МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

МЕЖДУНАРОДНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша

Тезисы докладов

Москва 2018

УДК 512.5, 512.6, 512.7
М18

Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. Тезисы докладов.
М.: Издательство МГУ, 2018 г. — 286 стр.

Тезисы докладов, представленных на международную алгебраическую конференцию, посвящённую 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша.

Издание поддержано грантом РФФИ № 18-01-20016

Содержание

Александр Геннадиевич Курош
(19 января 1908 г. – 18 мая 1971 г.)

А. Г. Курош родился в пос. Ярцево Смоленской губ. (ныне — город в Смоленской обл.) в семье служащего - конторщика Ярцевской хлопчато-бумажной фабрики Г. Д. Куроша. Мать Анастасия Леонтьевна была школьным работником. В семье была младшая сестра Вера. В 1916 г., в возрасте 8 лет А. Г. Курош поступает сразу в третий класс школы. С 1920 г. после смерти отца А. Г. Курош совмещает учебу в школе с работой, сначала помощником чертежника, позже помощником счетовода.

В возрасте 15 лет после окончания школы А. Г. Курош был направлен по специальной путевке в Москву для поступления в текстильный институт. Он блестяще сдает вступительные экзамены, однако его не зачисляют в связи с малым возрастом. Вернувшись в Ярцево он учится на Ярцевских вечерних профессионально-технических курсах, совмещая учебу с работой. После окончания курсов в 1924, по рекомендации Ярцевского отдела народного образования, поступает на физико-техническое отделение педагогического факультета организованного в 1918 г. Смоленского университета. В 1926 г. в этом университете читал лекции по теории множеств, теории функций и по топологии П. С. Александров. Незадолго до этого, произошла встреча П. С. Александрова с выдающимся алгебраистом Эмми Нётер, которая увлекла его идеями теоретико-множественной алгебры. Павел Сергеевич заразил молодого Куроша этой увлеченностью. Встреча с П.С.Александровым определила дальнейший жизненный путь А. Г. Куроша.

После окончания в 1928 г. педагогического факультета физико-технического отделения Смоленского университета был направлен в Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, где позднее в 1935 г. создал и возглавил кафедру алгебры. Одновременно поступил в аспирантуру к профессору П. С. Александрову. Осенью 1929 г. П. С. Александров добивается направления А. Г. Куроша в аспирантуру при НИИ математики и механики МГУ. Этот институт был создан и возглавлялся О. Ю. Шмидтом. Одновременно О. Ю. Шмидт организовал в 1929 г. кафедру высшей алгебры и научно-исследовательский семинар кафедры, по сей день играющий важную роль в формировании советской и российский школы общей алгебры.

В 1930 г. А. Г. Курош начал преподавать в должности ассистента, с 1932 г. в должности доцента на кафедре высшей алгебры физикомеханического факультета МГУ. После реорганизации в 1933 г. — на механико-математическом факультете МГУ. Этой работе он посвятил всю свою жизнь. В 1936 г. защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук; с 1937 г. — профессор; с 1949 по 1971 гг. — заведующий кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета МГУ.

Кроме МГУ А. Г. Курош преподавал в Индустриально-педагогическом и Московском энергетическом институтах, заведовал кафедрой алгебры в Саратовском университете, кафедрой математики в Гомельском педагогическом институте, являлся старшим научным сотрудником МИАН, работал в математическом институте АН УССР, заведовал математической редакцией издательства ИЛ.

Начало работы А. Г. Куроша в МГУ в 1930 г. пришлось на сложное время, когда в очередной раз совершалась ломка системы образования, а потом от нее отказывались. На А. Г. Куроша было возложено чтения курса алгебры у математиков и у механиков. Здесь проявился его замечательный талант лектора, умеющего заражать слушателей предметом, четкостью изложения, продуманностью последовательности изложения материала, заботой о слушателях.

Материалы лекций изложены в учебнике А.Г.Куроша «Курс высшей алгебры». Этот учебник неоднократно переиздавался и был отмечен Государственной премией.

А. Г. Курош уделял постоянное внимание совершенствованию преподавания на механико-математическом факультете МГУ. В начале шестидесятых годов двадцатого века он был одним из инициаторов включения в учебный план нового курса – «Линейная алгебра и геометрия».

Первая научная работа А. Г. Куроша содержала решение поставленной П. С. Александровым топологической задачи о перенесении понятия проекционного спектра на случай бикомпактных топологических пространств. Полученная А. Г. Курошем теорема и разработанные для ее доказательства вспомогательные методы прочно вошли в общую топологию.

Основные научные интересы А. Г. Куроша были связаны с теорией групп. Решающую роль в этом сыграло посещение алгебраического семинара, организованного О. Ю. Шмидтом в 1929 г. В 1934 г. А. Г. Курош опубликовал теорему о подгруппах свободного произведения абстрактных групп, получившую название теоремы Куроша. Она нашла применение в алгебре и геометрии, неоднократно передоказывалась, в том числе и топологическими методами.

А. Г. Куроша отличала широта алгебраических интересов. Помимо теории бесконечных групп он живо интересовался проблемами бернсайдовского типа для линейных алгебр. Поставленная им проблема, получившая название проблемы Куроша, во многом определила развитие теории многообразий линейных алгебр. Эта проблема была впоследствии элегантно решена Е. С. Голодом. А. Г. Курошу принадлежат принципиальный результат в теории решеток (структур) — теорема Куроша–Оре. Кроме того, им получены важные результаты в теории абелевых групп, по свободным разложениям в неассоциативных алгебрах, по общей теории радикала в кольцах, по теории категорий. В последние годы жизни А. Г. Курош обращал внимание на развитие алгебраических объектов, лежащих между такими классическими, как группы, кольца, поля и общими универсальными алгебрами. В выделенной промежуточной области находятся группоиды, квазигруппы, полукольца, почти-кольца и др. Этим вопросам был посвящен последний прочитанный А. Г. Курошем спецкурс по общей алгебре. В связи с болезнью этот спецкурс дочитал В. А. Артамонов. Материалы этих лекций вошли в книгу «Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года)», М., Изд-во Московского университета, 1970.

А. Г. Курош является автором популярных учебников и монографий таких, как «Курс высшей алгебры», «Теория групп», «Лекции по общей алгебре». Он вёл большую научно-организационную работу, являясь главным редактором первого тома биографически-библиографического двухтомного справочника «Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957», вице-президентом Московского математического общества (1956—1962), одним из инициаторов создания реферативного журнала по математике и проведении Всесоюзных алгебраических коллоквиумов.

В течение многих лет А. Г. Курош читал обязательные курсы лекций по алгебре на механико-математическом факультете МГУ, руководил спецсеминарами, в том числе семинаром по алгебре. Более 50 учеников А. Г. Куроша стали кандидатами наук, более 10 — докторами наук. Будучи сам человеком увлеченным теоретико-множественной алгеброй, Александр Геннадиевич, блестящий педагог, одновременно внимательный и требовательный к своим ученикам, передавал им свою любовь к предмету. Многие из учеников А. Г. Куроша стали впоследствии преподавателями университетов и вузов, создателями своих алгебраических школ в разных городах и республиках Советского Союза.

А. Г. Курош награждён орденами Трудового Красного Знамени, «Знак Почёта». Лауреат Государственной премии СССР, премии имени П. Л. Чебышёва. Почётный член Московского математического общества, Уральского математического общества, почётный доктор Лионского университета, университета г. Брно, автор более 80 научных работ.

Список публикаций А. Г. Куроша

1932 г.

1. Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, Math. Ann. 106, 107–113.

1933 г.

2. Über freie Produkte von Gruppen, Math. Ann. 108, 26–36.

1934 г.

3. Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen, Math. Ann. 109, 647–660.
4. Современные алгебраические воззрения, Фронт науки и техники, № 5–6, 33–38.

1935 г.

5. Durchschnittsdarstellungen mit irreduziblen Komponenten in Ringen und sogenannten Dual-gruppen, Матем. Сборник, 42, 613—616.
6. Eine Verallgemeinerung des Jordan–Holderschen Satzes, Math. Ann. 111 , 13–18.
7. Kombinatoirischer Aufbau der bikompakten topologischen Raume, Comp. Math. 2, 471—476.
8. Свободные произведения с объединенными подгруппами центров, ДАН, 1, 285-286 (совместно с В. А. Калашниковым)

1936 г.

9. Современные алгебраические воззрения. Сборник статей по философии математики. М.: Учпедгиз, 21-29.
10. Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Матем. сборник. 1 (43), 345-350.

1937 г.

11. Primitive torsionsfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Range, Ann. of Math. 38,. 175-203.
12. Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп, УМН. Вып. 3, 5—15.
13. Zum Zerlegungsproblem der Theorie der freien Produkte, Матем. сборник. 2 (44), 995—1001.

1938 г.

14. О некоторых вопросах теории бесконечных групп, Труды семинара по теории групп, М—Л. Гостехиздат, 50—79.

15. Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen, Матем сборник. 3(45), 179—185 (совместно с А. П. Дицманом и А. И. Узковым).

1939 г.

16. К теории частично упорядоченных систем конечных множеств. Матем. Сб. 343-346.

17. Несколько замечаний к теории бесконечных групп. Матем. Сб, 5(47), 347-354.

18. Локально свободные группы, ДАН, 24, 99-101.

1940 г.

19. Локально свободные группы (резюме доклада 14.11.1939 на Всесоюзном совещании по алгебре), Изв. АН, сер. матем. 4, 129.

20. Обзор проблем о бесконечных группах (резюме доклада 15.11.1939 на Всесоюзном совещании по алгебре), Изв. АН, сер. матем. 4, 131.

21. Теорема Жордана-Гельдера в произвольных структура, Сборник памяти акад. Д. А. Граве . М.— Л., ГТТИ, 110—116.

1941 г.

22. Рец. На книгу: Л. А. Окунев, Высшая алгебра, изд. 2-е, Изв. АН, сер. матем., 5 187—188.

23. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах. Изв. АН, сер. матем. 5, 233—240.

1942 г.

24. Direct decompositions of simple rings, Матем. сборник. 11(53), 245—264.

1943 г.

25. Изоморфизмы прямых разложений, Изв. АН, сер. матем. 7, 185—202.

1944 г.

26. Теория групп, М.—Л. Гостехиздат, (переизд. в ГДР , 1953).

1945 г.

27. Композиционные системы в бесконечных группах, Матем. сб. 16(58), 59—72.

28. , Силовские подгруппы нульмерных топологических групп. Изв. АН, сер. матем. 9, 65-78.

1946 г.

29. Изоморфизмы прямых разложений, II, Изв. АН, сер. матем, 10, 47—72.

30. Курс высшей алгебры, М.— Л. Гостехиздат, (изд . 2-е —1950; изд. 3-е — 1952; переводы: на корейский, КНДР, 1951; на китайский, КНР,

1953; на румынский, Румыния, 1955).

1947 г.

31. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебра, Матем. сборник 20(62), 239-262.

32. Разрешимые и нильпотентные группы, УМН 2: 3(19), 18—59 (совместно с С. Н. Черниковым), (перевод на английский, США, 1953).

1948 г.

33. Алгебра II (группы, кольца и структуры), Сборник «Математика в СССР за тридцать лет», М.— Л., Гостехиздат, 106—133.

1950 г.

34. Алгебра, БСЭ: 2-е изд ., 2, 53—62 (совместно с О. Ю. Шмидтом).

1951 г.

35. К теории локально простых и локально центральных алгебра, Укр. Матем. журнал, 3, 205—210.

36. Современное состояние теории колец и алгебра УМН 6:2(42), 3-15.

37. Отто Юльевич Шмидт УМН 6:5(45), 197-199.

38. Алгебраические уравнения произвольных степеней, М.— Л., Гостехиздат, (Популярные лекции по математике)(переводы: на чешский, Чехословакия. 1953; на немецкий, ГДР, 1954, на грузинский, 19578 на болгарскаий, Болгария, 1965).

1952 г.

39. Выступление 12 сентября 1951 г. на Всесоюзном совещании по алгебре и теории чисел, УМН 7:3(49), 161-168.

1953 г.

40. Теория групп, изд. 2-е, переработанное, М., Гостехиздат (переводы: на английский, США 1955-56 (в двух томах), 2-ое изд. 1960; на венгерский, Венгрия, 1955; на румынский, Румыния, 1959; на японский, Япония, 1960-61(в двух томах); на китайский, КНР, 1964 (1 том)).

41. Радикалы колец и алгебр, Матем. Сб. 33(75),13-26.

1955 г.

42. Неассоциативные свободные суммы алгебр, Матем. Сборник, 37(79), 251-264.

43. Курс высшей алгебры, М., Гостехиздат, (изд. 5-е — 1956; перевод на вьетнамский, ДРВ, 1958).

1956 г.

44. Отто Юльевич Шмидт (некролог), УМН : 6(72), 227—233.

1957 г.

45. Научно – исследовательский семинар кафедры алгебры Московского университета, УМН 12: 5(77), 261—269 (совместно с Л. А. Скорняковым).

1958 г.

46. Прямые разложения в алгебраических категориях(резюме доклада 6 февраля 1958 г. на коллоквиуме по общей алгебре), УМН 13: 3(81), 239—240.

1959 г.

47. Курс высшей алгебры, изд. 6-ое, переработанное и дополненное, М. Физматгиз, (изд. 7-е — 1962; изд. 8-е — 1963, допечатка — 1965; изд. 9-е — 1968; изд. 10-е — 1971; переводы: на грузинский— 1961; на японски, Япония,—1962; на армянский — 1965; на венгерский, Венгрия,—1967; на болгарский, Болгария,—1968; на молдавский — 1968; на испанский, изд. «Мир»—1968; на французский, изд. «Мир»—1971).

48. Общая алгебра, Сборрник «Математика в СССР за сорок лет», т. I, М., Физматлит, 151—200 (совместно с В. М. Глушковым.) (перевод на китайский, КНР — 1964).

49. Международный конгресс математиков в Эдинбурге, УМН 14: 1(85), 249—253 (совместно с П. С. Александровым).

50. Алгебра на Эдинбургском конгрессе, УМН14: 2(86), 239—242.

51. Прямые разложения в алгебраических категориях, Труды Моск. матем. о-ва, 8, 391 — 412; 9 (1960), 562 (перевод на английский, США — 1963).

52. Основоположник советской алгебраической школы, Сборник «Отто Юльевич Шмидт. Жизнь и деятельность», М. изд-во АН СССР, 51—63.

53. Анисим Федорович Бермант (некролог), УМН 14: 5(89), 117—121 (совместно с Л. А. Люстерником, А. И. Маркушевичем и Г. Ф. Рыбкиным).

54. Анатолий Иванович Мальцев (к пятидесятилетию со дня рождения), УМН 14: 6(90), 203—211.

1960 г.

55 Свободные суммы мультиоператорных групп, Acta Scient. Math., Szeged 21: 3—4, 187-196.

56. Свободные суммы мультиоператорных групп и алгебр, УМН 15: 3(93), 191—192.

57. Некоторые материалы о влиянии работ советских математиков на развитие математической науки (резюме доклада на заседании Московского математического общества 1 марта 1960 г.), УМН 15:

4(94), 204.
58. Свободные суммы мультиоператорных алгебр, Сиб. матем. ж. 1, 62—70; 638.
59. Основы теории категорий, УМН 15: 6(96), 3—52 (совместно с А. Х. Лившицем и Е. Г. Шульгейфером) (переводы: на румынский, Румыния, 1961; на английский, США, 1962; на немецкий, ГДР, 1963).
1961 г.
60. Радикалы в теории групп, ДАН 141, 789—791. 1962 г.
61. Радикалы в теории групп, Сиб. мат. ж. 3, 912—931; 6 (1965), 715.
62. Les radicaux en theorie des groupes, Semin. Dubreil — Pisot, Paris, 22: 01—07.
63. Groupes avec multi-operateurs, Semin. Dubreil — Pisot, Paris, 23: 01—06.
64. Radicaux en theorie des groups, Bull. Soc. Math. Belgique 14: 3, 307—310.
65. Лекции по общей алгебре, М. Физматгиз (переводы: на английский, США,—1-е изд., 1963; 2-е изд., 1965; на китайский, КНР,—1964; на немецкий, ГДР,—1964; на польский, Польша, —1965; на японский, Япония, в двух томах, 1-й том — 1966, 2-й том — 1970; на французский, Франция,—1967;на чешский, Чехословакия,—1968).
1964 г.
66. Universal algebras, Lectures, Australian Nat. University, Canberra, 1—11.
1965 г.
67. Московское математическое общество за последнюю треть века, (Доклад на юбилейном заседании Общества 20 1964 .), УМН 20: 3(123), 10—18. 1966 г.
68. Работы московских алгебраистов в теории универсальных алгебр, Coll. Math. (Warszawa — Wroclaw) 14, 131—133.
69. Некоторые терминологические вопросы из общей алгебры, «Алгебра и логика. Семинар» 5: 3, 77—81.
70. Накануне. Несколько советов поступающим в вузы, их родителям и экзаменаторам, газета «Известия», № 133 (15221), московский вечерний вып. за7.6.1966, стр. 4.
1967 г.
71. Теория групп , изд. 3-е, дополненное, М., «Наука» (перевод на немецкий, ГДР (1-й т.) — 1970).
72. Развитие общей алгебры в Московском университете за пятьдесят лет, Вестник Моск. ун-та 6, (Математика, Механика), 3—15.
1968 г.

73. Общий обзор развития алгебры в СССР, "История отечественной математики", т. 3. Киев, Наукова думка, 275-285 (совместно с Л. А. Калужниным).
74. Некоторые другие разделы общей алгебры, "История отечественной математики", т. 3. Киев, Наукова думка, 263-269.
75. Петр Григорьевич Конторович (некролог), УМН 23: 4(142), 239-240 (совместно с Б. И. Плоткиным, Н. Ф. Сесекиным, Л. Н. Шевриным).
76. Педфак Смоленского университета в мою студенческую пору, Сб. "Смоленский государственный педагогический институт имени К.Маркса (1918-1968)", Смоленск, 260-263. 1969 г.
77. Мультиоператорные кольца и алгебры, УМН 24:1 (145), 3-15.

1970 г.

78. Памяти молодых советских алгебраистов, погибших на фронтах Великой отечественной войны, УМН 25:3 (153), 252-253.
79. Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года), М., Изд-во Московского университета.

1971 г.

80. Свободные суммы мультиоператорных линейных почти-алгебр, Кишинев, Матем. Исследования, 6:1 (19), 83-87.
81. Свободные разложения в некоторых многообразиях мультиоператорных групп, Изв. высших уч. заведений, Математика, № 3(106), 50-54.

Список учеников А. Г. Куроша

1. Черников Сергей Николаевич.
2. Узков Александр Илларионович.
3. Садовский Леонид Ефимович.
4. Головин Олег Николаевич.
5. Герчиков Альфред Израилевич - погиб на фронте Великой Отечественной войны.
6. Андрунакиевич Владимир Александрович (совм. с О. Ю. Шмидтом).
7. Кишкина Зоя Михайловна (совм. с А. И. Мальцевым).
8. Шимбирева Елена Павловна.
9. Ширшов Анатолий Илларионович (член-корр.АН)
10. Виленкин Наум Яковлевич.
11. Глушков Виктор Михайлович (совм. с С. Н. Черниковым, академик АН СССР).
12. Скорняков Лев Анатольевич.
13. Граев Марк Иосифович.

14. Соркин Юрий Исаакович.
15. Стеллецкий Игорь Владимирович.
16. Мишина Анна Петровна.
17. Копейкина–Головина Лидия Ивановна.
18. Завало Сергей Трофимович.
19. Белоусов Валентин Данилович.
20. Курочкин Владимир Михайлович.
21. Зайцева Милица Георгиевна.
22. Шульгейфер Ефим Григорьевич.
23. Лившиц Абрам Хаймович.
24. Кемхадзе Шота Степанович.
25. Хион Як Викторович.
26. Лишак Мариам Григорьевна.
27. Дидидзе Циала Евгеньевна.
28. Махарадзе Лия Михайловна.
29. Кикодзе Эрг Багратович.
30. Щукин Красарм Константинович.
31. Оганесян Вруир Аршакович.
32. Сулиньский Адам (Польша).
33. Лю Шао Сюэ (Китай).
34. Баранович Татьяна Максимилиановна.
35. Бурмистрович Илья Евсеевич.
36. Хузурбазар Морешвар Шанкар (Индия).
37. Бовди Бела (СССР- Венгрия).
38. Чан Ван Хао (Вьетнам).
39. Чакань Бела (Венгрия).
40. Ребане Юрий Карлович.
41. Микаелян Гамлет Суренович.
42. Искандер Авад Аллах (Египет).
43. Габович Евгений Яковлевич.
44. Иванова Ольга Александровна.
45. Кизнер Фрида Исаковна.
46. Соколовская Татьяна Владимировна.
47. Артамонов Вячеслав Александрович.
48. Бургин Марк Семенович.
49. Френкин Борис Рафаилович.
50. Полин Сергей Владимирович.
51. Либер Сергей Александрович.

В.А.Артамонов, Э.Б. Винберг, Е.С.Голод, Н.А.Курош,

С. А. Абрамов (Москва)

Вычисление размерности пространства решений линейной разностной системы

Рассматриваются матрицы разностных операторов $L \in \mathrm{Mat}_n(K[\sigma])$, где K — разностное поле характеристики 0 с автоморфизмом (сдвигом) σ. Обсуждаются два алгоритма вычисления размерности пространства таких решений системы уравнений $Ly = 0$, компоненты которых принадлежат некоторому адекватному разностному расширению поля K. Точнее говоря, алгоритмы выполняют указанные вычисления в том случае, когда L имеет полный ранг, т.е. строки $r_1, \dots, r_n$ матрицы L линейно независимы над $K[\sigma]$: из $f_1 r_1 + \dots + f_n r_n = 0$, $f_1, \dots, f_n \in K[\sigma]$ следует, что $f_1 = \dots = f_n = 0$. Результатом работы каждого из алгоритмов является либо значение размерности пространства решений системы $Ly = 0$, либо сообщение о том, что строки матрицы L линейно зависимы над $K[\sigma]$. Значение размерности — целое число, принадлежащее отрезку $[0,\ nd]$, где n — число строк (и столбцов) матрицы L, d — разность между наибольшим верхним и наименьшим нижним порядками всех скалярных операторов, являющихся элементами L.

