторяются по циклу, т.е. для $n = 88$ последняя цифра равна 6. Аналогично, последняя цифра числа 88^n совпадает с последней цифрой числа 8^n . Для $n = 1$ она равна 8, для $n = 2$ она равна 4, $n = 3$ она равна 2, $n = 4$ она равна 6, $n = 5$ она равна 8, далее вновь повторяется по циклу, так что последняя цифра числа 8^{22} равна 4.

6. Космонавты, находящиеся на борту международной космической станции (МКС), проводят открытый урок по физике для учащихся седьмых – одиннадцатых классов. Предложите эксперимент, который они бы могли продемонстрировать. Опишите (в свободной форме, в объеме двух – трех страниц) сам эксперимент, его физическую подоплеку, укажите, почему его интересно провести именно на борту МКС (ссылки на соответствующие законы физики приветствуются).

Критерии.

Задачи 3.1 и 3.2 оценивались независимо.

За каждую из задач 1)-5) выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-” – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.

Оценка за задачу 6) складывалась из оценок: эксперимент может быть проведен: да/нет=1/0, учтена специфика МКС: да/нет=1/0, есть физическое обоснование да/не полное/нет=2/1/0,

эксперимент полностью описан в работе: да/нет=1/0. Полученная сумма учитывалась по правилу 5="+", 4 и 3="+/-", 2 и 1="-/+".

Критерии общей оценки:

- есть 6 плюсов=100;
- ровно 5 плюсов и не менее одного плюс/минус=95;
- ровно 5 плюсов, нет плюс/минус=90;
- ровно 4 плюса и хотя бы один плюс/минус=85;
- ровно 4 плюса, нет плюс/минус=80;
- ровно 3 плюса и не менее 3 плюс/минус=75;
- ровно 3 плюса и ровно 2 плюс/минус=70;
- ровно 3 плюса и ровно один плюс/минус=65;
- ровно 3 плюса, нет плюс/минус=60;
- ровно 2 плюса и не менее 4 плюс/минус=55;
- ровно 2 плюса и ровно 3 плюс/минус=50;
- ровно 2 плюса и ровно 2 плюс/минус=45;
- ровно 2 плюса и ровно один плюс/минус=40;
- ровно 2 плюса, нет плюс/минус=35;
- ровно 1 плюс=30;
- нет плюсов, но есть плюс/минус=20;
- нет плюс/минус=0.