Эти два алгоритма основаны соответственно на алгоритме EG-исключений [1], [2] и алгоритме Row-Reduction [3], [4]. Исследуется сложность каждого из предлагаемых алгоритмов вычисления размерности. Сложность понимается как общее число арифметических операций и сдвигов в худшем случае. Показано, что алгоритм, основанный на EG-исключениях, обладает меньшей сложностью, и эта сложность допускает оценку $O(n^3 d^2)$ при $n, d \to \infty$.

Литература. [1] S. Abramov, EG-eliminations. J. of Difference Equat. Applicat., 5 (1999), 393–433. [2] S. Abramov, M. Bronstein, Linear algebra for skew-polynomial matrices. Rapport de Recherche INRIA, March 2002, RR-4420. [3] B. Beckermann, H. Cheng, G. Labahn, Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials. J. Symbolic Comput., 41 (2006), 513–543. [4] M.A. Barkatou, C. El Bacha, G. Labahn, E. Pflügel. On simultaneous row and column reduction of higher-order linear differential systems. J. Symbolic Comput., 49 (2013), 45–64.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: sergeyabramov@mail.ru

А. Н. Абызов (Казань), **Ч. К. Куинь** (Университет Дананга, Вьетнам)

Почти проективные и почти инъективные модули

Пусть M, N – правые R-модули. Модуль M называется *почти N-инъективным*, если для каждого подмодуля N' модуля N и каждого гомоморфизма $f : N' \to M$ либо существует такой гомоморфизм $g : N \to M$, что $f = g\iota$, либо существуют ненулевой идемпотент $\pi \in End_R(N)$ и гомоморфизм $h : M \to \pi(N)$, для которых выполнено равенство $hf = \pi\iota$, где $\iota : N' \to N$ – естественное вложение. Модуль M называется *почти инъективным,* если он почти инъективен относительно каждого правого R-модуля. Двойственно определяется понятие почти проективного модуля. Понятия почти инъективного модуля и почти проективного модуля впервые были изучены в работах Харады, его коллег и учеников.

Через $SI(M)$ будем обозначать сумму всех простых инъективных подмодулей модуля M. Ясно, что $SI(R_R)$ – идеал кольца R.

Теорема 1 [1, теорема 7]. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) каждый правый R-модуль является почти инъективным;

2) R – полуартиново справа кольцо, $Loewy(R_R) \leq 2$ и над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и V-модуля;

3) R – полуартиново справа кольцо, $Loewy(R_R) \leq 2$ и над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой проективного модуля и V-модуля;

4) для кольца R выполнены условия:

   a) в кольце R существует такое конечное множество ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i\in I}$, что e_iR – инъективный локальный правый R-модуль длины два для каждого $i \in I$ и $J(R) = \oplus_{i\in I} J(e_iR)$;

   b) $R/J(R)$ – правое SV-кольцо и $Loewy(R_R) \leq 2$;

   c) $R/SI(R_R)$ – артиново справа кольцо.

Пусть M, N – правые R-модули. Модуль M называется *существенно N-инъективным,* если каждый гомоморфизм из произвольного подмодуля N' модуля N в модуль M, у которого ядро существенно в N', продолжается до некоторого гомоморфизма из N в M

(см. 2, 2.14). Если модуль M существенно N-инъективен для каждого правого R-модуля N, то модуль M называется существенно инъективным. Двойственно определяется понятие мало проективного модуля. Согласно [3, предложение 2.1] каждый почти инъективный модуль является существенно инъективным. Над совершенным справа кольцом каждый почти проективный модуль является мало проективным. Если модуль M существенно M-инъективен, то M называется существенно квазиинъективным. Важными примерами существенно квазиинъективных модулей являются автоморфизм-инвариантные модули или, что равносильно, псевдоинъективные модули.

Теорема 2. Следующие условия равносильны для кольца R:

1) каждая возрастающая цепь существенных правых идеалов кольца R стабилизируется;

2) каждая прямая сумма существенно инъективных правых R-модулей является существенно инъективным модулем;

3) если $K_0, K_1, \ldots, K_n \ldots$ – простые правые R-модули, то модуль $\oplus_{\mathbb{N}} E(K_i)$ является существенно инъективным;

4) $E^{(\mathbb{N})}$ – существенно инъективный модуль для каждого существенно инъективного модуля E_R.

Теорема 3. Следующие условия равносильны для кольца R:

1) $R/Soc(R_R)$ – правое V-кольцо;

2) каждый правый R-модуль является мало проективным;

3) каждый циклический (соотв., конечно порожденный) правый R-модуль является мало проективным;

4) каждый простой (соотв., полупростой) правый R-модуль является мало проективным;

5) каждый простой правый R-модуль является существенно инъективным.

Теорема 4. Следующие условия равносильны для правого R-модуля M:

1) каждый правый R-модуль из категории $\sigma(M)$ является существенно M-инъективным;

2) каждый циклический правый R-модуль из категории $\sigma(M)$ является существенно M-инъективным;

3) каждый M-сингулярный правый R-модуль является полупростым.

Литература. [1] А. Н. Абызов, Почти проективные и почти инъективные модули, Матем. заметки, 103:1 (2018), 3–19. [2] N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith, R. Wisbauer, Extending modules, Pitman Research Notes in Math. 313, Longman, Harlow, New York (1994) [3] M. Arabi-Kakavand, Sh. Asgari, Y. Tolooei, Rings over which every module is almost injective, Comm. Algebra, 44:7 (2016), 2908–2918.

Казанский (Приволжский) федеральный университет

e-mail: aabyzov@kpfu.ru

Department of Mathematics, Danang University

e-mail: tcquynhtcq@gmail.com, tcquynh@dce.udn.vn

А. Н. Адмиралова, **В. Беняш-Кривец** (Минск)

О многообразиях представлений некоторых HNN-расширений свободных произведений циклических групп

Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ — конечно порожденная группа, K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любое линейное представление $\rho : G \to GL_n(K)$ однозначно определяется набором элементов $\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m)$. Эти элементы удовлетворяют всем определяющим соотношениям группы G и, таким образом, имеет место вложение $\rho \mapsto (\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m))$ множества $\hom(G, GL_n(K))$ в $GL_n(K)^m$. Образ множества $\hom(G, GL_n(K))$ относительно этого вложения является аффинным K-многообразием $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$, и это многообразие называют многообразием n-мерных представлений группы G ([1]).

О структуре многообразий $R_n(G)$ в общем случае известно немного. Однако для некоторых классов групп такие описания получены. В статьях [2] и [3] описаны многообразия представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей. В работе [4] исследованы многообразия представлений групп Баумслага-Солитера для взаимно простых p и q, в [5] результаты работы [4] расширены на случай не взаимно простых показателей p и q. В статье [6] описаны структура и свойства многообразий представлений групп, имеющих копредставление

$$H = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g, t \mid \\ t([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^q \rangle,$$

где $g \geq 2$, а p и q взаимно просты.

В предлагаемом сообщении мы рассматриваем следующий класс групп

$$G = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g, t \mid \\ a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1,\ tU^p t^{-1} = U^q \rangle,$$

где $U = x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$, $g \geq 3$, $m_i \geq 2$ для $i = 1, \ldots, s$ и $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ — приведенное слово (возможно, пустое) в свободном произведении циклических групп $H = \langle a_1 \mid a_1^{m_1} \rangle * \ldots * \langle a_s \mid a_s^{m_s} \rangle * \langle b_1 \rangle * \ldots * \langle b_k \rangle$. Группа G является HNN-расширением группы H с проходной буквой t и со связанными циклическими подгруппами $\langle U^p \rangle$ и $\langle U^q \rangle$.

Для формулировки основных результатов нам необходимы следующие утверждения. Далее через E_n мы будем обозначать единичную матрицу порядка n.

Предложение 1. *Пусть C_l — циклическая группа порядка l, γ — первообразный корень из единицы степени l. Для произвольного разбиения $\alpha = (k_1, \ldots, k_l)$ числа n на l неотрицательных частей положим*

$$V_\alpha = \left\{ X Z_\alpha X^{-1} \mid X \in GL_n(K) \right\},$$

где $Z_\alpha = \operatorname{diag}(E_{k_1}, \gamma E_{k_2}, \ldots, \gamma^{l-1} E_{k_l})$. Тогда V_α является неприводимой компонентой многообразия представлений $R_n(C_l)$ размерности $n^2 - \sum_{i=1}^l k_i^2$. При этом $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и $R_n(C_l) = \cup V_\alpha$, где объединение берется по всем возможным разбиениям α. Общее число неприводимых компонент $R_n(C_l)$ равно C_{n+l-1}^{l-1}.

Обозначим через v_i сумму показателей при b_i в слове $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$. Пусть d — наибольший общий делитель чисел $2, v_1, \ldots, v_k$. Отметим, что d равно 1 или 2. Пусть $\Omega(p, q)$ множество таких матриц $A \in GL_n(K)$, что A^p и A^q сопряжены, и пусть $A \in \Omega(p, q)$.

Для каждого i, $1 \leq i \leq m_i$, выберем разбиение $\alpha_i = (k_{i,1}, \ldots, k_{i,m_i})$ числа n на m_i неотрицательных слагаемых. Пусть $V_{\alpha_i} = \left\{ X Z_{\alpha_i} X^{-1} \mid X \in GL_n(K) \right\}$ соответствующая неприводимая компонента $R_n(C_{m_i})$, определенная в предложении 1. Рассмотрим многообразие

$$T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A)=\{(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k,X_1,\ldots,X_g)\in \\ V_{\alpha_1}\times\ldots\times V_{\alpha_s}\times GL_n(K)^{k+g}\mid \\ X_1^2\ldots X_g^2W(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k)=A\}$$

Теорема 1. *Многообразие $T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A)$ имеет d неприводимых компонент, которые мы обозначим $T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$, $1\le i\le d$. Каждая из этих компонент является рациональным многообразием размерности $(g+s+k-1)n^2-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}k_{i,j}^2$.*

Для каждого i, $1\le i\le d$, рассмотрим морфизм

$$\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)}:T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)\times GL_n(K)\times Z(A)\to GL_n(K)^{s+k+g+1}, \\ (A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k,X_1\ldots,X_g,C,z)\mapsto \\ C(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k,X_1,\ldots,X_g,z_0z),$$

где z_0 — некоторая фиксированная матрица, такая что $z_0A^pz_0^{-1}=A^q$, а $Z(A)$ обозначает централизатор матрицы A. Пусть $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$ обозначает замыкание образа морфизма $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)}$ в топологии Зарисского. Справедлива следующая

Теорема 2. *Многообразия $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$ содержатся в $R_n(G)$ и являются неприводимыми компонентами $R_n(G)$. Этими многообразиями исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(G)$. Каждое многообразие $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$ является рациональным многообразием размерности $(g+s+k)n^2-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}k_{i,j}^2+\dim Z(A^h)-\dim Z(A)$, где $h=$ НОД(p,q).*

Литература. [1] A. Lubotzky, A. Magid, Varieties of representations of finitely generated groups. Memoirs AMS, 58:336 (1985), 1–116. [2] V. V. Benyash-Krivetz, A. S. Rapinchuk, V. I. Chernousov, Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces. Israel J. Math. 93 (1996), 29–71. [3] В. В. Беняш-Кривец, В. И. Черноусов, Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей. Матем. сборник. 188:7 (1997), 47–92. [4] В. В. Беняш-Кривец, И. О. Говорушко, Многообразия представлений и характеров групп Баумслага-Солитера. Труды МИАН. 292 (2016), 26–42. [5] В. В. Беняш-Кривец, И. О. Говорушко, Многообразия представлений групп Баумслага-Солитера в случае не взаимно простых показателей. Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук, 1 (2016), 52–56. [6] А. Н. Адмиралова, В. В. Беняш-Кривец, О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением. Вестник БГУ, сер. 1, 3 (2016), 166–172.

Белорусский государственный университет

e-mail: al.admiralova@gmail.com, benyash@bsu.by

М. Г. Амаглобели (Тбилиси)

Функтор тензорного пополнения в категориях степенных MR-групп

Понятие степенной R-группы (R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей) введено Р. Линдоном в [1]. В [2] А. Г. Мясников и В.Н. Ремесленников уточнили понятие R-группы, введя дополнительную аксиому. Это уточнение представляет естественное обобщение понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В честь авторов этой статьи группы с этой аксиомой в статье М. Г. Амаглобели [3] названы MR-группами (R – кольцо). Класс $\mathfrak{M}_R$ степенных MR-групп является квазимногообразием в сигнатуре $\langle \cdot, ^{-1}, e, f_\alpha \mid \alpha \in R\rangle$, где f_α – унарная операция возведения в степень α, т.е. $f_\alpha(g) = g^\alpha$. Большинство естественных примеров степенных R-групп лежат в классе $\mathfrak{M}_R$ (см. пример в [2]).

Хорошо известна роль тензорного произведения в категории R-модулей, в частности, тензорного расширения кольца скаляров. В [2] определен точный аналог этой конструкции для произвольной MR-группы G – тензорное пополнение $G^{S,\mu}$, где $\mu : R \to S$ – гомоморфизм колец. В приложениях μ чаще всего вложение колец, но и в таком случае $\lambda : G \to G^{S,\mu}$ не всегда является вложением. Одно достаточное условие вложения дано в [2]. Класс $\mathfrak{M}_R$ является категорией, в которой морфизмы – это R-гомоморфизмы групп. На языке теории категорий операция тензорного пополнения выступает как функтор тензорного пополнения.

В докладе, следуя [4], будет предложен конкретный способ построения тензорного пополнения в категории MR-групп. Как следствие, получено описание свободных MR-групп и свободных MR-произведений $\underset{R}{*}G_i$ на языке групповых конструкций.

Теорема 1. Для любых X и R, где R содержит кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, свободная MR-группа $F_R(X)$ существует и единственна с точностью до R-изоморфизма.

Теорема 2. Пусть R – кольцо, содержащее кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, G_i – некоторое множество MR-групп, $i \in I$. Тогда

1) $\underset{R}{*}G_i \simeq (*G_i)^R$;

2) каноническое отображение $\lambda : *G_i \to (*G_i)^R$ является вложением.

Литература. [1] R. C. Lyndon, Groups with parametric exponents. Trans. Amer. Math. Soc., 96 (1960), 518–533. [2] А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Степенные группы I. Основы теории и тензорные пополнения. Сиб. мат. журн., 35 (1994), №5, 1106–1118. [3] М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников, Свободные 2-ступенно нильпотентные R-группы. Докл. акад. наук, 443 (2012), no. 4, 410–413. [4] М. Г. Амаглобели, Функтор тензорного пополнения в категориях степенных MR-групп. Алгебра и логика, 57 (2018), №2.

Тбилисский государственный университет имени И. Джавахишвили

e-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

В. И. Арнаутов (Кишинев, Молдова),
Г. Н. Ермакова (Тирасполь, Молдова)

О некоторых свойствах решеток кольцевых топологий

Известно, что для любого кольца R решетка всех кольцевых топологий является полной решеткой, в которой дискретная топология является наибольшим элементом, а антидискретная топология является наименьшим элементом. Кроме того, в этой решетке вседа имеется коатомы, т.е. такие топологии, которые являются максимальными элементами в множестве всех недискретных топологий в этой решетке.

Для конечных простых колец решетка всех кольцевых топологий содержит только две топологигии, а именно – дискретную топологию и антидискретную топологию. В этом случае коатомы совпадают с антидискретной топологией. Имеются и бесконечные кольца, для которых решетка всех кольцевых топологий содержит только две топологигии (см. [1]).

Теорема 1. (см. [2]) Если M – подрешетка решетки всех колцевых топологий на нильпотентном кольце R и $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_n$ – неуплотняемая цепочка в решетке M, то $k \leq n$ для любой цепочки $\tau'_1 < \tau'_2 < \ldots < \tau'_k$ топологий из M, для которой $\tau_1 = \tau'_1$ и $\tau'_k = \tau_n$.

Теорема 2 (см. [3]) Для любого счетного кольца решетка всех кольцевых топологий содержит два в степени континуума коатомов.

Теорема 3 (см. [4]) Если R – кольцо всех квадратных матриц порядка 3×3 вида $\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ над полем рациональных чисел, и $\tilde{R}$ – прямая сумма счетного числа колец изоморфных колдьцу R, то на кольце $\tilde{R}$ существуют коатом τ_0 и кольцевая топология τ_1 такие, что для джискретной топологии τ_d между кольцевыми топологиями $\tau_1 = inf\{\tau_d, \tau_1\}$ и $inf\{\tau_0, \tau_1\}$ имеется бесконечно убывающая и бесконечно возрастающая цепочка кольцевых топологий.

Теорема 4. Если M – подрешетка решетки всех колцевых топологий на нильпотентном кольце R и $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_n$ – неуплотняемая цепочка в решетке M, то $k \leq n$ для любой топологии $\tau \in M$ и любой цепочки $sup\{\tau, \tau_1\} = \tau'_1 < \tau'_2 < \ldots < \tau_{k-1} < \tau'_k = sup\{\tau, \tau_k\}$ топологий из M .

Теорема 5. Если M – такая подрешетка решетки всех колцевых топологий на кольце R, что для любых топологий $\tau_1, \tau_2 \in M$ и любых окрестностей U_1 и V_1 нуля в топологических кольцах (R, τ_1) и (R, τ_2), соответственно, сущестуют такие окрестности U_2 и V_2 нуля в топологически кольцах (R, τ_1) и (R, τ_2), соответственно, что $U_2 \cdot V_2 \subseteq U_1 + V_1$ и $V_2 \cdot U_2 \subseteq U_1 + V_1$, то решетка M является модулярной.

Следствие. Для любого кольца R являются модулярными следующие решетки:

– решетка всех кольцевых топологий на кольце R, в каждой из которых тополгическое кольцо является ограниченным кольцом (ограниченным слева кольцом, ограниченным справа кольцом);

– решетка всех кольцевых топологий на кольце R, в каждой из которых топологическое кольцо обладает базисом окрестностей нуля, который состоит из идеалов (из правых идеалов, из левых идеалов);

– решетка всех кольцевых топологий на кольце R, в каждой из которых топологическое кольцо является предкомпактным кольцом.

Литература. [1] Arnautov V.I„ Glavatsky S.T., Mikhalev A.V. Introduction to the topological rings and modules, Marcel Dekker, inc., New York-Basel-Hong Kong, 1996. [2] Arnautov V.I., Svoystva konechnyh neuplotniaemyh tzepochek kolitzevyh topologiy, Fundamentalinaia i prikladnaia matematika, 2010, (16), No. 8, 5–16 (in Russian). [3] Arnautov V.I., Ermakova G.N., On the number of ring topologies on countable rings, Bul. Acad. Repub. Moldova, Matematica, 2015, No 1 (77), 103 - 104. [4] Arnautov V.I., Ermakova G.N., Unrefinable chains when taking the infimum in the lattice of ring topologies for a nilpotent ring, Bul. Acad. Repub. Moldova, Matematica, 2017, No 2 (84), 71 - 76.

В. А. Артамонов (Москва)

О приложениях полиномиально конечных квазигрупп

Квазигруппой называется множество Q с операцией умножения xy, причем для любых $a, b \in Q$ уравнения $ax = b, \quad ya = b$ имеют единственные решения $x = a\diagdown b, \quad y = b\diagup a$.

Все квазигруппы предполагаются конечными. Они играют важную роль в защите информации. С этой точки зрения важен класс полиномиально полных квазигрупп, в которых любая операция явдяется композицией основных операций $xy, x\diagdown y, x\diagup y$, всех констант с всех проекций

$$p_{in}(x_1, \dots, x_n) = x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Имеет смысл предполагать, что в Q нет подквазигрупп.

Квазигруппа Q аффинна, если в Q имееются структура аддитивной абелевой группы $(Q, +)$, причем умножение xy имеет вид $xy = \alpha(x) + \beta(y) + c$, где α, β — автоморфизмы $(Q, +)$, и $c \in Q$.

Известно, что конечная квазигруппа Q полиномиально полна тогда и только тогда, когда она проста и неаффинна.

Конеыная квазигруппа Q порядка n задается своим латинским квадратом со строками $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, и столбцами $\tau_1, \dots, \tau_n$, являющимися перестановками в are Q. Обозначим через $G(Q)$ подгруппу в группе перестановок S_Q множества Q, порождаемую перестановками $\sigma_i\sigma_j^{-1},\ \tau_i\tau_j^{-1}, \quad i, j = 1, \dots, n$. Известно, что при изотопии $G(Q)$ переходит в сопряженную подгруппу в S_Q.

Теорема 1. Если $G(Q)$ действует дважды транзитивно в Q, то Q полиномиально полна. Это свойство сохраняется при изотопии.

Теорема 2. Любая квазигруппа порядка не менее 3 изотопна квазигруппе без подквазигрупп.

Пусть K, Q — квазигруппы и заданы отображения

$$\Phi, \Lambda, \Gamma : K \to S_Q,\ \Psi, \Omega, \Theta : Q \to S_K. \tag{1}$$

Введем в $K \times Q$ новое умножение

$$(a, \alpha) * (b, \beta) = \left(\Psi_\alpha\left(\Omega_\alpha(a)\Theta_\alpha(b)\right),\ \Phi_b\left(\Lambda_b(\alpha)\Gamma_b(\beta)\right)\right) \tag{2}$$

. Тогда $K \bowtie Q$ является квазигруппой.

Theorem 3. Пусть $G(K), G(Q)$ действуют дважды транзитивно в K, Q, и $|K| < (|Q|-1)!$, $|Q| < (|K|-1)!$. Тогда существуют отображения из from (1), причем $G(K \bowtie Q)$ действует дважды транзитивно в $K \times Q$. Поэтому $K \bowtie Q$ полиномиально полно.

Поэтому можно построить полиномиально полные квазигруппы любого порядка 2^M, где $M \geqslant 3$, $M \neq 5$. Кроме того, можно получить полиномиально полные квазигруппы этих порядков без собственных подквазигрупп.

М. В. Бабенко, **В. В. Чермных** (Киров)

О полукольце косых многочленов

Полукольцом называется непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$. Все полукольца, рассматриваемые нами, предполагаются с единицей, отличной от нуля.

Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов от переменной x и с коэффициентами из S. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$. Непосредственно проверяется, что $S[x, \varphi]$ является полукольцом, которое назовем *правым полукольцом косых многочленов.*

Нами устанавливаются связи свойств полукольца косых многочленов и полукольца его коэффициентов. Некоторые из полученных результатов мы анонсируем в тезисах. С начальной информацией о кольцах косых многочленов можно познакомиться, например, в [1].

Предложение 1. Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Тогда S — полукольцо без делителей нуля тогда и только тогда, когда $R = S[x, \varphi]$ — полукольцо без делителей нуля.

Полукольцо называется *инвариантным справа*, если каждый его правый идеал является идеалом.

Предложение 2. Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, то равносильны условия:

1) $S[x, \varphi]$ — инвариантное справа полукольцо;

2) $S[x, \varphi]$ — коммутативное полукольцо;

3) S — коммутативное полукольцо и $\varphi \equiv 1_S$ — тождественный автоморфизм.

Идемпотент $e = e^2$ называется *дополняемым*, если $e + e^{\perp} = 1$, $ee^{\perp} = 0$ для некоторого $e^{\perp}$. Полукольцо S называется ***риккартовым справа*** (*слева*), если для любого $a \in A$ найдется такой дополняемый идемпотент $e \in A$, что $\mathrm{ann}_r(a) = eA$ ($\mathrm{ann}_l(a) = Ae$). Риккартово справа и слева полукольцо называется *риккартовым.*

Предложение 3. Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, то равносильны условия:

1) $S[x, \varphi]$ — риккартово справа полукольцо без нильпотентных элементов;

2) $S[x, \varphi]$ — риккартово слева полукольцо без нильпотентных элементов;

3) каждый многочлен из $S[x, \varphi]$ является произведением центрального дополняемого идемпотента, лежащего в S, и неделителя нуля;

4) S — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов и $a\varphi(a) \neq 0$ для каждого ненулевого $a \in S$.

На полукольце $R = S[x, \varphi]$ введем конгруэнции: $f \equiv_n g$, если соответствующие n младших коэффициентов многочленов f и g равны.

Полукольцо называется *абелевым*, если каждый его идемпотент является центральным.

Предложение 4. Если S — полукольцо без аддитивных идемпотентов, φ — инъективный эндоморфизм полукольца S и $R \equiv S[x, \varphi]$, то равносильны условия:

1) R — абелево полукольцо;

2) $R/\equiv_2$ — абелево полукольцо;

3) $R/\equiv_n$ — абелево полукольцо для всех $n \in \mathbb{N}$;

4) S — абелево полукольцо и $\varphi(e) = e$ для каждого идемпотента из S.

Литература. [1] А. А. Туганбаев. Теория колец. Арифметические кольца и модули. М.: МЦНМО, 2009.

Вятский государственный университет

e-mail: marinka_ov@mail.ru, vv146@mail.ru

И. Н. Балаба (Тула)

Градуированные фробениусовы алгебры и кольца

Фробениусовы алгебры являются одним из важных классов алгебр, изучаемых в теории представлений конечномерных алгебр. Впервые они появились в работе Ф.Г.Фробениуса в начале XX века, потом активно изучались Накаямой, Брауэром, Несбитт, Икедой, Кашем и другими, но интерес к ним не угасает и в настоящее время (см., например, [1, 2]).

В последние годы отмечается интерес к алгебраическим объектам, снабженным градуировкой. Градуированным фробениусовым алгебрам посвящены работы [3, 4, 5], а в [6] даны характеризация и гомологическая классификация градуированных квазифробениусовых колец.

Пусть далее G — мультипликативная группа с единицей e, k — поле, $A \bigoplus_{g \in G} A_g$ — G-градуированная алгебра.

Для подмножества S в A через $l(S)$ и $r(S)$ обозначим соответственно левый и правый аннуляторы множества S. Если множество S является градуированным, т. е. вместе с каждым своим элементом содержит и все его однородные компоненты, то множества $l(S)$ и $r(S)$ являются соответственно левым и правым градуированными идеалами алгебры A

Левому модулю ${}_AA$ как векторному пространству над полем k можно сопоставить дуальное векторное пространство $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$, являющееся правым A-модулем, если положить $(\varphi a)(x) = \varphi(ax)$ для всех $\varphi \in A^*,\ a, x \in A$.

Если алгебра A конечномерна, то A^* является правым градуированным A-модулем со следующей градуировкой $A^*_g = \{f \in A^* \mid f(A_h) = 0 \ \text{ для всех } h \neq g^{-1}\} \ \ (g \in G)$.

Конечномерная G-градуированная k-алгебра A называется *gr-фробениусовой*, если левые градуированные A-модули ${}_AA$ и $(A_A)^*$ изоморфны.

Ясно, что если градуированная алгебра A является gr-фробениусовой, то A является фробениусовой k-алгеброй. Обратное, вообще говоря неверно.

Теорема 1. Пусть $A \bigoplus_{g \in G} A_g$ — конечномерная G-градуированная k-алгебра. Тогда следующие утверждения равносильны: 1) A – gr-фробениусова;
2) существует невырожденная билинейная форма $f : A \times A \to k$, удовлетворяющее условию ассоциативности, такая что $f(a_g, a_h) = 0$ для всех $a_g \in A_g,\ a_h \in A_h$, для которых $g \neq h^{-1}$; 3) существует линейная функция $\lambda \in A^*$, такая, что $\lambda(a_g) = 0,\ a \in A_g,\ g \neq e$, ядро которой не содержит ненулевых градуированных правых и левых идеалов алгебры A; 4) для всех правых R и всех левых L градуированных идеалов алгебры A выполняются следующие соотношения: $l(r(L)) = L$, $r(l(R)) = R$, $\dim_k r(L) + \dim_k L = \dim_k A$, $\dim_k l(R) + \dim_k R = \dim_k A$.

Эквивалентность условий (1) — (3) была доказана в [3].

Если выполнены условия теоремы 1, то существует единственный автоморфизм $\sigma : A \to A$ градуированной алгебры a, такой что $f(a,b) = f(b, \sigma(a)$, назывемый *автомоморфизмом Накаямы.*

Следствие. Градуированная gr-полупростая алгебра является gr-фробениусовой.

Описание gr-полупростых градуированных колец и их гомологическая классификация даны в [7].

Пусть A — gr-фробениусова алгебра и $f : A \times A \to k$ — невырожденная ассоциативная билинейная форма, определенная в теореме 1, и $a_1, a_2, ..., a_n$ — базис k-алгебры A, состоящий из однородных элементов. Так как $\dim_k A = \dim_k A^*$ и градуированные модули A и A^* изоморфны, то существуют такие однородные элементы $b_1, b_2, ..., b_n \in A$, что $f(a_i, b_j) = \delta_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n$. Эти однородные базисы называются *дуальными базисами* относительно формы f.

Теорема 2. Пусть A — gr-фробениусова алгебра над полем k, $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ — дуальные друг к другу базисы алгебры A. Тогда для левого градуированного A-модуля M следующие утверждения равносильны:
1) M —gr-проективен; 2) M —gr-инъективен; 3) существует такое k-линейное преобразование ψ градуированного модуля M, что $\psi(M_g) \subseteq M_g,\ g \in G$ и $\sum_{i=1}^{n} b_i \psi a_i = \mathrm{Id}_M$.

Градуированное кольцо R называется gr-*квазифробениусовым*, если оно gr-артиново слева и справа и каждый его односторонний градуированный идеал является аннуляторным, и gr-*фробениусовым*, если оно gr-квазифробениусово и $S^{gr}(R) = R/J^{gr}(R)$, где $S^{gr}(R)$ — градуированный цоколь, а $J^{gr}(R)$ – градуированный радикал Джекобсона кольца R.

Теорема 3. Пусть A — конечномерная G-градуированная алгебра над полем k. Тогда алгебра A является gr-фробениусовой в том и только том случае, если кольцо A – gr-фробениусово.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-41-710194.

Литература. [1] A. Skowronski, K. Yamagata. Frobenius algebras I: Basic representation theory. European Mathematical Society, 2012. [2] Y. Baba, K. Oshiro. Classical artinian rings and related topics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2009. [3] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, L. Năstăsescu, Frobenius algebras of corepresentations: gradings, 2013, https://arxiv.org/abs/1307.7304. [4] T. Wakamatsu, On graded Frobenius algebras. J. Algebra, 267 (2003), 377–395. [5] K. Ueyama, Graded Frobenius algebras and quantum Beilinson algebras, Proceedings of the 44th Symposium on Ring Theory and Representation Theory. Okayama University, Japan, 2012. [6] Е. Н. Краснова, Градуированные квазифробениусовы кольца, Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: материалы XII Международной конференции, 2014, 168-171. [7] И. Н. Балаба,Е. Н. Краснова, Полупростые градуированные кольца. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 23–28

Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н.Толстого
e-mail: ibalaba@mail.ru

В. Н. Безверхний (Москва)

Решение проблемы вхождения и сопряженности слов в некотором классе групп с одним определяющим соотношением

Определение 1. Будем говорить, что в группе B разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий установить, для любой конечнопорожденной подгруппы $H < B$ и любого слова $w \in B$ принадлежит ли w подгруппе H или нет.

Проблема вхождения является обобщением проблемы равенства слов и является одной из основных проблем комбинаторной теории групп.

Рассмотрим группу с одним определяющим соотношением, заданную копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n, p, q; A(p, a_1, \ldots, a_n) = B(q, a_1, \ldots, a_n) \rangle, \qquad (1)$$

где слово $A(p, a_1, \ldots, a_n)$ содержит вхождение буквы p, а слово $B(q, a_1, \ldots, a_n)$ содержит вхождение буквы q.

Группы с копредставлением (1) изучались в [1] и [2]. В статье [1] была доказана разрешимость проблемы сопряженности слов в данном классе групп, а в [2] дано описание гиперболических групп с копредставлением (1).

Группу (1) представим в виде свободного произведения свободных групп $F_{n+1} = \langle a_1, \ldots, a_n, p \rangle, F^+_{n+1} = \langle b_1, \ldots, b_n, q \rangle$, объединенных по конечнопорожденным подгруппам $U_1 = \langle a_1, \ldots, a_n, A(p, a_1, \ldots, a_n) \rangle$, $U_1 < F_{n+1}, U_2 = \langle b_1, \ldots, b_n, B(q, a_1, \ldots, a_n) \rangle, U_2 < F^+_{n+1}$. Пусть θ изоморфизм U_1 на U_2 такой, что $\theta : a_1 \to b_1, \ldots, a_n \to b_n, A(p, a_1, \ldots, a_n) \to B(q, a_1, \ldots, a_n)$. Таким образом,

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n, p, b_1, \ldots, b_n, q; a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n, A(p, a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= B(q, a_1, \ldots, a_n)\rangle, \qquad (2)$$

то есть $G = \langle F_{n+1} * F_{n+1}^{+}; \theta(U_1) = U_2\rangle$. Известно, что в свободной группе пересечение конечнопорожденных подгрупп, есть конечнопорожденная подгруппа [3].

Лемма1. [4] Существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения конечнопорожденных подгрупп свободной группы.

Определение 2. В группе G разрешима проблема пересечения смежных классов конечнопорожденных подгрупп, если для любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 из G и любого $w \in G$ можно установить, пусто или нет пересечение $wH_1 \cap H_2$.

Лемма 2. [4] В свободной группе разрешима проблема пересечения смежных классов подгрупп.

Лемма 3. [5], [6]. Пусть $F = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ – свободная группа и $H = \langle a_1, \ldots, a_k,$
$f(a_1, \ldots, a_n)\rangle$, где $k < n$ и $f(a_1, \ldots, a_n) \notin \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$. Тогда, если $z \in F$ минимально в HzH и $HzH \neq H$, тогда $z^{-1}Hz \cap H$ –циклическая подгруппа.

Используя указанные выше леммы и понятие специального множества, определенного в [7], доказывается

Теорема 1. В группах (1) разрешима проблема вхождения.

Рассмотрим следующее HNN-расширение группы (1)

$$G^* = \langle a_1, \ldots, a_n, p, q, t; A(p, a_1, \ldots, a_n) = B(q, a_1, \ldots, a_n), t^(-1)pt = q\rangle. \qquad (3)$$

Лемма 4. Существует алгоритм, который позволяющий для любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$, где G есть группа (1) выписать образующие пересечения $H \cap \langle p\rangle$, $H \cap \langle q\rangle$.

Лемма 5. В группе G, где G есть группа (1), разрешима проблема пересечения класса смежности любой конечнопорожденной подгруппы H с циклической подгруппой $\langle p\rangle$ и с циклической подгруппой $\langle q\rangle$.

Теорема 2. [7] Пусть в группе B^* являющейся HNN-расширением группы B с помощью изоморфных подгрупп A_1, A_2 из B и фиксированного конструктивного изоморфизма $\varphi : A_1 \to A_2$ то есть $B^* = \langle B, t; reelB, t^{-1}A_1t = A_2, \varphi\rangle$. Тогда, если в группе B

1) разрешима проблема вхождения;

2) подгруппы A_1, A_2 обладают свойством максимальности;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < B$ с A_1, A_2;

4) разрешима проблема пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы $H < B$ с A_1, A_2,

то в группе B^* разрешима проблема вхождения.

Теорема 3. В группе G^* с копредставлением (3) разрешима проблема вхождения.

Теорема 4. В группе G^* с копредставлением (3) разрешима проблема сопряженности слов.

Литература. [1] Г. А. Гуревич. К проблеме сопряженности для групп с одним определяющим соотношением. Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова. TCXXXIII. М. 1973, 109-119. [2] В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О гиперболичности некоторых групп с одним определяющим соотношением. Чебышевский сб., 2 (2001), 5-13. [3] Р. Линдон, П. Шупп. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. [4] В. Н. Безверхний. О пересечении конечнопорожденных подгрупп в свободной группе. Сб. науч. тр. каф. высш. математики. Тул. политех. ин-та, 2 (1974), 51-56. [5] В. Н. Безверхний. Решение проблемы сопряженности слов в одном классе групп. Алгоритм. проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1991, 4-38. [6] Н. Б. Безверхняя. Гиперболичность некоторых двупорожденных групп с одним определяющим соотношением. Дискретная математика. 14:3 (2002), 54-69. [7] В. Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп. Алгоритм. проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1981, 20-62.

Академия гражданской защиты МЧС России

e-mail: vnbezv@rambler.ru

В. Н. Безверхний, **Н. Б. Безверхняя** (Москва)

Об обобщенной сопряженности слов в некотором классе подгрупп групп Артина с древесной структурой

Группа Артина задается копредставлением:

$$G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n} \rangle, \qquad (1)$$

где m_{ij} — элементы матрицы Кокстера, соответствующей данной группе, при $i \neq j, m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ и $m_{ii} = 1$, при $i \in \overline{1, n}$, где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = a_i a_j a_i \ldots$ — слово длины m_{ij} из чередующихся букв a_i, a_j.

Каждой группе (1) соответствует группа Кокстера с копредставлением

$$\overline{G} = \langle a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}, a_i^2, i, j \in \overline{1, n} \rangle,$$

которая является фактор-группой группы Артина по нормальному делителю $N_G = \langle a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2 \rangle^G$. Назовем подгруппу N_G по аналогии с нормальным делителем $N_{B_{n+1}}$ группы кос B_{n+1} крашеной нормальной подгруппой группы G .

Каждой группе Артина можно поставить в соответствие граф Кокстера Γ, между вершинами которого и образующими группы G установлено взаимно однозначное соответствие, причем если две вершины a_i, a_j (которым соответствуют образующие a_i, a_j) соединены ребром, то данному ребру соответствует определяющее соотношение $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$. Пусть граф Γ является дерево-графом, тогда группа G называется группой Артина с древесной структурой, при этом элементы матрицы Кокстера $M = \{(m_i j); i, j \in \overline{1,n}\}$ принимают значения при $i \neq j, m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Причем, если какие-то вершины a_i, a_j графа не соединены ребром, то этим образующим соответствует $m_{ij} = \infty$.

Теорема 1. [1] В группе Артина (Кокстера) с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.

Определение. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух множеств слов $\{w_i\}, \{v_i\}, i = \overline{1,k}$ из группы G установить, существует ли слово $z \in G$ такое, что $\&_{i=1}^{k}(z^{-1} w_i z = v_i)$.

Теорема 2. В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

Проблема обобщенной сопряженности слов была решена для групп Артина большого и экстрабольшого типов [2] и в группах Артина конечного типа [3].

Лемма 1. Пусть G группа Артина, $N_G < G$ — крашеная подгруппа группы G. Тогда для любого $w \in G$ можно эффективно установить, принадлежит ли w подгруппе N_G.

Лемма 2. В группе Артина с древесной структурой централизатор любого конечного множества слов $\{w_i\}, i = \overline{1,k}$ $C_{G_\Gamma}(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

Обозначим через θ гомоморфизм данной группы Артина G на соответствующую группу Кокстера $\overline{G}$.

Лемма 3. Пусть z_0 какое-то решение системы $\&_{i=1}^{k}(z^{-1} w_i z = v_i)$ в группе G_Γ, G_Γ — группа Артина с древесной структурой; $w_i, v_i, i =$

$\overline{1,k}$ принадлежат N_{G_Γ}. Тогда множество слов $\{w_i\}, i = \overline{1,k}$ обобщенно сопряжено с $\{v_i\}, i = \overline{1,k}$ тогда и только тогда, когда $\theta(z_0) \in \theta(C_{G_\Gamma}(w_1, w_2, \ldots, w_k))$.

Теорема 4. Пусть G группа Артина с древесной структурой и N_G крашеная подгруппа группы G, тогда в N_G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

Литература. [1] В. Н. Безверхний, О. Ю. Карпова. Проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. Известия ТулГу. Сер. Математика. Механика. Информатика, 12:1 (2006), 67-82. [2] В. Н. Безверхний. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа. Фундаментальная и прикладная математика, 5:1 (1999), 1-38. [3] Т. А. Маканина. Об одной системе уравнений в группе кос. Изв. Вузов. Матем., 9 (1986), 58-62.

Академия гражданской защиты МЧС России

e-mail: vnbezv@rambler.ru

В. Н. Безверхний (Москва), **И. В. Добрынина** (Тула)

О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера

Рассмотрим группу Кокстера, заданную копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n;\, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1,n} \rangle,$$

где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера: $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет. Из копредставления группы Кокстера следует, что квадрат любого образующего равен единице.

Известно, что в группах Кокстера алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов. Обобщением проблемы сопряженности слов является проблема обобщенной сопряженности слов.

Определение. В группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из G установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^{n}(z^{-1} w_i z = v_i)$.

Группа Кокстера называется группой Кокстера экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$. Данный класс групп в 1983 году выделен К. Аппелем и П. Шуппом [1].

Для всякой группы Кокстера G можно построить граф Γ такой, что образующим a_i соответствуют вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$ — ребро, соединяющее a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа Кокстера G называется группой Кокстера с древесной структурой.

Группа Кокстера G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы Кокстера G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j; a_j^2 \rangle$.

Класс групп Кокстера с древесной структурой введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [2].

Далее рассмотрим группу Кокстера

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} *G_s; a_{i_m} = a_{j_l}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1,t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Кокстера G_s, где G_s либо группа Кокстера с древесной структурой, либо группа Кокстера экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_l}$ означает, что объединение групп Кокстера G_i и G_j ведется по циклической подгруппе второго порядка $\langle a_{i_m}; a_{i_m}^2 \rangle$ $(\langle a_{j_l}; a_{j_l}^2 \rangle)$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i, a_{j_l} — некоторый образующий группы G_j.

Такую группу Кокстера G будем называть обобщенной древесной структурой групп Кокстера.

Теорема 1. Централизатор конечно порожденной подгруппы H обобщенной древесной структуры групп Кокстера G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие данного централизатора.

Теорема 2. В обобщенной древесной структуре групп Кокстера G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

Теорема 3. Пусть G — обобщенная древесная структура групп Кокстера и $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$ — конечные множества слов из G. Если F — некоторое решение системы $\&_{i=1}^{n}(z^{-1} w_i z = v_i)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H) \cdot F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ — централизатор подгруппы H, порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, является множеством всех решений системы.

Теорема 4. Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из обобщенной древесной структуры групп Кокстера G выписать образующие их нормализатора.

Литература. [1] K. Appel, P. Schupp, Artins groups and infinite Coxter groups. Ivent. Math., 72 (1983), 201–220. [2] В. Н. Безверхний, О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тезисы докладов V международной конференции. Тула, 2003, 33–34.

Академия гражданской защиты МЧС России
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого

e-mail: vnbezv@rambler.ru, dobrynirina@yandex.ru

Л. А. Бокуть (Новосибирск), **Ю. Чен** (Guangzhou, P.R. China)

Базисы Грёбнера-Ширшова для Ω-алгебр и категорий

Как известно, А.Г. Курош, 1947–1969, в рамках развития общей (абстрактной) алгебры инициировал программы изучения свободных (неассоциативных) алгебр, алгебраических категорий и алгебр с мультиоператорами. Одним из результатов этого стало открытие А.И.Ширшовым, 1962, метода Базисов Грёбнера - Ширшова в алгебре. В докладе будет дан обзор результатов по этой тематике, полученных в семинаре автора и Yuqun Chen (SCNU, Guangzhou) в 2009-2018 годах. Указаны приложения этого метода к ассоциативным и лиевым (дифференциальным) алгебрам Рота–Бакстера (вместе с Jianjun Qiu), (супер-) алгебрам Гельфанда–Дорфман–Балинского–Новикова (–Пуассона) (вместе с Zerui Zhang), симплициальным и циклическим категориям (вместе с Yu Li), полукольцам (вместе с Qiuhui Mo), и свободным инверсным полугруппам (вместе с Xiangui Zhao), плактик моноиду и алгебрам Левитта (результаты В. Лопаткина).

Литература. [1] L.A. Bokut, Yuqun Chen and Zerui Zhang, On free Gelfand-Dorfman-Novikov-Poisson algebras and a PBW theorem, J. Algebra, 500 (2018), 153-170, the special issue dedicated to 60-th birthday of E.I.Zelmanov. [2] L.A. Bokut, Yuqun Chen, Zerui Zhang, Gröbner-Shirshov bases method for Gelfand-Dorfman-Novikov algebras, Journal of Algebra and Its Applications, 16(1) (2017) 1750001-1–175001-22 [3] L.A. Bokut, Zerui Zhang, Yuqun Chen, On free GDN superalgebras and a PBW type theorem, arXiv:1702.03922 [4] L. A. Bokut, Yuqun Chen, Yu Li, Gröbner-Shirshov bases for categories, Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics,Operads and Universal Algebra,Vol.9(2012), 1-23 [5] L. A. Bokut, Yuqun Chen, Jianjun Qiu, Groebner-Shirshov Bases for Associative Algebras with Multiple Operators and Free Rota-Baxter Algebras, Journal of Pure and Applied Algebra, 214(2010), 89-100. [6] L. A. Bokut, Y. Chen, X. Zhao, Gröbner-Shirshov bases for free inverse semigroups, International Journal of Algebra and Computation, 19(2)(2009), 129-143 [7] Jianjun Qiu, Yuqun Chen, Composition-Diamond lemma for λ-differential associative algebras with multiple operators, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 9, No. 2 (2010) 223-239 [8] Y. Chen, Y. Chen, Y. Li, Composition-Diamond lemma for differential algebras, The Arabian Journal for Science and Engineering, 34(2A)(2009), 135-145. [9] L. A. Bokut, Yuqun Chen, Qiuhui Mo, Grцbner-Shirshov bases for semirings, Journal of Algebra, Volume 385, 1 July 2013, 47-63, [10] Jianjun Qiu, Yuqun Chen, Grцbner-Shirshov bases for Lie Ω-algebras and free Rota-Baxter Lie algebras, J. Algebra Appl. 16, 1750190 (2017) [21 pages] [11] Jianjun Qiu, Yuqun Chen, Free Rota-Baxter systems and a Hopf algebra structure, Communications in Algebra, 2018 https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1427246 [12] Jianjun Qiu, Yuqun Chen, Free differential Lie Rota-Baxter algebras and Gröbner-Shirshov bases, International Journal of Algebra and Computation, Volume 27, Issue 08, December 2017 [13] V. Lopatkin, Cohomology rings of the plactic monoid algebra via a Gröbner–Shirshov basis, *Journal of Algebra and its Applications,* **15**(4), (2016), 30pp; arXiv:1411.5464. [14] V. Lopatkin, Derivations of the Leavitt path algebra, arXiv:1509.05075. (submitted to Journal of Algebra) [15] V. Lopatkin and T.G. Nam, “On the homological dimension of Leavitt path algebra with coefficients in commutative rings *Journal of Algebra,* **481** (2017), 273–292

Иниститут математики им. С.Л.Соболева, СО РАН
South China Normal University

e-mail: bokut@math.nsc.ru

А. А. Бондаренко (Минск)

К проблеме Уодсворта–Лама–Эльмана над локальным полем

Пусть $W(K)$ — кольцо Витта над полем K, L — расширение поля K. Любая квадратичная форма f над K может быть рассмотрена как квадратичная форма над L. Отображение классов эквивалентности по Витту $[f] \mapsto [f_L]$ является гомоморфизмом колец $\varphi : W(K) \to W(L)$. Структура ядра естественного гомоморфизма φ колец Витта изучается в работах Р. Эльмана, Ц. Ю. Лама, А. Уодсворта и др.

В работе [1] сделано следующее предположение: ядро гомоморфизма $\varphi : W(K) \to W(L)$, где L — мультиквадратичное расширение поля K, т. е. $L = K(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_m})$, где $\alpha_i \in K$, имеет следующий вид

$$\operatorname{Ker}\varphi = \sum_{i=1}^{m} [\langle 1, -\alpha_i \rangle] W(K).$$

Эта гипотеза подтверждена для многих частных случаев, и до сих пор не удалось найти контрпример к ней. В [2] она подтверждена для $m = 1$, в [3] — для $m = 2$. В [1] проблема решена для так называемых сильно 1-аменабельных полей. Глобальные поля относятся к этому классу полей. Основная цель настоящего сообщения — решение проблемы для локальных полей. Имеет место

Теорема 1. Пусть L — мультиквадратичное расширение локального поля K, $L = K(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_m})$, где $\alpha_i \in K$. Тогда $\operatorname{Ker}(W(K) \to W(L)) = \sum_{i=1}^{m} [\langle 1, -\alpha_i \rangle] W(K)$.

При доказательстве теоремы существенно используются результаты, полученые в [4].

Литература. [1] R. Elman, T. Y. Lam, A. Wadsworth, Quadratic forms under multiquadratic extensions. Nederl. Acad. Wetensch. Intag.Math., 42:2 (1980), 131–145. [2] T. Y. Lam. Ten lectures on quadratic forms over fields. Conference on Quadratic Forms—1976 (Proc. Conf., Queen's Univ., Kingston, Ont., 1976), 1–102. Queen's Papers in Pure and Appl. Math., 46, Queen's Univ., Kingston, ON. [3] R. Elman, Quadratic forms and the u-invariant. III. Conference on Quadratic Forms—1976 (Proc. Conf., Queen's Univ., Kingston, Ont., 1976), 422–444. Queen's Papers in Pure and Appl. Math., 46, Queen's Univ., Kingston, ON. [4] А. А. Бондаренко, Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем. Матем. заметки, 85:5 (2009), 661–670.

Белорусский государственный университет

e-mail: bondarenko@bsu.by

А. Я. Белов

Проблемы Бернсайдовского типа: теорема Ширшова о высоте и нормальные базисы.

В 1958 году А. И. Ширшов доказал свою знаменитую теорему о высоте:

Теорема Ширшова о высоте. *Множество всех не n-разбиваемых слов в конечно порождённой алгебре с допустимым* *полиномиальным тождеством имеет ограниченную высоту H над множеством слов степени не выше $n-1$.*

Определение 1. Назовём PI-алгебру A алгеброй *ограниченной высоты* $\mathrm{Ht}_Y(A)$ *над множеством слов* $Y=\{u_1,u_2,\ldots\}$, если h – минимальное число такое, что любое слово x из A можно представить в виде

$$x=\sum_i \alpha_i u_{j_{(i,1)}}^{k_{(i,1)}} u_{j_{(i,2)}}^{k_{(i,2)}} \cdots u_{j_{(i,r_i)}}^{k_{(i,r_i)}},$$

причем $\{r_i\}$ ограничены числом h в совокупности. Множество Y называется *базисом Ширшова* для A.

Назовем слово W *n-разбиваемым*, если W можно представить в виде $W=vu_1u_2\cdots u_n$ так чтобы $u_1\succ u_2\succ\cdots\succ u_n$.

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы:

1. На какие классы колец можно распространить теорему о высоте?

   Автору удалось распространить ее на широкий класс колец, асимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановые алгебры.

2. Над какими Y алгебра A имеет ограниченную высоту? В частности, какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$?

   Такое описание имеется, в качестве Y можно взять множество слов, степени не выше полиномиальной сложности.

3. Как устроен вектор степеней $(k_1,\ldots,k_h)$? Прежде всего: какие множества компонент этого вектора являются существенными, т.е. какие наборы k_i могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота? Верно ли что множество векторов степеней обладает теми или иными свойствами регулярности?

   Данный вопрос оказался тесно связанный с исследованием экспоненциально - диофантовых уравнений.

4. Как оценить высоту?

   Субэкспоненциальная оценка была получена автором совместно с М. И. Харитоновым.

   Доказательство использует идею В.Н.Латышева о применении теоремы Дилуорса (впервые использовать ее в таком контексте предложил Г.Р.Челноков).

Имеются также смежные вопросы, относящиеся к строению базисов алгебр.

Теорема 1. (А. Я. Белов) а) Пусть A – градуированная PI-алгебра, Y – конечное множество однородных элементов. Тогда если при всех n алгебра $A/Y^{(n)}$ нильпотентна, то Y есть s-базис A. Если при этом Y порождает A как алгебру, то Y – базис Ширшова алгебры A.

б) Пусть A — PI-алгебра, $M \subseteq A$ — некоторое курошево подмножество в A. Тогда M — s-базис алгебры A.

$Y^{(n)}$ обозначает идеал, порожденный n-ыми степенями элементов из Y. Множество $M \subset A$ называется *курошевым*, если любая проекция $\pi\colon A \otimes K[X] \to A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$. Мотивировкой этого понятия служит следующий пример. Пусть $A = \mathbb{Q}[x, 1/x]$. Любая проекция π такая, что $\pi(x)$ алгебраичен, имеет конечномерный образ. Однако множество $\{x\}$ не является s-базисом алгебры $\mathbb{Q}[x, 1/x]$. Таким образом, ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение свойства *целости.*

Ясно, что размерность Гельфанда–Кириллова оценивается существенной высотой и что s-базис является базисом Ширшова, тогда и только тогда, когда он порождает A как алгебру. В представимом случае имеет место и обратное утверждение.

Теорема 2. (А. Я. Белов) Пусть A – конечно порожденная представимая алгебра и пусть $H_{EssY}(A) < \infty$. Тогда $H_{EssY}(A) = \mathrm{GK}(A)$.

Следствие 1. (В. Т. Марков) Размерность Гельфанда–Кириллова конечно порожденной представимой алгебры есть целое число.

Следствие 2. Если $H_{EssY}(A) < \infty$, и алгебра A представима, то $H_{EssY}(A)$ не зависит от выбора s-базиса Y.

В этом случае размерность Гельфанда—Кириллова также равна существенной высоте в силу локальной представимости относительно свободных алгебр.

Хотя в представимом случае размерность Гельфанда-Кириллова и существенная высота ведут себя хорошо, тем не менее даже тогда множество векторов степеней может быть устроено плохо — а именно, может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально-полиномиальных диофантовых уравнений (См. Belov, A. Ya., Borisenko, V. V., and Latyshev, V. N. Monomial algebras, Algebra 4, J. Math. Sci. (New York) 87, 1997 vol 3 p. 3463–3575.) Вот почему существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Однако для относительно свободной алгебры ряд Гильберта рационален. В положительной характеристике ситуация лучше: как установил автор с А.А.Чиликовым множество решений системы экспоненциально-диофантовых уравнений с основанием экспонент в кольце положительной характеристике допускает пописание в терминах регулярного языка. Рассмотрим систему экспоненциально-диофантовых уравнений:

$$\sum_{i=1}^{s} P_{ij}(n_1,\ldots,n_t)b_{ij0}a_{ij1}^{n_1}b_{ij1}\ldots a_{ijt}^{n_t}b_{ijt}=0,$$

где b_{ijk}, a_{ijk} — константы из матричного кольца характеристики p, n_i — неизвестные. Каждому решению $\langle n_1,\ldots,n_t\rangle$ системы сопоставим слово над алфавитом из p^t букв $\overline{\alpha}_0\ldots\overline{\alpha}_q$, где $\overline{\alpha}_i$ — $\langle n_1^{(i)},\ldots,n_t^{(i)}\rangle$, $n^{(i)}$ — i-я цифра в p-ичной записи числа n. Основной результат работы заключается в следующем: множество слов, отвечающих решениям системы экспоненциально-диофантовых уравнений, является регулярным языком (т. е. представимо конечным автоматом). Существует эффективный алгоритм, позволяющий вычислить этот язык. (см. Экспоненциальные диофантовы уравнения в кольцах положительной характеристики А. Я. Белов, А. А. Чиликов, Фундамент. и прикл. матем., 6:3 (2000), 649–668)

Недавно автору удалось установить следующий результат:

Теорема 3. (А. Я. Белов) Пусть A – конечно порожденная представимая алгебра. Тогда минимальная размерность кольца представления равна $\mathrm{GK}(A)$ (и, соответственно, $H_{EssY}(A)$).

Алгебра A *представима*, если она вкладывается в алгебру B, являющуюся нетеровым модулем над центроидом, именуемым *кольцом представления.*

МФТИ, Бар-Илан

Р. В. Бородич, **Е. Н. Бородич**, **М. В. Селькин** (Гомель)

О p-нильпотентных абнормальных подгруппах в группах с операторами

В теории конечных групп одну из важных ролей выполняют максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, а также взаимодействия между собой и с другими подгруппами позволяют раскрыть многие свойства самих групп (см. монографию [1]).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ — гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [2] будем говорить, что τ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi : A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^\phi \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

Функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Теорема 1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, G — разрешимая группа, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Если в группе G существуют не p-нильпотентные абнормальные максимальные A-допустимые θ-подгруппы, не содержащие p-нильпотентный радикал, то пересечение всех таких подгрупп является p-нильпотентной подгруппой группы G.

Литература. [1] М. В. Селькин. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.:Беларуская навука, 1997. [2] А.Н. Скиба. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

e-mail: Borodich@gsu.by

В. И. Варанкина, **Е. М. Вечтомов**, **Е. Н. Лубягина** (Киров)

Подалгебры в полукольцах непрерывных частичных числовых функций[1]

Пусть X — топологическое пространство, $C(X)$ — кольцо всех непрерывных действительнозначных функций на X и $CP(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X\}$ — *полукольцо* всех непрерывных частичных $\mathbf{R}$-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на пересечении $D(f) \cap D(g)$ их областей определения. Считаем, что $C(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Полукольцо $CP(X)$ имеет единицу 1 и поглощающий элемент $\varnothing$.

Подалгеброй полукольца $CP(X)$ называется его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа из $\mathbf{R}$. Пустое множество $\varnothing$ также считается подалгеброй в $CP(X)$.

Через $A(X)$ обозначим множество всех подалгебр полукольца $CP(X)$, через $A_1(X)$ — множество всех его подалгебр с единицей 1. Относительно отношения включения $\subseteq$ множество $A(X)$ образует полную *решетку* с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом $CP(X)$, а $A_1(X)$ будет полной решеткой с наименьшим элементом $\mathbf{R}$ — подалгеброй функций-констант на X. Решетка $A_1(X)$ является подрешеткой решетки $A(X)$. Подалгебра $\mathbf{R}$ определяется в терминах решетки $A(X)$.

Описаны атомы (минимальные подалгебры) и предатомы решеток $A(X)$ и $A_1(X)$ над произвольным топологическим пространством X. На основании этого доказывается теорема *абсолютной определяемости* T_1-пространств X решетками подалгебр полуколец $CP(X)$:

Теорема 1. Для любых топологического пространства X и T_1-пространства Y равносильны следующие утверждения:

1) решетки $A(X)$ и $A(Y)$ изоморфны;
2) решетки $A_1(X)$ и $A_1(Y)$ изоморфны;
3) пространства X и Y гомеоморфны.

Напомним, что топологическое пространство называется T_1-*пространством*, если все его одноточечные подмножества замкнуты, и называется T_0-*пространством*, если любые две его различные точки имеют разные замыкания. Заметим, что T_0-пространства X не обязаны определяться решетками $A(X)$ и $A_1(X)$.

Каждый гомеоморфизм топологических пространств X и Y порождает соответствующий изоморфизм полуколец $CP(X)$ и $CP(Y)$,

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9

который в свою очередь *индуцирует* изоморфизм решеток $A(X)$ и $A(Y)$ и решеток $A_1(X)$ и $A_1(Y)$.

Теорема 2. Если X — произвольное топологическое пространство и Y — T_1-пространсто, то все изоморфизмы решеток $A(X)$ и $A(Y)$ и решеток $A_1(X)$ и $A_1(Y)$ — индуцированные.

Найдены два класса максимальных подалгебр полуколец $CP(X)$, и показано, что для конечных топологических пространств X ими исчерпываются все максимальные подалгебры в полукольцах $CP(X)$.

Литература. [1] Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. Определяемость T_1-пространств решеткой подалгебр полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций на них // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(22). С. 21–28. [2] Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. Полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций // CEUR-WS.org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference «Modern Problems in Mathematics and its Applications» Yekaterin-burg, Russia, February 5–11, 2017. С. 20—29. [3] Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков. Элементы функциональной алгебры. В 2-х т. Т. 2 / под ред. Е. М. Вечтомова. – Киров: ООО «Издательство «Радуга-ПРЕСС», 2016. 316 с.

Вятский государственный университет

e-mail: vecht@mail.ru

А. Ф. Васильев (Гомель, Беларусь)

Силовски определяемые классы конечных групп

Рассматриваются только конечные группы. Понятие силовской подгруппы занимает центральное место в теории конечных групп. Знание свойств строения и вложения силовских подгрупп позволяет во многих случаях получить описание самой группы. К настоящему времени значительное развитие получила теория классов групп, см, например, монографии [1–4]. В рамках этой теории возникает следующая естественная проблема.

Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация (класс Фиттинга, класс Шунка) групп. Найти условия, которым должны удовлетворять силовские подгруппы группы G, чтобы G принадлежала $\mathfrak{F}$.

Например, хорошо известно, что группа G тогда и только тогда нильпотентна, когда ее силовские подгруппы нормальны (субнормальны) в G.

Естественным обобщением субнормальности являются понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы [4].

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется: 1) *$\mathfrak{F}$-субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$; 2) *K-$\mathfrak{F}$-субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В работе [5] для случая наследственной насыщенной формации были начаты исследования строения групп, у которых силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными. В дальнейшем это направление получило развитие в работах различных авторов. Например, в работах [6–8] для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ были изучены свойства класса групп, в которых силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными (K-$\mathfrak{F}$-субнормальными), в работах [9–18] были найдены приложения полученных классов для конкретных формаций $\mathfrak{F}$.

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация групп. Подгруппу H группы G назовем сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если $N_G(H)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.

Так как подгруппа нормальна в своем нормализаторе, то всякая сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа будет K-$\mathfrak{F}$-субнормальной. Обратное утверждение неверно. Пусть S — симметрическая группа степени 3. Известно, что существует точный неприводимый S-модуль U над полем F_7 из 7 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]S$. Так как подгруппа S неабелева, то группа G не является сверхразрешимой. Из сверхразрешимости G/U следует, что $H = UG_3$ является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой группы G, где G_3 — силовская 3-подгруппа группы G, лежащая в S. Заметим, что H — сверхразрешимая подгруппа группы G. Следовательно, G_3 K-$\mathfrak{U}$-субнормальна в G. С другой стороны, нормализатор G_3 в G равен подгруппе S, которая не является $\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Следовательно, G_3 не является сильно K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, состоящая из метанильпотентных групп. Тогда и только тогда группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и каждая силовская подгруппа из G сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех групп, имеющих нильпотентный коммутант. Если каждая силовская подгруппа группы G сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то G также имеет нильпотентный коммутант.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех метанильпотентных групп. Если каждая силовская подгруппа группы G сильно К-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то G метанильпотентна.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, состоящая из дисперсивных групп. Тогда и только тогда группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и каждая силовская подгруппа из G сильно К-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Следствие 3. [16] Пусть $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Если каждая силовская подгруппа группы G сильно К-$\mathfrak{U}$-субнормальна в G, то G сверхразрешима.

Литература. [1] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. [2] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. [3] W. Guo,. The Theory of Classes of Groups. Beijing: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. [4] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer, 2006. [5] А. Ф. Васильев, О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы. Вопросы алгебры, 8 (1995), 31–39. [6] Т. И. Васильева, А. И. Прокопенко, Конечные группы с $\mathfrak{F}$-достижимыми проекторами Изв. ГГУ им. Ф.Скорины, 38 (2006), 14–18. [7] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами. Проблемы физики, математики и техники, 4 (2011), 86–91. [8] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. С. Вегера, Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп. Сиб. мат. журн., 57:2 (2016), 259–275. [9] В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук, Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп. Матем. заметки, 89:1 (2011), 104–108. [10] В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук, Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны. Изв. вузов. Матем., 8 (2011), 46–55. [11] V. N. Semenchuk, A. N. Skiba, On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups. J. of Algebra and its Applications, 15:4 (2016), 1650063-1–1650063-11. [12] В. А. Васильев, Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами. Сиб. мат. журн., 56:6 (2015), 1277–1288. [13] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О конечных группах сверхразрешимого типа. Сиб. мат. журн., 51:6 (2010), 1270–1281. [14] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О К-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп. Мат. заметки, 95:4 (2014), 517–528. [15] V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups. Ricerche mat., 62:2 (2013), 307–322. [16] V. Kniahina, V. Monakhov, On supersolubility of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups.

International Journal of Group Theory, 2:4 (2013), 21–29. [17] В. И. Мурашко, Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами. Сиб. мат. журн., 55:6 (2014), 1353-1367. [18] В. И. Мурашко, О классе групп с экстремальными $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами. Изв. ГГУ им. Ф. Скорины, 105 (2017), 111-115.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

e-mail: formation56@mail.ru

Е. А. Васильева (LIX, Париж), **А. Л. Канунников** (МГУ, Москва), **В. В. Промыслов** (МГУ, Москва)

Симметрические полиномы и структурные константы Джека

Доклад посвящён обзору результатов о симметрических функциях и структурных константах Джека.

В 1970 году Г. Джек [1] ввёл класс симметрических функций $J^\lambda_\alpha(x)$ от $x = (x_1, x_2, \ldots)$, индексированных разбиениями λ и зависящих от параметра α, которые естественным образом обобщают полиномы Шура $s_\lambda(x)$ (получаемые после некоторой нормировки при $\alpha = 1$) и зональные полиномы $Z_\lambda(x)$ ($\alpha = 2$). Используем стандартные обозначения, связанные с разбиением $\lambda = [1^{m_1(\lambda)}2^{m_2(\lambda)}\ldots] = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash n$: $\ell(\lambda) = p$, $|\lambda| = n$, $z_\lambda = \prod_i i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!$. Определим скалярное произведение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_\alpha$ равенством $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\alpha = \alpha^{\ell(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda,\mu}$, где $p_\lambda(x)$ — степенные суммы. В 1996 году Гулден и Джексон [2] ввели полиномы $a^\lambda_{\mu\nu}(\alpha)$ ($\lambda, \mu, \nu \vdash n \in \mathbb{N}$) с помощью тождества

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu\vdash n} \alpha^{-\ell(\lambda)} z_\lambda^{-1} a^\lambda_{\mu\nu}(\alpha) p_\lambda(x) p_\mu(y) p_\nu(z) = \sum_{\gamma\vdash n} \frac{J^\alpha_\gamma(x) J^\alpha_\gamma(y) J^\alpha_\gamma(z)}{\langle J^\alpha_\gamma, J^\alpha_\gamma \rangle_\alpha},$$

которые при $\alpha = 1, 2$ превращаются в структурные константы двух классических алгебр (алгебры классов сопряжённости при $\alpha = 1$ и алгебры двойных смежных классов при $\alpha = 2$). В 2016 году Долега и Фере показали, что $a^\lambda_{\mu\nu}(\alpha)$ являются структурными константами алгебры функций на диаграммах Юнга относительно базиса, состоящего из характеров Джека $\theta^\lambda_\mu(\alpha)$ (как функций разбиения μ), определяемых разложением $J^\alpha_\lambda(x) = \sum_\mu \theta^\lambda_\mu(\alpha) p_\mu(x)$. Числа $a^\lambda_{\mu\nu}(1)$ и $a^\lambda_{\mu\nu}(2)$ имеют интересные комбинаторные интерпретации в терминах некоторых графов и гиперкарт, вложенных в локально ориентируемые поверхности. Опираясь на эти интерпретации, Гулден и Джексон [2] выдвинули гипотезу о комбинаторном смысле самих полиномов $a^\lambda_{\mu\nu}(\alpha)$.

Пусть $V = \{1, \hat{1}, \ldots, n, \hat{n}\}$, $\mathcal{F}$ — множество всех паросочетаний на V. Если $\mathbf{p} \cup \mathbf{q}$ для $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathcal{F}$ есть объединение циклов длин $2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_p$, то пишут [2] $\Lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda$. Пусть $\mathbf{g}_n = \{\{1, \hat{1}\}, \ldots, \{n, \hat{n}\}\}$. Для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash n$ определим паросочетание $\mathbf{b}_\lambda$ так, чтобы $\Lambda(\mathbf{g}_n, \mathbf{b}_\lambda) = \lambda$ и чтобы при обходе циклов графа $\mathbf{g}_n \cup \mathbf{b}_\lambda$ вершины $1, \hat{1}, \ldots, n, \hat{n}$ следовали подряд. Для $\lambda, \mu, \nu \vdash n$ обозначим $\mathcal{G}^\lambda_{\mu\nu} = \{\delta \in \mathcal{F} \mid \Lambda(\mathbf{b}_\lambda, \delta) = \mu, \Lambda(\mathbf{g}_n, \delta) = \nu\}$. Паросочетание, все ребра которого имеют вид $\{i, \hat{j}\}$, называется двудольным. В [2] доказано, что $a^\lambda_{\mu\nu}(2) = |\mathcal{G}^\lambda_{\mu\nu}|$ и $a^\lambda_{\mu\nu}(1) = |\{\delta \in \mathcal{G}^\lambda_{\mu\nu} \mid \delta \text{ двудольное}\}|$.

Гипотеза 1 ([2], Matchings-Jack conjecture). Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda, \mu, \nu \vdash n$ существует функция $\mathrm{wt}\colon \mathcal{G}^\lambda_{\mu\nu} \to \{0, 1, \ldots, n - \min\{\ell(\mu), \ell(\nu)\}\}$, для которой $a^\lambda_{\mu\nu}(\beta + 1) = \sum_{\delta \in \mathcal{G}^\lambda_{\mu\nu}} \beta^{\mathrm{wt}(\delta)}$, $\mathrm{wt}(\delta) = 0 \iff \delta$ — двудольное. В частности, коэффициенты полиномов $a^\lambda_{\mu\nu}(\beta + 1)$ от β целочисленны и неотрицательны.

В [2] гипотеза 1 доказана для $\lambda = [1^n], [1^{n-2}2]$. Авторы вывели ряд рекуррентных формул для полиномов $a^\lambda_{\mu\nu}(\alpha)$, с помощью которых доказали эту гипотезу в некоторых важных случаях, включая $\mu = \nu = (n)$.

Теорема 1 ([3, 4]). Гипотеза 1 верна для $\mu = (n)$, $\nu = [N, 3^m, 2^l, 1^k]$, где $N = n - 3m - 2l - k > 3$, $l, m \in \{0, 1\}$.

Кроме того, в [4] доказан вариант гипотезы 1 с занумерованными циклами длины 4 и 6 графа $\mathbf{g}_n \cup \delta$ при $\mu = (n)$, $\nu = [N, 3^m, 2^l, 1^k]$ с произвольными l и m.

Мы также рассматриваем обобщённые структурные константы Джека [5]: $a_{\lambda^1, \ldots, \lambda^s}(\alpha) = \sum\limits_{\gamma \vdash n} \dfrac{1}{\langle J^\alpha_\gamma, J^\alpha_\gamma \rangle_\alpha} \prod_i \theta^\gamma_{\lambda^i}(\alpha)$. В случае $\lambda^2 = \ldots = \lambda^s = [1^{n-2}2]$ эти полиномы (обозначим их a^{s-1}_λ) имеют вероятностную интерпретацию в терминах случайных путей в группе S_n от тождественной перестановки к перестановке с цикловым типом λ с помощью последовательного умножения на транспозиции.

Теорема 2 ([5]). Для разбиения $\lambda = [1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \ldots] = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash n$ верна формула:

$$a^{n-p}_\lambda(\alpha) = \frac{(n-p)!}{\alpha^p \prod_{j=1}^p \lambda_j! \prod_i m_i(\lambda)!} \prod_i \lambda_i^{\lambda_i - 2}.$$

В частности, для $\lambda = (n)$ имеем: $a^{n-1}_{(n)} = \dfrac{1}{\alpha} n^{n-3}$.

Последнее равенство обобщает классический результат Дене о количестве способов представить данную перестановку в виде произведения минимального числа транспозиций.

Литература. [1] H. Jack. A class of symmetric polynomials with a parameter, Proc. R. Soc. Edinburgh (A), 1970. [2] I. P. Goulden, D. M. Jackson. Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for Jack symmetric functions. Transactions of the American Mathematical Society, 1996. [3] A. L. Kanunnikov, E. A. Vassilieva. On the Matchings-Jack conjecture for Jack connection coefficients indexed by two single part partitions, Electronic Journal of Combinatorics, 2016. [4] A. L. Kanunnikov, V. V. Promyslov, E. A. Vassilieva. On the matchings-Jack and hypermap-Jack conjectures for labelled matchings and star hypermaps, arxiv, 2017. [5] E. A. Vassilieva. Polynomial properties of Jack connection coefficients and generalization of a result by Dénes, Journal of algebraic combinatorics, 2015.

L'Ecole Polytechnique

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: vassilieva_ekaterina@yahoo.fr

e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

e-mail: valentin.promyslov@gmail.com

Т. И. Васильева (Гомель, Беларусь)

О некоторых свойствах $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов конечных групп

Рассматриваются только конечные группы. В [1] В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной было предложено одно обобщение понятия $\mathfrak{F}$-проектора и получено развитие результатов Гашюца [2], Шунка [3], Эриксона [4] о $\mathfrak{F}$-проекторах в группах.

Через ω обозначается некоторое непустое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, содержащийся в классе групп $\mathfrak{X}$. Согласно [1] подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$*-проектором* в G, если HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G/N для любой нормальной ω-подгруппы N из G; $\mathfrak{F}$ называется ωP*-гомоморфом* в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ — гомоморф такой, что $\mathfrak{X}$-группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ всякий раз, как $G/\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M из G. Под ω*-насыщенным в* $\mathfrak{X}$ [1, 5] понимается класс групп $\mathfrak{F}$, для которого из $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой $G \in \mathfrak{X}$, $N \trianglelefteq G$ и $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

В настоящем сообщении получены новые свойства $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов групп.

Обозначим через $\mathcal{N}^\omega(G)$ множество всех нормальных ω-подгрупп группы G. Если N_1 и N_2 принадлежат $\mathcal{N}^\omega(G)$, то $N_1 \cap N_2$ и $\langle N_1, N_2\rangle = N_1N_2$ являются нормальными ω-подгруппами из G. Поэтому $\mathcal{N}^\omega(G)$ образует подрешетку решетки всех нормальных подгрупп группы G.

Определение 1. Пусть H — подгруппа группы G.

(1) Определим отображение $\rho^\omega(G,H)$ из $\mathcal{N}^\omega(G)$ в $\mathcal{N}^\omega(H)$ следующим образом:
$$\rho^\omega(G,H)N = N \cap H$$
для любой $N \in \mathcal{N}^\omega(G)$.

(2) Отображение $\rho^\omega = \rho^\omega(G,H)$ есть *решеточный гомоморфизм* $\mathcal{N}^\omega(G)$ в $\mathcal{N}^\omega(H)$, если
$$\rho^\omega(N_1 \cap N_2) = \rho^\omega(N_1) \cap \rho^\omega(N_2) \text{ и } \rho^\omega(N_1N_2) = \rho^\omega(N_1)\rho^\omega(N_2)$$
для любых $N_1, N_2 \in \mathcal{N}^\omega(G)$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — гомоморфы, причем $\emptyset \neq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Определим класс $\rho^\omega(\mathfrak{X},\mathfrak{F})$ следующим образом:

$\rho^\omega(\mathfrak{X},\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{X} \mid \rho^\omega(G,H)$ является решеточным гомоморфизмом $\mathcal{N}^\omega(G)$ в $\mathcal{N}^\omega(H)$ для всякого $\mathfrak{F}^\omega$-проектора H группы $G)$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная формация, $\mathfrak{F}$ — ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$. Тогда и только тогда $\rho^\omega(\mathfrak{X},\mathfrak{F}) = \mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенный класс такой, что из $G/N_i \in \mathfrak{F}$ для любых нормальных ω-подгрупп N_i группы G, $i = 1, 2$, всегда следует $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отметим, если ω — множество всех простых чисел, то понятие $\mathfrak{F}^\omega$-проектора совпадает с понятием $\mathfrak{F}$-проектора, а ωP-гомоморф является классом Шунка. В этом случае вместо $\rho^\omega(\mathfrak{X},\mathfrak{F})$ будем использовать обозначение $\rho(\mathfrak{X},\mathfrak{F})$.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная формация, $\mathfrak{F}$ — класс Шунка в $\mathfrak{X}$. Тогда и только тогда $\rho(\mathfrak{X},\mathfrak{F}) = \mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация в $\mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп и ω — множество всех простых чисел, то из теоремы 1 получается

Следствие 2. [6, IV.5.3] Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Шунка в $\mathfrak{S}$. Тогда и только тогда $\rho(\mathfrak{S},\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}$, когда $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация в $\mathfrak{S}$.

В случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех групп и ω совпадает с множеством всех простых чисел, теорема 1 является развитием соответствующих результатов из [7].

Литература. [1] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп. Сиб. мат. журн., 57:6 (2016), 1224–1239. [2] W. Gaschütz, Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. Math. Z., 80:4 (1963), 300–305. [3] H. Schunck, $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen. Math. Z., 97:4 (1967), 326–330. [4] R. Erickson, Projectors of finite groups. Commun. Algebra, 10:18 (1982), 1919–1938. [5] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. Мат. труды, 2:2 (1999), 114–147. [6] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. [7] P. Förster, Subnormal subgroups and formation projectors. J. Austral. Math. Soc. (Series A), 42 (1987), 31–47.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Белорусский государственный университет транспорта

e-mail: tivasilyeva@mail.ru

С. В. Вершина (Москва)

Взаимосвязь структуры p–локальной группы и её минимального кольца расщепления

Абелева группа без кручения называется p–локальной, если она является модулем над кольцом дискретного нормирования $\mathbb{Z}_p$ — локализации кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно простого числа p. Кольцо R называется кольцом расщепления для группы A, если $R \otimes A$ является прямой суммой свободного и делимого R–модулей. В [1] поставлен вопрос: при каких условиях p–локальная группа без кручения определяется с точностью до изоморфизма совокупностью колец расщепления.Естественным ограничением на рассматриваемый класс p–локальных групп без кручения является редуцированность и неразложимость группы. С учетом результатов работы [2], имеет место

Теорема. Пусть поле частных кольца расщепления рассматриваемых групп имеет степень 2 или 3 над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда две редуцированные неразложимые p–локальные группы без кручения с изоморфными кольцами расщепления изоморфны в том и только в том случае, если они имеют равные ранги и p–ранг 1.

Литература. [1] Glaz S., Vinsonhaler C., Wickless W. Splitting rings for p–local torsion–free groups // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. 1995. vol. 171. pp. 223–241. [2] Vershina S. V. Indecomposable p–local torsion-free groups with quadratic and cubic splitting fields // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Volume 230 (3). pp. 364–371.

Московский Педагогический Государственный Университет

e-mail: svetlanavershina@gmail.com

Е. М. Вечтомов, **А. А. Петров** (Киров)

Идеалы и конгруэнции прямого произведения двух полуколец[1]

Данная работа навеяна вопросом о строении подгрупп прямого произведения двух групп, рассматриваемом в фундаментальном труде Александра Геннадьевича Куроша «Теория групп» [1, с. 104]. Мы исследуем условия, при которых идеалы и конгруэнции прямого произведения двух полуколец являются прямыми произведениями своих компонент.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S; +, \cdot\rangle$ с ассоциа-тивно-коммутативным сложением $(+)$ и ассоциативным умножением $(\cdot)$, которое дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. *Полутелом* называется полукольцо, мультипликативная полугруппа которого является группой.

Пусть S_1 и S_2 — полукольца, J и ρ – соответственно идеал и конгруэнция прямого произведения $S_1 \times S_2$ этих полуколец. Идеал

$$J_1 = \{s_1 \in S_1 : \exists s_2 \in S_2 (s_1, s_2) \in J\}$$

полукольца S_1 называется *компонентой идеала* J в S_1, а конгруэнцию

$$\rho_1 : \forall s_1, t_1 \in S_1 (s_1 \rho_1 t_1 \Leftrightarrow \exists s_2, t_2 \in S_2 (s_1, s_2) \rho (t_1, t_2))$$

на полукольце S_1 назовем *компонентой конгруэнции* ρ на S_1. Аналогично определяются компоненты J_2 и ρ_2 для сомножителя S_2. Ясно, что $J \subseteq J_1 \times J_2$ и $\rho \subseteq \rho_1 \times \rho_2$.

Скажем, что пара полуколец S_1 и S_2 обладает Id–*свойством* (Con–*свойством*), если $J = J_1 \times J_2$ ($\rho = \rho_1 \times \rho_2$) для любого идеала J (для любой конгруэнции ρ) полукольца $S_1 \times S_2$. При этом решетка $\mathrm{Id}(S_1 \times S_2)$ всех идеалов полукольца $S_1 \times S_2$ будет канонически изоморфна прямому произведению решеток идеалов сомножителей: $\mathrm{Id}(S_1 \times S_2) \cong \mathrm{Id}\ S_1 \times \mathrm{Id}\ S_2$. Аналогичное утверждение верно и для решеток конгруэнций полуколец: $\mathrm{Con}(S_1 \times S_2) \cong \mathrm{Con}\ S_1 \times \mathrm{Con}\ S_2$ для пары полуколец с Con–свойством.

Будем говорить, что некоторый класс полуколец обладает Id–*свойством* или Con–*свойством*, если каждая пара полуколец этого класса обладает соответствующим свойством. Заметим, что Id–свойство и Con–свойство имеют многообразия дистрибутивных решеток и булевых колец, класс полуколец с нулем и единицей,

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект №1.5879.2017/8.9

класс полутел. Но класс всех ассоциативных колец не обладает Id–свойством.

Рассмотрим многообразие $\mathfrak{M}$ всевозможных полуколец, порожденное двухэлементными коммутативными полукольцами с идемпотентным умножением ($x^2 = x$); оно имеет 16 подмногообразий [2; 3, параграф 6.2]. Отметим, что многообразие $\mathfrak{M}$ определяется в классе всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец тождеством $x + 2xy + yz = x + 2xz + yz$ [3, следствие 6.2.2].

Теорема. Для любого нетривиального подмногообразия $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{M}$ равносильны следующие утверждения:

1) $\mathfrak{K}$ обладает Id–свойством;

2) $\mathfrak{K}$ обладает Con–свойством;

3) $\mathfrak{K}$ – либо многообразие дистрибутивных решеток, либо многообразие булевых колец, либо удовлетворяет тождеству $x + 2xy = x$.

Заметим, что многообразие коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x + 2xy = x$ служит точной верхней гранью многообразия дистрибутивных решеток и многообразия булевых колец в решетке всех многообразий полуколец [3, предложение 6.3.2].

Задача. Описать все многообразия полуколец с идемпотентным умножением, обладающих Id–свойством и/или Con–свойством.

Литература. [1] А. Г. Курош. Теория групп. М.: Наука, 1967. [2] Е. М. Вечтомов, А. А. Петров, Мультипликативно идемпотентные полукольца. Фундаментальная и прикладная математика, 4 (2013), 41–70. [3] Е. М. Вечтомов, А. А. Петров. Полукольца с идемпотентным умножением. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015.

Вятский государственный университет
Vyatka State University

e-mail: vecht@mail.ru, apetrov43@mail.ru

В. К. Вильданов, **О. В. Любимцев** (Ннжний Новгород), **Д. С. Чистяков** (Москва)

Определяемость смешанных абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов

Говорят, что группа A, принадлежащая классу Λ абелевых групп, определяется своим кольцом $E(A)$ (своей полугруппой $E^\star(A)$) эндоморфизмов в этом классе, если из $E(A) \cong E(B)$ ($E^\star(A) \cong E^\star(B)$) для $B \in \Lambda$, следует $A \cong B$.

Известно, что конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп [1]. В работе [2] показано, что периодические группы определяются своей полугруппой эндоморфизмов в классе периодических групп. В настоящей работе вопрос определяемости группы своей полугруппой эндоморфизмов рассматривается в классе факторно делимых абелевых групп.

Через $QD_{cd}(E^{\star})$ обозначим подкласс класса QD_{cd} вполне разложимых факторно делимых абелевых групп, определяющихся своей полугруппой эндоморфизмов в классе QD_{cd}.

Лемма 1. Пусть $A \in QD_{cd}$. Если $B \in QD_{cd}$ и $E^{\star}(A) \cong E^{\star}(B)$, то $r(A) = r(B)$ и $t(A) \cong t(B)$.

Для факторно делимой группы A ранга 1 кохарактеристики $\chi(A) = (m_p)$ введем обозначения: $P_0(A) = \{p \in P | m_p = 0\}$, $P_{\infty}(A) = \{p \in P | m_p = \infty\}$

Теорема 1. Пусть $A \in QD_{cd}$, $r(A) = 1$. Тогда $A \in QD_{cd}(E^{\star})$ если, и только если, $P_0(A) = \emptyset$ или $P_{\infty}(A) = \emptyset$.

Литература. [1] Пуусемп П. *Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп*, Изв. АН Эстонской ССР. Физ. Матем. **29** (3), 241 – 245 (1980) [2] Пуусемп П. *Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп*, Изв. АН Эстонской ССР. Физ. Матем. **29** (3), 246 – 253 (1980)

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

e-mail: kadirovi4@gmail.com

Н. Н. Воробьев, **А. Р. Филимонова** (Витебск, Беларусь)

О модулярных решетках частично композиционных классов Фиттинга

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–4].

Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \backslash \omega$. Через $\pi(G)$ обозначают множество всех различных простых делителей порядка группы G. Символом $\mathfrak{G}_{\omega}$ обозначают класс всех ω-групп и полагают, что $1 \in \mathfrak{G}_{\omega}$.

Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, где (1) — класс всех единичных групп, символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$, а символ $G_{\mathfrak{F}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. В дальнейшем будем полагать, что $O^{\omega}(G) = G^{\mathfrak{G}_{\omega}}$, $C_p(G) = G^{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{G}_{cp}$ — класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}. \qquad (1)$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$CR_{\omega}(f) = (G \mid O^{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } C_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))),$$

где $\mathrm{Com}(G)$ — класс всех абелевых простых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы G.

Если класс Фиттинга таков, что $\mathfrak{F} = CR_{\omega}(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называют ω-композиционным классом Фиттинга с ω-композиционной H-функцией f (см. [4]).

Относительно включения $\subseteq$ множество всех ω-композиционных классов Фиттинга c_{ω} является полной решеткой.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех ω-композиционных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $f = \bigcap\limits_{i \in I} f_i$ является ω-композиционной H-функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, называемой *минимальной* [4].

Символ $c_{\omega}\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначает наименьший ω-композиционный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп. В частности, $\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ — наименьший класс Фиттинга, содержащий совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Символом $\vee(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую ω-композиционную H-функцию f, что

$$f(a) = \mathrm{fit}\left(\bigcup_{i \in I}\Big(f_i(a)\Big)\right) \text{ для всех } a \in \omega \cup \{\omega'\}.$$

Для произвольной совокупности ω-композиционных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee^{\omega_c}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_{\omega}\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i\right).$$

Символом $\mathrm{Supp}(f)$ обозначается носитель композиционной H-функции f и $\mathrm{Supp}(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\} \mid f(a) \neq \varnothing\}$.

Основной результат представляет следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ — классы Фиттинга с минимальными ω-композиционными H-функциями x, y, f соответственно. Если ω-композиционные H-функции таковы, что $x \leq f$ и $x(a) \vee y(a) = \mathrm{s}_n\{G \mid G = G_{x(a)}G_{y(a)}\}$ для всех $a \in \mathrm{Supp}(x) \cap \mathrm{Supp}(y)$, то $(\mathfrak{X} \vee^{\omega_c} \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee^{\omega_c} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})$.

Литература. [1] А. Н. Скиба. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997. [2] Н. Н. Воробьев. Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. [3] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. Математические труды, 2 (2) (1999), 114–147. [4] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. Дискретная математика, 13 (3) (2001), 125–144.

Витебский государственный университет имени П.М.Машерова

e-mail: vornic2001@mail.ru, anyafilim@gmail.com

Н. Т. Воробьев, **Т. Б. Василевич** (Витебск, Беларусь)

О главных факторах, покрываемых инъекторами частично π-разрешимой группы

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны. В определениях и обозначениях следуем [1, 2]. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$. Напомним, что *секцией* группы G называется факторгруппа ее некоторой подгруппы. Подгруппа V *покрывает* (*изолирует*) секцию H/K, если $H \subseteq VK$ (соответственно $V \cap H \subseteq K$) [3, с. 249].

В теории классов Фиттинга известен результат Хартли [4, лемма 1(4)] о том, что $\mathfrak{F}$-инъектор V разрешимой группы G либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ любая группа G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то подгруппа V группы G называется:

(1) *$\mathfrak{F}$-максимальной*, если $V \in \mathfrak{F}$ и $U = V$ при условии, что $V \leqslant U \leqslant G$ и $U \in \mathfrak{F}$;

(2) *$\mathfrak{F}$-инъектором*, если $V \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой K для всякой субнормальной подгруппы K группы G.

Заметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ — класс Фиттинга всех p-групп, то $\mathfrak{F}$-инъекторы группы G — это, в точности, силовские p-подгруппы G; если $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi$, где $\mathfrak{E}_\pi$ — класс всех π-групп, при этом G имеет холлову π-подгруппу, то $\mathfrak{F}$-инъекторы G — холловы π-подгруппы G (см. [5, с. 68, пример 1]).

Хартли в [4], была сформулирована проблема описания главных факторов разрешимой группы, покрываемых ее $\mathfrak{F}$-инъекторами. Ее решение было получено для локальных классов Фиттинга вида $\bigcap_p h(p)\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p$, где h — некоторое отображение множества всех простых чисел во множество классов Фиттинга.

Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют *множеством Фиттинга группы* G, если $\mathcal{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Понятие *$\mathcal{F}$-инъектора* группы для ее множества Фиттинга $\mathcal{F}$ определяется аналогично, как и понятие $\mathfrak{F}$-инъектора для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Произведением множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ [6] называют множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$, которое обозначают $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. В работе [6] установлено, что $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называют *π-насыщенным*, если $\mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathfrak{E}_{\pi'}$, где $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — класс всех π'-групп.

Отображение f: $\mathbb{P} \to \{$*множества Фиттинга группы* $G\}$ называют *функцией Хартли* (или кратко *H-функцией*) группы G.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называется *π-локальным* [6, определение 1.3], если $\mathcal{F} = \bigcap_{p\in\pi} f(p) \circ \mathfrak{E}_{p'}$ для некоторой H-функции f группы G такой, что $f(p) \circ \mathfrak{N}_p = f(p)$ для всех $p \in \pi$.

При этом, H-функция f множества $\mathcal{F}$ группы G называется:

1) *приведенной*, если $f(p) \subseteq \mathcal{F}$ для всех $p \in \pi$;

2) *полной*, $f(p) = f(p) \circ \mathfrak{N}_p$ для каждого $p \in \pi$;

3) *полной приведенной*, если f является одновременно полной и приведенной;

4) *постоянной*, если $f(p) = f(q)$ для всех различных $p, q \in \pi$.

Обозначим через $\mathfrak{S}^\pi$ — класс всех π-разрешимых групп.

Теорема. Пусть $\mathcal{F}$ — π-насыщенное множество Фиттинга группы G, определяемое постоянной H-функцией f. Если $G \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{S}^\pi$, то $\mathcal{F}$-инъектор G покрывает все такие p-главные факторы ($p \in \pi$), которые покрывает ее $f(p)$-радикал.

Работа первого автора выполнена в рамках государственной программы научных исследований "Конвергенция-2020" Республики

Беларусь. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант №Ф17М-064).

Литература. [1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter De Gruyter, 1992. [2] W. Guo, N. T. Vorob'ev, On the theory of $\mathfrak{F}$-centrality of chief factors and $\mathfrak{F}$-hupercentre for Fitting classes. J. Algebra. 344 (2011), 386–396. [3] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. [4] B. Hartley, On Fisher's dualization of formation theory. Proc. London Math. Soc. 3(2) (1969), 193–207. [5] W. Guo. Theory of Classes of Groups. Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. [6] N. Yang, W Guo, N. T. Vorob'ev, On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group. Comm. Algebra. 46 (1) (2018), 217–229.

Витебский государственный университет имени П.М.Машерова

e-mail: vorobyovnt@tut.by, tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

К. А. Вяткина, **А. Н. Панов** (Самара)

Поля U-инвариантов и конструкция U-проектора.

Цель доклада — предложить метод построения специального оператора — U-проектора, который позволяет конструировать системы функций, порождающих поля U-инвариантов.

Пусть K – поле характеристики нуль, $\mathfrak{u}$ — нильпотентная алгебра Ли над K, а $U = \exp \mathfrak{u}$ соответствующая ей унипотентная группа. Обозначим $\mathcal{A}$ коммутативную ассоциативную конечно-порождённую алгебру над K без делителей нуля, а $\mathcal{F}$ — поле частных $\mathcal{A}$. Пусть D - гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{u}$ в алгебру Ли локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$. Тогда группа U действует в A по формуле $g(a) = \exp D_x(a)$, где $g = \exp(x)$.

Определение 1. *U-проектором* называется гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ на поле инвариантов $\mathcal{F}^U$, тождественный на $\mathcal{A}^U$.

Априори U-проектор не является единственным. Приведём один из возможных методов построения U-проектора.

Зафиксируем цепочку идеалов $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_n \supset \mathfrak{u}_{n-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{u}_1 \supset \mathfrak{u}_0 = 0$, где $\operatorname{codim}(\mathfrak{u}_i, \mathfrak{u}_{i+1}) = 1$ и с каждым $\mathfrak{u}_i$ свяжем подалгебру инвариантов $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_i} \subset \mathcal{A}$. Пусть i_1 — наименьший номер, такой что $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}} \subsetneq \mathcal{A}$ и зафиксируем $x_1 \in \mathfrak{u}_{i_1} \setminus \mathfrak{u}_{i_1-1}$.

Существуют элементы $a_{1,1} \in \mathcal{A}, a_{1,0} \in \mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$ такие, что

$$D_{x_1}(a_{1,1}) = a_{1,0}. \qquad (1)$$

Обозначим элемент $Q_1 = a_{1,1} \cdot a_{1,0}^{-1}$ из локализации $\mathcal{A}_1$ алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой $a_{1,0}$, такой что $D_{x_i}(Q_1) = 1$ и свяжем с ним гомоморфизм $S_1 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ вида:

$$S_1(a) = a - D_{x_1}(a)Q_1 + D_{x_1}^2(a)\frac{Q_1^2}{2!} - D_{x_1}^3(a)\frac{Q_1^3}{3!} + \dots$$

Подалгебра $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ инвариантна относительно всех D_x, $x \in \mathfrak{u}$. Отображение S_1 продолжается до гомоморфизма $\mathcal{A}_1$ на $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$, тождественного на $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$. Переходя к следующему наименьшему i_2, такому что $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_2}} \subsetneq \mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ продолжим процесс. В результате получаем цепочку $n \geq i_m > \dots > i_2 > i_1 \geq 1$, наборы элементов $a_{k,0} \in \mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$ и $a_{k,1} \in \mathcal{A}$, удовлетворяющие (1) и отображений $S_1, \dots, S_m$. Обозначим $\mathcal{A}_*$ локализацию алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой $\{a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{m,0}\}$. Рассмотрим отображение

$$P = S_m \circ \dots \circ S_2 \circ S_1.$$

Теорема 1. [4] Отображение P является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}_*^{\mathfrak{u}}$ тождественным на $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$. То есть P является U-проектором.

U-проектор можно использовать для нахождения набора функций, свободно порождающих поля U-инвариантов. Рассмотрим U-инвариантное открытое подмножество $X_0 = \{x \in X_0 : a_{k,0}(x) \neq 0,\ 1 \leq k \leq m\}$ и подмножество в нем

$$\mathfrak{S} = \{x \in X_0 :\ a_{k,1}(x) = 0, \quad 1 \leq k \leq m\}.$$

Определеним отображение ограничения $\mathrm{Res} \colon K[X_0] \to K[\mathfrak{S}]$.

Теорема 2. [4] Предположим, что $\{a_{k,1} :\ 1 \leq k \leq m\}$ порождают определяющий идеал для подмножества $\mathfrak{S}$ в алгебре $K[X_0]$. Пусть $b_1, \dots, b_s \in \mathcal{A}$ система элементов такая, что

$$\mathrm{Res}(b_1), \dots, \mathrm{Res}(b_s), \mathrm{Res}(a_{0,0})^{\pm 1}, \dots, \mathrm{Res}(a_{m,0})^{\pm 1}$$

порождают алгебру $K[\mathfrak{S}]$. Тогда $P(b_1), \dots, P(b_s), a_{0,0}^{\pm 1}, \dots, a_{m,0}^{\pm 1}$ порождают алгебру инвариантов $K[X_0]^U$. В частности, $P(b_1), \dots, P(b_s), a_{0,0}^{\pm 1}, \dots, a_{m,0}^{\pm 1}$ порождают поле инвариантов $K(X)^U$.

Относительно других методов построения образующих [2,3].

Литература. [1] D. I. Panyushev D.I. Complexity and rank of actions in invariant theory, Jounal of Mathematical Sciences, Vol. 95, No. 1 (1999)

[2] К. А. Вяткина,А. Н. Панов Поле U-инвариантов присоединенного представления группы $GL(n, K)$, Математические заметки, .Т 93, № 1 (2013) 144-147. [3] К. А. Вяткина, U-проектор для присоединённого представления группы $GL(n, K)$, Вестник СамГУ, Т 132 № 10 (2015),9-23. [4] К. А. Вяткина,А. Н. Панов U-проекторы и поля U-инвариантов, Фундаментальная и прикладная математика Т 21, № 2 (2016), 133-144.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

e-mail: vjatkina.k@gmail.com

А. М. Гальмак (МГУП, Могилёв, Беларусь)

О тотальной неассоциативности полиадических операций

Напомним, что n-арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют *ассоциативной*, если в нем для любого $i = 2, ..., n$ выполняется тождество

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1}) = \eta(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i...\mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n}...\mathbf{x}_{2n-1}).$$

Следствиями указанных тождеств, являются следующие тождества

$$\begin{aligned} &\eta(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i...\mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n}...\mathbf{x}_{2n-1}) = \\ &= \eta(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_{j-1}\eta(\mathbf{x}_j...\mathbf{x}_{j+n-1})\mathbf{x}_{j+n}...\mathbf{x}_{2n-1}), \end{aligned} \tag{1}$$

где $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Если тождества (1) не выполняются для любых $i \neq j$, где $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, то n-арную операцию η будем называть *тотально неассоциативной. Тотально неассоциативным* в этом случае называется и n-арный группоид $< A, \eta >$.

В работе [1] Э. Пост определил и изучал две полиадические операции. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы всех подстановок конечного множества. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

Конструкция, которую Э. Пост использовал при построении своих операций, допускает различные обобщения. Одно из таких обобщений может быть осуществлено заменой в конструкции Э. Поста конкретных – симметрической и полной линейной групп, произвольной группой и даже произвольным группоидом. Обобщением такого рода является l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая определяется для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, ..., k\}$ на

k-ой декартовой степени A^k группоида A. Изучению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ посвящена книга [2].

Обе отмеченные выше операции Э. Поста и почти все их обобщения характеризуются тем, что в определении каждой из них присутствует бинарная операция. В связи с этим возникла необходимость определения и изучения обобщений, в которых бинарная операция заменяется полиадической операцией арности больше двух. К числу таких обобщений относится полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$, которая была определена в [3] следующим образом.

Определение [3]. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, ..., x_{1k}) ... (x_{n1}, ..., x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} ... x_{n\sigma^{n-1}(1)}), ..., \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} ... x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, ..., x_{1k}) ... (x_{l1}, ..., x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n ... \mathbf{x}_{2(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}$$
$$(... \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} ... \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} ... \mathbf{x}_{s(n-1)+1}))...))).$$

Если η – бинарная операция, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$, при этом $l = s+1$.

В [3] доказано, что если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной. В связи с этим результатом возникает естественная задача нахождения достаточных условий неассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$. Особый интерес представляет задача нахождения достаточных условий тотальной неассоциативности l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Теорема 1. Пусть n-арная группа $< A, \eta >$ содержит более одного элемента, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда универсальная алгебра $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является n-арной квазигруппой, в которой для любых $i, j \in \{1, 2, ..., l\}$, $i \neq j$ не выполняются тождества

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_i ... \mathbf{x}_{l+i-1})\mathbf{x}_{l+i} ... \mathbf{x}_{2l-1}) =$$
$$= \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_j ... \mathbf{x}_{l+j-1})\mathbf{x}_{l+j} ... \mathbf{x}_{2l-1}), \tag{2}$$

то есть $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – тотально неассоциативная l-арная квазигруппа.

Следствие [4]. Пусть группа A содержит более одного элемента, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, ..., l\}$, $i \neq j$ не выполняются тождества

$$[\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_{j-1} [\mathbf{x}_j ... \mathbf{x}_{l+j-1}]_{l,\sigma,k} \mathbf{x}_{l+j} ... \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} =$$

$$= [\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_{i-1} [\mathbf{x}_i ... \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l,\sigma,k} \mathbf{x}_{l+i} ... \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k},$$

то есть $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – тотально неассоциативная l-арная квазигруппа.

В теореме 1 можно отказаться от однозначной разрешимости соответствующих уравнений в n-арном группоиде $< A, \eta >$, потребовав наличия в нем единицы.

Теорема 2. Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, ..., l\}$, $i \neq j$ не выполняются тождества (2), то есть l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной.

Заметим, что для n-арной полугруппы $< A, \eta >$, не обладающей единицей, l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k} >$ может быть тотально неассоциативной. Подтверждением сказанному может служить теорема 1, так как существуют n-арные группы без единиц.

В связи с теоремой 2 возникает вопрос: *останется ли ее утверждение верным, если в ее условии единицу заменить идемпотентом?*

Ответ на поставленный вопрос является отрицательным.

Литература. [1] E. L. Post. Polyadic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 2 (1940), 208–350. [2] А. М. Гальмак, Многоместные операции на декартовых степенях. Минск: Изд. центр БГУ, 2009. [3] А. М. Гальмак, С. А. Русаков, О полиадических операциях на декартовых степенях. Известия ГГУ им. Ф. Скорины, 3 (2014), 35–40. [4] А. М. Гальмак, О тождествах ассоциативности полиадической операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. Веснiк МДУ iм. А. А. Куляшова, 2 (2017), 4–12.

Могилевский государственный университет продовольствия

e-mail: halm54@mail.ru

А. Г. Гейн (Екатеринбург)

Абелевы абсолютно модулярные подалгебры лиевых алгебр

Изучая свойства нормальных подгрупп, А.Г. Курош, О. Оре и Г. Цассенхауз обратили внимание, что эти свойства во многом обусловлены их расположением в решётке подгрупп. В связи с этим А.Г. Курош ввел понятие дедекндова элемента решетки; в более поздних работах эти элементы стали называть модулярными.

Определение 1. Элемент M решётки L называется модулярным, если для любых элементов A и B из L выполнены соотношения

$(A \vee M) \cap B = (A \cap B) \vee M$ при $M \subseteq B$

и

$(A \vee M) \cap B = A \vee (M \cap B)$ при $A \subseteq B$.

Вполне очевидно, что модулярными элементами решётки подгрупп (подалгебр ассоциативных или лиевых алегбр) являются не только нормальные подгруппы (идеалы), но и квазинормальные подгруппы (квазиидеалы). Обратное неверно. Для алгебр Ли ярким примером этого является трехмерная простая нерасщепляемая алгебра, решётка подалгебр которой модулярна. Отметим ещё одну особенность нормальных подгрупп (идеалов): пересечение нормальных подгрупп (идеалов) является нормальной подгруппой (идеалом), в то время как пересечение модулярных элементов и даже квазинормальных подгрупп (квазиидеалов) уже может не быть модулярным элементом. Поэтому естественно рассматривать следующее свойство элементов решётки.

Определение 2. Модулярный элемент M решётки L называется абсолютно модулярным, если $A \cap M$ является модулярным элементом L для любого модулярного элемент A из L.

Теорема. Пусть M — абелева подалгебра алгебры Ли L над полем, характеристика которого отлична от 2 и 3. Если L отлична от трехмерной простой нерасщепляемой алгебры, то подалгебра M является квазиидеалом тогда и только тогда, когда M — абсолютно модулярный элемент решётки подалгебр алгебры L.

Ограничения на характеристику поля существенны.

Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Ural Federal University

e-mail: a.g.geyn@urfu.ru

А. И. Генералов, **И. М. Зильберборд** (Санкт–Петербург)

Обобщённая теорема о согласованных разложениях для полуцепных нётеровых слева колец

Теорема о согласованных базисах была впервые распространена на бесконечно порождённые свободные абелевы группы в работе Коэна и Глюка [1]. Хилл и Меджиббен [2] сформулировали и доказали обобщенную теорему о согласованных базисах (согласованных разложениях) для абелевых групп, а Генералов и Желудев [3,4] — для дедекиндовых колец.

Мы распространили обобщённую теорему о согласованных разложениях на левые модули над полуцепными нётеровыми слева кольцами, а именно, нами доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть R — полуцепное нётерово слева кольцо, $J = \mathrm{Rad}(R)$ – радикал Джекобсона кольца R, и в категории левых R-модулей дана коммутативная диаграмма с точными строками, в которой модули G и G' проективны, а Φ — изоморфизм:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Тогда следующие условия равносильны:

(1) существуют изоморфизмы $\alpha : H \to H'$, $\beta : G \to G'$, дополняющие данную диаграмму до коммутативной;

(2) $(H + JG)/JG \simeq (H' + JG')/JG'$.

Литература. [1] J. M. Cohen, H. Gluck, *Stacked bases for modules over principal ideal domains*, Journal of Algebra, 14, 493-505 (1970). [2] P. Hill, C. Megibben, *Generalizations of the stacked bases theorem*, Trans.Amer.Math.Soc., 312 (1989), No 1, 377-402. [3] А. И. Генералов, М. В. Желудев, *Теорема о согласованных базисах в модулях над дедекиндовыми кольцами*, Алгебра и анализ, 1995, т.7, выпуск 4, 157-175. [4] А. И. Генералов, М. В. Желудев, *Согласованные разложения модулей над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами*, Алгебра и анализ, 1997, т.9, выпуск 4, 47-62.

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: i.zilberbord@mail.spbu.ru

С. Т. Главацкий, **А. В. Михалёв** (Москва, Россия)

Радикалы топологических колец

Обзор последних достижений в теории радикалов топологических колец.

М. В. Грехов (Самара)

Модель Нерона анизотропных алгебраических торов малых размерностей над глобальными полями

Пусть T — алгебраический тор, определённый над полем k арифметического типа, а L — некоторое его поле разложения. Целой моделью алгебраического тора T называется схема X, определённая над кольцом $\mathcal{O}_k$ целых элементов поля k, такая, что $X \times \operatorname{Spec} k \cong T$. Особый интерес представляют целые модели, обладающие какими-либо дополнительными свойствами.

Одной из наиболее известных целых моделей является модель Нерона, которая для алгебраических торов является групповой схемой и по определению всегда гладкая, но может не существовать или не иметь конечного типа. Моделью Нерона тора T называется такая гладкая целая модель X, которая удовлетворяет свойству отображения Нерона: для любой гладкой $\mathcal{O}_k$-схемы Y любой k-морфизм $u_k\colon Y \otimes_{\mathcal{O}_k} k \to X \otimes_{\mathcal{O}_k} k$ единственным образом продолжается до $\mathcal{O}_k$-морфизма $u\colon Y \to X$ (более подробно модель Нерона и её свойства описываются в [1]).

Использование модели Нерона затрудняет тот факт, что её определение неконструктивно. В [1] был описан абстрактный алгоритм построения модели Нерона, дающий результат за конечное число шагов, однако его аффинная реализация в общем случае неизвестна. Для случая, когда поле k локальное, явное описание аффинной реализации алгоритма было получено в работах [2], [3]. При этом в качестве начального шага алгоритма использовалась ещё одна классическая целая модель алгебраического тора — модель Воскресенского, которая определяется конструктивно, при этом для произвольного алгебраического тора существует и имеет конечный тип, хотя, вообще говоря, может не быть гладкой.

Модель Воскресенского определяется следующим образом. Пусть ω_j, $j = 1, \ldots, n$ — целый базис L над k. Тогда известно, что $L[\hat{T}] = B\omega_1 \oplus B\omega_2 \oplus \ldots \oplus B\omega_n$, где $L[\hat{T}]$ — групповое кольцо T, $B = L[\hat{T}]^G$ – координатное кольцо T. В частности, базисные характеры $\hat{T}$ будут иметь разложение вида $\chi_i = \omega_1 x_{i1} + \omega_2 x_{i2} + \ldots + \omega_n x_{in}$, а обратные им ${\chi_i}^{-1} = \omega_1 y_{i1} + \omega_2 y_{i2} + \ldots + \omega_n y_{in}$, где $i = 1, \ldots, d$,

$d = \dim T$. Причём B как алгебра Хопфа порождена элементами $x_{ij}, y_{lm},\ \ i, l = 1,...,d,\ \ j, m = 1,...,n$. Моделью Воскресенского тора T называется рассматриваемый как $\mathcal{O}_k$-схема спектр кольца $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{lm}]$. Более подробно о модели Воскресенского и её свойствах рассказывается в [3], [4].

Если k — глобальное поле характеристики 0, аффинная реализация алгоритма построения модели Нерона неизвестна. Однако известно (см. [1]), что выполнение определения модели Нерона для модели X тора T равносильно его выполнению для всех её локальных слоёв $X \times \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}$, рассматриваемых как целые модели торов $T_\wp = T \times \mathrm{Spec}\ k_\wp$ (здесь $\wp \subset \mathcal{O}_k$ — простой идеал, $k_\wp$ — пополнение k по $\wp$-адическому показателю). Тогда X можно получить, взяв такую модель $X^{'}$ тора T, что для её слоёв $X^{'} \times \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}$ известна реализация модели Нерона, и применив к ней все преобразования, требующиеся для построения моделей Нерона её локальных слоёв.

В качестве аналога модели Воскресенского для случая глобального поля можно рассматривать стандартную целую модель, впервые описанную в статье [5] и определяемую следующим образом. Пусть основное поле k алгебраического тора T является полем алгебраических чисел. Тогда стандартной целой моделью тора T называется $\mathcal{O}_k$-схема вида $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где $x_{ij}, y_{ij} \in k[T]$ — координаты при разложении базисных характеров модуля $\hat{T}$ и обратных им по целому базису L/k. Как было доказано нами в работе [6], стандартную целую модель тора T можно использовать в качестве $X^{'}$ из рассуждений выше.

Ранее в работе [7] нами было получено описание моделей Нерона всех двумерных анизотропных алгебраических торов над локальными полями. В силу рассуждений выше это позволяет построить в явном виде модели Нерона и для всех двумерных анизотропных алгебраических торов над глобальными полями, в частности, над полями алгебраических чисел.

Далее естественно перейти к трёхмерным алгебраическим торам. Их классификация известна (см. [8], [9]). Мы разобрали случай алгебраических торов с максимальными группами разложения и получили описание их моделей Нерона.

Литература. [1] Bosch S., Lütkebohmert W., Raynaud M. Néron Models. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990. [2] Ching-Li Ch., Jiu-Kang Yu. Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor. National Center for Theoretical Science, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1999. [3] Popov S.Yu. Standard Integral Models of Algebraic Tori. // Preprintreihe des SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik. 2003. [4] Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп. М.: МЦНМО, 2009. [5] Воскресенский В.Е., Кунявский Б.Э., Мороз Б.З. О целых моделях алгебраических торов. // Алгебра и анализ, том 14, выпуск 1, 2002. С. 46-70. [6] Грехов М.В. Целые модели алгебраических торов над полями алгебраических чисел. // Записки научных семинаров ПОМИ, т. 430, СПб., 2014. С. 114-135. [7] Грехов М.В. Модель Нерона двумерных анизотропных алгебраических торов над локальными полями. // Вестник СамГУ, естественнонаучная серия, № 9 (100), Самара, 2012. С. 31-40. [8] Tahara K. On the finite subgroups of GL(3,$\mathbb{Z}$). //Nagoya Math. J. 1971. V. 41. P. 169-209. [9] Кунявский Б.Э. Бирациональная классификация трехмерных алгебраических торов. // Куйбышевский ГУ, Куйбышев: 1981 (рукопись депонирована в ВИНИТИ).

Самарский университет

e-mail: m.grekhov@yandex.ru

Д. В. Грицук (Брест), **А. А. Трофимук** (Гомель)

Производная p-длина p-разрешимой группы с ограниченными порядками кофакторов p-подгрупп

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1, 2]. Пусть n и m — натуральные числа. Говорят, что число n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. В частности, при $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ — от кубов.

В.С. Монахов [3] установил зависимость инвариантов разрешимой группы от порядков её силовских подгрупп: *если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает* $3+n$. В частности, если порядки силовских подгрупп разрешимой группы G свободны от квадратов, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Очевидно, что если порядок примарной группы свободен от квадратов, то группа является циклической. Из теоремы Цассенхауза ([2], теорема IV.2.11) следует, что коммутант группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. Поэтому производная длина группы, у которой порядки силовских подгрупп свободны от квадратов, не превышает 2.

В.С. Монаховым в 2006 году [4] было предложено понятие производной p-длины ($l_p^a(G)$) p-разрешимой группы G, как наименьшее число абелевых p-факторов среди всех субнормальных (p', p)-рядов группы G. Очевидно, что если силовская p-подгруппа является абелевой, то значение $l_p^a(G)$ совпадает со значением p-длины группы G, а у p-группы производная p-длина совпадает с производной длиной. В работе [5] изучены свойства производной p-длины p-разрешимой группы.

Напомним, что кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа $H/\mathrm{Core}_G H$, где $\mathrm{Core}_G H$ — ядро подгруппы H в группе G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H. В дальнейшем кофактор подгруппы H в группе G будем обозначать $\mathrm{Cof}_G(H)$. Из следствия 4.2 работы [6] и основной теоремы работы [7] следует описание групп с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов. В частности, производная длина такой группы G не превышает 4, а p-длина не превышает 1 для всех простых p. Строение разрешимых групп с кофакторами примарных подгрупп, свободными от кубов, приведено в [8].

Вполне естественно развить рассмотренные выше результаты, связанные с кофакторами подгрупп, на случай p-разрешимых групп. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G — p-разрешимая группа. Если порядок $\mathrm{Cof}_G(X)$ свободен от n-степеней, где X — произвольная p-подгруппа группы G, то:

1) $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{n^2+n+2}{4}$, если $p \notin \{2,3\}$;

2) $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{n^2+n+4}{4}$, если $p \in \{2,3\}$.

Следствие. Пусть G — p-разрешимая группа. Если порядок $\mathrm{Cof}_G(X)$ свободен от квадратов, где X — произвольная p-подгруппа группы G, то
$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Ф17М-063)

Литература. [1] В. С. Монахов. Введение в теорию конечных групп и их классов, Минск: Вышэйшая школа, 2006. [2] B. Huppert. Endliche Gruppen I, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967. [3] В. С. Монахов, Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп, Алгебра и логика. 43, № 4 (2004), 411–424. [4] В. С. Монахов, Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой, Математические заметки, 80, № 4 (2006), 573–581. [5] Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко, О производной π-длине π-разрешимой группы, Вестник БГУ. Сер. 1, 3

(2012), 90–95. [6] L. Yufeng, X. Yi, Finite groups in which primary subgroups have cyclic cofactors, Bull. Malays. Math. Sci. Soc, 34. №. 2 (2011), 337–344. [7] С. М. Евтухова, В. С. Монахов, Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов, Доклады НАН Беларуси, 49, №2 (2005), 26–29. [8] А. А. Трофимук, Д. Д. Даудов, Конечные разрешимые группы с бициклическими кофакторами примарных подгрупп, НАН Беларуси. Труды Института математики, 24, №1 (2016), 95–99.

Брестский государственый университет имени А.С. Пушкина, Беларусь

Гомельский государственый университет имени Ф.Скорины, Беларусь

e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com, alexander.trofimuk@gmail.com

А. В. Гришин (Москва)

Теория вероятностей на относительно свободных лиево нильпотентных алгебрах

Настоящая заметка продолжает исследования, начатые в [3].

Пусть $V = V_1 \bigoplus \ldots \bigoplus V_i \bigoplus \ldots$ — бесконечная прямая сумма конечномерных векторных пространств, причем $dimV_{i+1} > dimV_i > 0$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$. Любое однородное подпространство в V, имеющее вид $U = U_1 \bigoplus \ldots \bigoplus U_i \bigoplus \ldots$, где $0 \neq U_i \subset V_i$, назовем *градуированным*. Пусть $W = W_1 \bigoplus \ldots \bigoplus W_i \bigoplus \ldots$ — другое градуированное подпространство и $W_i \subset U_i$. Назовем *мерой включения* W *в* U предел (если он существует)

$$\mu(W, U) = \lim_{n\to\infty} \frac{dimW_n}{dimU_n}.$$

Мерой включения фактор-пространства U/W в пространство V назовем разность $\mu(U, V) - \mu(W, V)$. Ясно, что мера включения фактор-пространства может быть равна нулю даже, если это фактор-пространство бесконечномерно.

Пусть $V = M(F)$ — *полилинейная часть* относительно свободной счетнопорожденной ассоциативной алгебры $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ некоторого многообразия над бесконечным полем k характеристики $\neq 2, 3$, т.е. $V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — подпространство в F полилинейных многочленов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Для любого T-пространства U алгебры F обозначим через $M(U)$ его полилинейную часть, т.е. градуированное подпространство $M(U) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_n = U \cap F_n$. Обозначим через $\mu(U, V)$ число $\mu(M(U), M(V))$. Нас будет интересовать мера включения центра в алгебру $F^{(l)}$ при

$l = 3, 4, 5$, где $F^{(l)}$ — относительно свободная алгебра, заданная тождеством $[x_1, \ldots, x_l] = 0$.

Описание центра относительно свободной алгебры или хотя бы частичное его нахождение это всегда весьма интересная и нетривиальная задача. Для алгебры F общих матриц она рассматривалась в [6]–[9]. Для алгебры $F = F^{(l)}$ при $3 \leq l \leq 6$ центр изучался в [1], [2], [4], [5]. В [1], [2] дано полное описание центра $Z(F)$ при $l = 3$ и 4 с помощью $[F, F]$ и $[F, F]^2$, где $[F, F] = \{[x_1, x_2]\}^T$. В [4], [5] начато исследование центра алгебры $F^{(l)}$ при $l \geq 5$.

Для алгебры $F^{(5)}$ в [4] доказано, что центр находится между T-пространством $\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}^T$ и T-идеалом $([x_1, x_2, x_3, x_4])^T$. Вне T-пространства $\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}^T$ находятся некоторые интересные центральные многочлены. Такие, например, как многочлен Холла $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ и некоторые следствия из него. Есть ли что-то еще? Вопрос пока открыт.

Мера включения $\mu(U, V)$ обладает всеми стандартными свойствами вероятностной меры. Зафиксируем пространство V, т.е. относительно свободную алгебру F, и обозначим через $P(U)$ меру включения $\mu(U, V)$. Всякое ли T-пространство имеет меру включения (*вероятность*), пока не известно. Во всех рассмотренных случаях это так. Вообще, приходится говорить только об *измеримых* T-пространствах U, т.е. о тех, для которых вероятность $P(U)$ существует.

Для любого T-пространства U имеет место соотношение $0 \leq P(U) \leq 1$. Если $U \subset W$, то $P(U) \leq P(W)$ и $P(W \setminus U) = P(W) - P(U)$, где $W \setminus U$ обозначает не теоретико-множественную разность, а фактор-пространство W/U; $P(U + W) = P(U) + P(W) - P(U \cap W)$; если $P(U) = 0$, то $P(U + W) = P(W)$; если $P(U \cap W) = 0$ (*несовместные* T-пространства), то $P(U + W) = P(U) + P(W)$ и сумма $U + W$ называется *вероятностно прямой суммой* и обозначается, как $U \dot{+} W$ (более общее понятие, чем обычная прямая сумма).

Назовем *условной вероятностью* число $P(U|_W) = P(U \cap W)/P(W)$. Назовем T-пространства *независимыми*, если $P(U|_W) = P(U)$, $P(W|_U) = P(W)$. Прямо из определения следует, что если U и W независимы, то $P(U \cap W) = P(U)P(W)$.

Можно показать, что имеют место аналоги формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Итак, с любой относительно свободной алгеброй можно связать структуру, состоящую из ее T-пространств и фактор-T-пространств, на которых естественным образом вводятся бинарные операции

$+, \cap, \setminus$ и вероятностная мера P, получающаяся из меры включения. На основании этого строится теория, аналогичная традиционной.

Ниже приводится серия результатов, в которых вычислена вероятность некоторых T-пространств. В качестве приложения дается асимптотическое описание центра алгебры $F^{(l)}$.

Теорема. Если $F = F^{(3)}$, то $P([F,F]^m) = P(Z(F)) = 1/2$. Если $F = F^{(4)}$ и k — поле нулевой характеристики, то $P([F,F]^m) = P(Z(F)) = 1/2$. T-идеал $([x_1, x_2, x_3])^T$ лежит в центре алгебры $F^{(4)}$ и $P(([x_1, x_2, x_3])^T) = 0$.

Если k — поле нулевой характеристики и $F = F^{(5)}$, то

$$P(\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}^T) = P(Z(F)) = \frac{1}{2}; P(([x_1, x_2, x_3, x_4])^T) = 1.$$

Нулевая характеристика в случае $l \geq 4$ нужна в доказательстве, так как для оценки размерностей используются диаграммы Юнга. Весьма вероятно, что данный факт имеет место и при более широких предположениях.

Теорема показывает, что мера включения фактор-пространства $Z(F^{(5)})/\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}^T$ в пространство $M(F^{(5)})$ равна нулю, т.е. в асимптотическом смысле основная часть центра алгебры $F^{(5)}$ — это T-пространство $\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}^T$. На основании полученных результатов можно высказать следующую гипотезу.

Для любого нечетного $l = 2m + 1$, если $F = F^{(l)}$ и k — поле нулевой характеристики, то

$$\mu(M(Z(F)), M(F)) = \mu(M(\{[x_1, \ldots, x_{2m}]\}^T), M(F)) = \frac{1}{2},$$

т.е. мера включения фактор-пространства $M(Z(F))/M(\{[x_1, \ldots, x_{2m}]\}^T)$ в пространство $M(F)$ равна нулю и в асимптотическом смысле центр алгебры $F^{(l)}$ описывается, как T-пространство $\{[x_1, \ldots, x_{2m}]\}^T$.

Литература. [1] А. В. Гришин. О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана // Успехи математических наук, 2010, том 65, № 4, с. 191—192. [2] А. В. Гришин. О центре относительно свободной лиевски нильпотентной алгебры индекса 4 // Математические заметки, 2012, том 91, № 1, с. 42—45. [3] А. В. Гришин. О мере включения градуированных подпространств // Международная конференция «Мальцевские чтения». Тезисы докладов (электронная версия), - Новосибирск, 2017, с. 111. [4] А. В. Гришин, С. В. Пчелинцев. О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности //

Математический сборник, 2015, том 206, № 11, с. 113—130. [5] А. В. Гришин, С. В. Пчелинцев. Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Математический сборник, 2016, том 207, № 12, с. 3—21. [6] В. Т. Марков. О размерности некоммутативных аффинных алгебр // Известия АН СССР, Сер. матем., 1973, том 37, № 2, с. 284—288. [7] Ю. П. Размыслов. Об одной проблеме Капланского // Известия АН СССР, Сер. матем. 1973, том 37, № 3, с. 483—501. [8] E. Formanek. Central polynomials for matrix rings // Jour. Of Algebra, 1972, Vol. 23., P. 129—133. [9] S. V. Okhitin. Central polynomials of an algebra of second-order matrices // Moscow Univ. Math. Bull., 1988, Vol. 43., № 4, P. 49—51.

Московский педагогический государственный университет

e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

А. Э. Гутерман (Москва)

Функция перманента: алгебраические решения комбинаторных задач

Две важные функции в теории матриц и комбинаторике — это определитель и перманент. Выглядят эти функции очень похоже:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad \text{и} \quad \operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

где $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ — $n \times n$ матрица над некоторым полем $\mathbb{F}$, а через S_n обозначена группа перестановок множества $\{1, \ldots, n\}$.

Общеизвестно, что определитель вычисляется за полиномиальное время. В то же время вопрос существования полиномиального алгоритма вычисления перманента до сих пор остается открытым.

Есть два стандартных подхода к работе с вычислительно сложными инвариантами. Первый заключается в подборе подходящего преобразования, осуществляющего редукцию рассматриваемого инварианта к другому, вычислить который проще. Второй подход состоит в замене явного вычисления рассматриваемого инварианта получением его оценок на подмножествах со специальными свойствами.

Исследование первого подхода для перманента и определителя восходит к работам Полиа 1913г., который изучал вопросы существования отображений $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ определенной структуры, удовлетворяющих свойству $\operatorname{per} A = \det T(A)$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$, называемых конвертерами. Второй подход получил наибольшее развитие для $(0,1)$ и $(-1,1)$ матриц, востребованных в приложениях, перманент которых активно исследуется, начиная с работ Адамара.

Будет изложено введение в теорию перманента и рассказано о недавних результатах докладчика и актуальных открытых проблемах. Среди прочего будет предложено отрицательное решение проблемы Полиа для матриц над конечными полями: доказано отсутствие биективных конвертеров перманента в определитель. Также будет представлен ответ на вопрос Уонга (1974г.), состоящий в доказательстве гипотезы Кройтера (1985г.) о точной верхней границе значений перманента $(-1,1)$ матриц в зависимости от их ранга.

Доклад основан на серии совместных работ с М.В. Будревичем, Г. Долинаром, Б. Кузмой и М. Орлом.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: guterman@list.ru

А. Э. Гутерман, **С. А. Жилина** (Москва)

Графы алгебры контроктонионов, порождённые отношениями

Пусть $(\mathcal{A},+,\cdot)$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$, возможно, без 1, некоммутативная и неассоциативная. $Z^*(\mathcal{A})$ — множество нетривиальных делителей нуля в $\mathcal{A}$, $Z^{**}(\mathcal{A})$ — множество нетривиальных двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$.

Определение 1. [1] Граф ортогональности $\Gamma_O(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ — граф, множество вершин которого — $Z^{**}(\mathcal{A})$, а различные вершины a и b соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$.

Определение 2. [4] Ориентированный граф делителей нуля $\Gamma_Z(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ — ориентированный граф, множество вершин которого — $Z^*(\mathcal{A})$, причём различные вершины a и b соединены направленным ребром от a к b, если и только если $ab = 0$.

Связность и диаметры графов ортогональности и делителей нуля для матричных колец активно исследовались ранее, например, в [1] и [2].

Предложение 3. [3] Алгебра контроктонионов $\hat{\mathbb{O}}$ изоморфна векторно-матричной алгебре Цорна, элементами которой являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}, \text{ где } a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3,$$

а умножение задаётся формулой

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' & a\mathbf{v}' + b'\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}' \\ a'\mathbf{w} + b\mathbf{w}' - \mathbf{v} \times \mathbf{v}' & bb' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} \end{pmatrix},$$

причём $\cdot$ и $\times$ — это скалярное и векторное произведения векторов в $\mathbb{R}^3$.

E — единица этой алгебры. Кроме того, для каждого $A \in \hat{\mathbb{O}}$ корректно определены след $tr(A)$, определитель $det(A)$ и сопряжённый элемент $\bar{A}$.

$\hat{\mathbb{O}}$ имеет некоторое сходство с алгеброй вещественных матриц 2×2. В связи с этим, представляется интересным изучение графов $\Gamma_O(\hat{\mathbb{O}})$ и $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})$, что и является целью настоящей работы.

Теорема 1. Компоненты связности $\Gamma_O(\hat{\mathbb{O}})$ имеют один из двух видов:
(1) полный двудольный граф, долями которого являются $(\mathbb{R} \setminus \{0\})A$ и $(\mathbb{R} \setminus \{0\})\bar{A}$, где $det(A) = 0$, $tr(A) \neq 0$, диаметр такой компоненты связности равен 2;
(2) подграф, множеством вершин которого являются все такие A, что $det(A) = 0$, $tr(A) = 0$. Диаметр этой компоненты связности равен 3.

Теорема 2. $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})$ связен, его диаметр равен 2.

В докладе будут также рассмотрены свойства этих графов для некоторых близких алгебр, в частности, для алгебры седенионов.

Литература. [1] B. R. Bahadly, A. E. Guterman, O. v. Markova, *Graphs Defined by Orthogonality* // Journal of Mathematical Sciences (New York), 207, 5 (2015), 698-717. [2] I. Bozic and Z. Petrovic, *Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings* // Comm. Algebra, 37, 4 (2009), 1186-1192. [3] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras* // Springer-Verlag New York, 2004, p. 66, p. 157. [4] S. P. Redmond, *The zero-divisor graph of a noncommutative ring* // International Journal of Commutative Rings, 1, 4 (2002), 203–211.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

А. А. Давлатбеков (Таджикистан)

Задача В.Д. Белоусова для класса односторонних линейных квазигрупп

Задача нахождения нормальных конгруэнций для различных классов квазигрупп поставлена В.Д. Белоусовым в его монографии [1]. Постановка задачи следующая: *каковы квазигруппы и лупы, в* *которых каждая конгруэнция нормальна?* (проблема 20. с. 222 из [1]).

Как известно в группе (конечной квазигруппе) каждая конгруэнция нормальна. Существуют классы квазигрупп и луп, в которых каждая конгруэнция нормальна, это IP-квазигруппы, TS-квазигруппы (в частности, квазигруппы Штейнера и CH-квазигруппы).

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется линейной слева (справа) над группой $(Q, +)$, если она имеет вид $xy = \varphi x + c + \beta y$,$(xy = \alpha x + c + \psi y)$, где $\varphi, (\psi) \in Aut(Q, +)$, $\beta(\alpha)$ - подстановка множества Q [2].

Отношение эквивалентности θ множества Q называется конгруенцией в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $a\theta b$ следует $ac\theta bc$ и $ca\theta cb$ для любых $a, b, c \in Q$.

Конгруэнция θ называется нормальной, если из $ac\theta bc$ следует $a\theta b$, из $ca\theta cb$ следует $a\theta b$ для всех $a, b, c \in Q$.

Все необходимые сведения о квазигруппах можно найти в монографии [1].

Теорема 1. Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная слева (справа) квазигруппа:

$$xy = \varphi x + c + \beta y, (xy = \alpha x + c + \psi y)$$

η - конгруэнция квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $\varphi|Ker\eta, (\psi|Ker\eta)$ - сужение автоморфизма $\varphi(\psi)$ на группу $Ker\eta$. Тогда η - конгруэнция квазигруппы $(Q, \cdot)$ тогда и только тогда, когда $\varphi|Ker\eta, (\psi|Ker\eta)$ - эндоморфизм группы $Ker\eta$. Далле η - нормальная конгруэнция на $(Q, \cdot)$ тогда и только тогда, когда $\varphi|Ker\eta, (\psi|Ker\eta)$ автоморфизм группы $Ker\eta$.

Теорема 2. Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная слева (справа) квазигруппа:

$$xy = \varphi x + c + \beta y, (xy = \alpha x + c + \psi y)$$

причем $\varphi(\psi)$ имеет конечный порядок, тогда каждая конгруэнция на $(Q, \cdot)$ нормальна.

Замечание. Теорема 2 является решением задачи В.Д. Белоусова для класса одностороных линейных квазигрупп.

Литература. [1] В. Д. Белоусов. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967. [2] А. Х. Табаров. Простые линейные и алинейные квазигруппы. 2007, №3(35), С. 259–262.

Кулябский государственный университет им. А.Рудаки

Д. А. Долгов (Казань)

Об одном способе выбора коэффициентов в обобщенном бинарном алгоритме НОД и расширенном алгоритме Вебера-Седжелмаси

K-арный алгоритм [1,2] - один из наиболее быстрых алгоритмов вычисления наибольшего общего делителя (НОД). Пусть $A > B > 0$ - 2 нечетных натуральных числа. Необходимо найти коэффициенты x, y, такие что выполняется $xA + yB \ = \ 0 \ (mod \ k)$ для некоторого фиксированного целого k (обычно k берут простым): $gcd(A, B) = gcd(B, |(xA + yB)/k|)$. Выбрав $k = 2^s$, получим обобщеннный бинарный алгоритм. В [3] был предложен новый способ выбора коэффициентов x, y для обобщенного бинарного алгоритма [4], рассматриваемый в рамках статьи.

Рассмотрим 1 итерацию, проанализировав сокращение A/C, где $C = (x * A + y * B)/2^s$. Пусть X, Y - целочисленные дискретные случайные величины. $X, Y \in \ [2^n, 2^{n+1}]$, $n \in N$. Рассмотрим нечетную реализацию случайных величин X, Y. Пусть $\xi = max(X, Y)$, $\nu = min(X, Y)$. Реализации ξ, ν представим в двоичном виде. На t позиции стоит 1 из 4 вариатов: $00, 01, 10$ или 11. $\#(\xi, \nu) = 2^{n-2} * (2^{n-1} - 1)$. $R_{i,j} = (\xi * \nu_t - \nu * \xi_t)/2^w$, $w \geq t$, на t позиции стоят i, j. R_{11L} - максимальное сокращение для бинарного алгоритма НОД $\xi/((\xi - \nu)/2^v)$, $v \geq 1$.

Если в разложении есть только 10, и 11 не лежит нигде кроме последнего разряда, то обозначим так: $\overline{00}\overline{01}10\overline{11}$. Обозначим двоичное представление числа так: $5 = 101_2$. Для $m > 1$ $\{0\}^m$ или $\{1\}^m$ означают последовательность 0 или 1 длины m. Исследование классов чисел, на которых обобщенный бинарный алгоритм дает наибольшее сокращение позволит построить эффективный бинарный алгоритм НОД.

Лемма 1. $P((\frac{\xi}{R_{11L}} \geq \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap \overline{00}\overline{01}10\overline{11}) = 0$, $n \geq 5$.

Лемма 2. Пусть $\xi = 11X11_2$, $\nu = 10...01_2$, X - любая комбинация 0 и 1, за исключением $X \neq \{01\}^r$, $r > 1$. Тогда, $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap 00\overline{01}10\overline{11}) = 1$.

Лемма 3. Пусть $\xi = 11\{01\}^r 11_2$, $\nu = 10...01_2$, $n + 1 = 2d$, $d, r > 1$. Тогда,

$$P(((\frac{\xi}{R_{11L}} = \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} = \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap 00\overline{01}10\overline{11}) = 1.$$

Гипотеза 1. Пусть $\xi = 1011X011_2$, $\nu = 10...01_2$, X - любая комбинация 0 и 1, за исключением $X \neq \{0011\}^r$, $r > 1$. Тогда, $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap 00\overline{01}10\overline{11}) = 1$.

Гипотеза 2. Пусть $\xi = 1011\{0011\}^r011_2$, $\nu = 10...01_2$, $r > 1$. Тогда, $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} = \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} = \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap 00\overline{01}10\overline{11}) = 1$.

Гипотеза 3. $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} \geq \frac{\xi}{R_{10}}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} \geq \frac{\xi}{R_{00}})) \cap 00\overline{01}10\overline{11}) \leq \frac{Q}{2^{n-2}(2^{n-1}-1)}$, где

$Q = 2^{n-1} - 2^{n-3} - 2^{n-6} + \lfloor (n-3)/2 \rfloor + \lfloor (n-6)/2 \rfloor + 1$.

Гипотеза 4. Пусть $\xi = 111X1_2$, $\nu = 100Y1_2$, X - любая комбинация 0 и 1, $Y = \neg X$.

Тогда, $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap \overline{00}0110\overline{11}) = 1$.

Гипотеза 5. Пусть $\xi = 11\{0\}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor}1X\{0\}^{n-5}1_2$, $\nu = 10\{1\}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor}0Y\{1\}^{n-5}1_2$, $X \in \{0,1\}$, $Y = \neg X$. Тогда, $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap \overline{00}0110\overline{11}) = 1$.

Гипотеза 6. Пусть $\xi = 11\{0\}^{n'}1X1_2$, $\nu = 10\{1\}^{n'}0Y1_2$, $Y = \neg X$, $X \in \{0...0, 0...01, 0...010, 10...0, 10...01, 110...0, 1110...0\}$, $len(X) = n-3-n'$, $n' \in [1, \lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor]$, $len(u) = \lfloor log_2(u) \rfloor + 1$, n' - целое.

Тогда, $P(((\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{10}|}) \cap (\frac{\xi}{R_{11L}} < \frac{\xi}{|R_{00}|})) \cap \overline{00}0110\overline{11}) = 1$.

Теперь о расширенном алгоритме Вебера-Седжелмаси. Вебер [4] получил новый обобщеннный бинарный алгоритм. Недостаток данного алгоритма, как и других k-арных в том, что в ходе работы алгорима накапливаются доп. множители, которые нужно убирать в конце. Ишмухаметов [5] получил расширенный k-арный алгоритм, рассмотрев случай, когда $GCD(C_i, k) = 1$ и $C_i < B_i, C_i = (x_iA_i + y_iB_i)/k$, где A_1, B_1- исходные числа. Для удаления доп. множителей нужно вычислить $d_2 = GCD(A_1, d)$, используя алгоритм Евклида. Если $d_2 \neq 1$, то найти $d_3 = GCD(B_1, d_2)$.

Седжелмаси [6] модифицировал алгоритм Вебера, получив новый k-арный алгоритм, в котором не накапливаются доп. множители. Представим расширенный алгоритм Вебера-Седжелмаси (EWSA). EWSA подобно расширенному алгоритму Евклида (EEA) имеет как прямой, так и обратный ход. В ходе работы алгоритма необходим подсчет 2 k-арных редукций $|(n_iB_l - d_iA_l)/k|$, $i = 1, 2$. Храним параметры $n_i, d_i, A_i\ div\ B_i$, $A_i\ mod\ B_i$. Если $n_2 \geq sqrt(k)$, то используем модульную редукцию, иначе используем алгоритм Вебера-Седжелмаси (WSA). На каждом шаге идет подсчет новой пары: (A_{i+1}, B_{i+1}), $kRed1 = |(n_1B_i - d_1A_i)/k|, kRed2 = |(n_2B_i - d_2A_i)/k|$, $A_{i+1} = max(kRed1, kRed2)$, $B_{i+1} = min(kRed1, kRed2)$. u_{i+1}, v_{i+1}: $u_{i+1}Ai + 1 + v_{i+1}B_{i+1} = d$. Выразив, A_{i+1}, B_{i+1} получим формулы для u_i, v_i: $u_n = 0, v_n = 1$, если $kRed2 > kRed1$: $u_i = (u_{i+1}n_1 +$

$v_{i+1}n_2)/k; v_i = (-u_{i+1}d_1 - v_{i+1}d_2)/k$. Если $kRed2 \leq kRed1$: $u_i = (u_{i+1}n_2 + v_{i+1}n_1)/k; v_i = (-u_{i+1}d_2 - v_{i+1}d_1)/k$. В случае использования модульной редукции (1 шаг EEA) формулы будут идентичны EEA:$u_i = u_{i+1}, v_i = u_{i+1} - v_{i+1}(A_i\ div\ B_i)_i$.

Если модульная редукция не использовалась в ходе работы алгоритма, получим следующий формулы $u_1' = u_1\ mod\ A_1$, $v_1' = v_1\ mod\ A_1$. $u_1'A_1 + v_1'B_1 = 1 + tA_1$, откуда найдем t. Найдем обратные элементы к A_1, B_1: $u = u_1' - t$, $v = v_1'$.

Литература. [1] J. Sorenson. The k-ary gcd algorithm. Computer Sciences Technical Report, 979 (1990).[2] J. Sorenson. Two fast GCD Algorithms. J.Alg, 16 (1) (1990), 110-144. [3] D. A. Dolgov. GCD calculation in the search task of pseudoprime and strong pseudoprime numbers. Lobachevskii Journal of Mathematics, 37 (6) (2016), 734-739. [4] K. Weber. The accelerated integer GCD algorithm. Journal ACM Transactions on Mathematical Software, 25 (1) (1995), 111-122.[5] S. T. Ishmukhametov, B. G. Muba- rakov, Kamal. Al-Anni. Maad. Calculation of Bezout's coefficients for the k-ary algorithm of finding GCD. Russian Mathematics, 61 (11) (2017), 26-33. [6] S. M. Sedjel- maci. Jebelean–Weber's algorithm without spurious factors. Information Processing Letters, 102 (6) (2007), 247-252.

Казанский федеральный университет

e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

Б. А. Дуйсенгалиева (Астана, Казахстан), **У. У. Умирбаев** (Detroit, MI, USA)

Дикий автоморфизм свободной алгебры Новикова

Хорошо известно [1, 2, 3, 4], что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x, y]$ и свободной ассоциативной алгебры $k\langle x, y\rangle$ от двух переменных над произвольным полем k являются ручными. Алгебры многочленов $k[x, y, z]$ и свободные ассоциативные алгебры $k\langle x, y, z\rangle$ от трех переменных над полем нулевой характеристики имеют дикие автоморфизмы [5, 6].

Неассоциативная алгебра $A = (A, \circ)$ называется алгеброй Новикова, если A удовлетворяет тождествам

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c),$$

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b.$$

Пусть $N\langle x, y, z\rangle$ – свободная алгебра Новикова от трех переменных x, y, z над полем нулевой характеристики. Используя автоморфизм Нагаты [5] и представление свободных алгебр Новикова в алгебре обыкновенных дифференциальных многочленов [7], построен автоморфизм ψ алгебры $N\langle x,y,z\rangle$ такой, что

$$\psi(x) = x + 2y \circ w + (z \circ w) \circ w, \quad \psi(y) = y + z \circ w, \quad \psi(z) = z,$$

где $w = \frac{1}{2}(2y \circ y - x \circ z - z \circ x)$.

Теорема 1. Автоморфизм ψ свободной алгебры Новикова $N\langle x,y,z\rangle$ от трех переменных x,y,z над полем нулевой характеристики является диким.

Литература. [1] H. W. E. Jung, Uber ganze birationale Transformationen der Ebene. J. reine angew. Math., 184 (1942), 161–174. [2] W. van der Kulk, On Polynomial Rings in Two Variables. Nieuw Archief voor Wiskunde, 3 (1953), 33–41. [3] A. G. Czerniakiewicz, Automorphisms of a Free Associative Algebra of Rank 2. I, II. Trans. Amer. Math. Soc., 160 (1971), 393–401; 171 (1972), 309–315. [4] Л. Макар-Лиманов, Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих. Функцион. анализ и его прил., 4 (1970), 107–108. [5] У. У. Умирбаев, И. П. Шестаков, Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов. Докл. РАН, 386 (2002), 745–748. [6] У. У. Умирбаев, Определяющее соотношения группы ручных автоморфизмов алгебры многочленов и дикие автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр. Докл. РАН, 407 (2006), 319–324. [7] A. Dzhumadil'daev, C. Lofwall, Trees, free right-simmetric algebras, free Novikov algebras and identities. Homology, Homotopy and Applications, 4 (2002), 165–190.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
Wayne State University

e-mail: bibinur.88@mail.ru

И. Н. Зотов (Красноярск)

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов

Исследования отношения элементарной эквивалентности алгебраических систем в логике первого порядка, обозначаемого через $\equiv$, восходят к теореме А.И. Мальцева [1]. Он доказал, что элементарная эквивалентность линейных групп $G(K) \equiv G(S)$ над полями характеристики 0 переносится при $G = GL_n, SL_n, PGL_n, PSL_n$ $(n \geq 3)$ на поля коэффициентов, то есть $K \equiv S$.

Теоретико-модельные свойства и соответствия Мальцева линейных групп и колец изучались в тесной связи с изоморфизмами с 70-х годов, см. монографию [2], [4]-[5] и др. К.Видэла в 1990 году [3] показал, что соответствие Мальцева выполняется для унипотентных подгрупп $U\Phi(K)$ групп Шевалле, ассоциированных с системой корней Φ ранга > 1, над полями характеристики $\neq 2, 3$. В [6] отмечались вопросы о соответствии Мальцева и нильтреугольных подалгебр $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ алгебр Шевалле.

Ограничение на характеристику поля K в теореме К.Видэла ослаблялось в [8]. Описание изоморфизмов устанавливает

Теорема 1. Пусть $\phi : N\Phi'(S) \to N\Phi(K)$ изоморфизм колец Ли классического типа ранга $n > 4$ над ассоциативно коммутативными кольцами K и S с единицами, причём для типов B_n и C_n аннулятор элемента 2 в K и S нулевой. Тогда ϕ есть произведение $\phi = \bar{\tau}\bar{\theta}\eta$ изоморфизмов $\bar{\tau}$ и $\bar{\theta}$, индуцированных подходящей эквивалентностью $\tau : \Phi' \to \Phi$ систем корней и изоморфизмом $\theta : S \to K$ колец коэффициентов, и автоморфизма $\eta \in Aut\ N\Phi(K)$.

Теорема 1 и разработанные методы приводят к перенесению соответствия Мальцева на нильтреугольные подалгебры $N\Phi(K)$ алгебр Шевалле.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-007-07).

Литература. [1] А. И. Мальцев. Элементарные свойства линейных групп. Некоторые проблемы в Математике и механике. Новосибирск: Издательство АН СССР, 1961, 110-132. [2] Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, А. Г. Пинус. Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр. М: МЦНМО, 2015, 360 с. [3] C. K. Videla. On the Mal'cev correspondence. Proceed. AMS., 109 (1990), 493–502. [4] O. V. Belegradek. Model Theory of Unitriangular Groups. Amer. Math. Soc. Transl., 195, №2 (1999), 1-116. [5] В. М. Левчук, Е. В. Минакова. Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально-нильпотентных матричных групп и колец. ДАН, Т. 425, № 2 (2009), 165-168. [6] В. М. Левчук. Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле. Итоги науки. – Юг России, Т. 6. (2012), 75-84. [7] R. Carter. Simple Groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972. [8] И. Н. Зотов. Элементарная эквивалентность некоторых нильпотентных неассоциативных колец // Электронный сборник тезисов докладов международной конференции «Мальцевские Чтения». – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (2016), 185.

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет

e-mail: zotovin@rambler.ru

Е. В. Зубей (Гомель, Беларусь)

О разрешимости группы с S-полунормальными подгруппами Шмидта

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые обозначения и терминология стандартны и соответствуют [1].

Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе. Поэтому свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение самой группы. Группы с ограничениями на подгруппы Шмидта исследовались во многих работах. Например, в [2], [3] изучены группы с субнормальными подгруппами Шмидта, а в [4] — с холловыми подгруппами Шмидта.

Подгруппа A называется S-полунормальной (или SS-перестановочной) в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой силовской подгруппой из B.

Изучаются группы, в которых некоторые из подгрупп Шмидта S-полунормальны, и устанавливаются признаки разрешимости и π-разрешимости таких групп. Доказана следующая теорема.

Теорема. (1) Если в группе G все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны, то G будет 3-разрешимой.

(2) Если в группе G все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2, 5\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны, то G разрешима.

Эта теорема охватывает некоторые результаты из [5].

Литература. [1] В. С. Монахов. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. [2] В. Н. Княгина, В. С. Монахов, О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта. Сибирский матем. журн., Том 45, 6 (2004), 1316–1322. [3] В. А. Ведерников, Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта. Алгебра и логика, Том 46, 6 (2007), 669–687. [4] V. N. Kniahina, V. S. Monakhov, Finite groups with Hall Schmidt subgroups. Publ. Math. Debrecen, Vol. 81, 3–4 (2012), 341–350. [5] В. Н. Княгина, В. С. Монахов, Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта. Алгебра и логика, Том 46, 4 (2007), 448–458.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

Д. З. Каган (Москва)

Бесконечность ширины коммутантных вербальных подгрупп для специальных HNN-расширений

Напомним определение ширины вербальных подгрупп. Пусть $G-$ некоторая группа, $V-$ произвольное множество слов. В соответствии с [1] ширина вербальной подгруппы $V(G)$ относительно множества слов $V-$ это наименьшее число $m \in \mathcal{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что любой элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов $V^{\pm 1}$. Различные результаты о ширине вербальных подгрупп были получены В. Г. Бардаковым [2], И. В. Добрыниной [3],В.Н. Безверхним [4], В.А. Файзиевым [5].

Результаты, приведенные в данной работе, посвящены коммутантной вербальным подгруппам. Слово v из свободной группы F_n называется коммутаторным, если оно лежит в коммутанте F_n'. Множество слов V называется коммутаторным, а определяемая этим множеством вербальная подгруппа $V(G)-$ коммутантной, если V содержит только коммутаторные слова.

Р. И. Григорчук [6] установил условия бесконечности для коммутантных собственных вербальных подгрупп в свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях. В работах автора также были установлены некоторые условия бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп для свободных групповых конструкций, групп с одним определяющим соотношением [7]. Обзов результатов о ширине вербальных подгрупп приведен в [8]

Результаты, рассматриваемые в данных тезисах, являются в определенном смысле продолжением утверждений, полученных Григорчуком и Бардаковым для HNN-расширений. В доказательстве этих результатов используется техника нетривиальных псевдохарактеров. Понятие псевдохарактеров было введено А.И. Штерном [9], методы построения псевдохарактеров применялись, в том числе, в работах вышеперечисленных алгебраистов.

В данной работе сформулированы результаты об условиях бесконечности ширины коммутантных собственных вербальных подгрупп для определенного типа HNN-расширений, относящихся к сложным случаям - нисходящих HNN-расширений (в которых одна из изоморфных подгрупп совпадает с базой).

Теорема 1. [10] Пусть $G =< t, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} | t a_0 t^{-1} = a_1, \ldots, t a_{n-2} t^{-1} = a_{n-1}, t a_{n-1} t^{-1} = W a_i^R W^{-1} >$; $R-$ произвольное положительное число и слово $W(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ - непустое слово в порождающих a_j, запись которого начинается с порождающей минимального индекса $a_0^{\pm 1}$. Тогда ширина любой собственной коммутантной вербальной подгруппы $V(G)$, определенной конечным множеством слов V, бесконечна.

Теорема 2. Пусть $G =< t, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} | ta_0t^{-1} = a_1, \ldots, ta_{n-2}t^{-1} = a_{n-1}, ta_{n-1}t^{-1} = Wa_i^R W^{-1} >$; $R-$ отрицательное число, не равное $-2^z + 1, z \in \mathcal{N}$ и слово $W(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ - непустое слово в порождающих a_j, которое начинается с порождающей $a_0^{\pm 1}$. Тогда ширина любой собственной коммутантной вербальной подгруппы $V(G)$, определенной конечным множеством слов V, бесконечна.

Литература. [1] Ю. И. Мерзляков Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, №1. С. 83 — 94. [2] В. Г. Бардаков О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №5. С. 494-517. [3] И. В. Добрынина Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, №1. С. 23-30. [4] И. В. Добрынина, В. Н. Безверхний О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением // Труды института математики и механики УрО РАН. 2001. Т.7, №2. С. 95-102. [5] V. A. Faiziev A problem of expressibility in some amalgamated products of groups // J. Austral. Math. Soc. 2001. V. 71. P. 105 — 115. [6] Р. И. Григорчук Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки. 1996. Т.59, №4. С. 546-550. [7] Д. З. Каган Нетривиальные псевдохарактеры на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром // Математический сборник, 2017. Т.208., №1. С. 80-96. [8] И. В. Добрынина, Д. З. Каган О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, №4 (56). С. 150-163. [9 А. И. Штерн Квазипредставления и псевдопредствления // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25, №2. С. 70-73. [10] Д. З. Каган Инвариантные функции на сво-бодных группах и специальных HNN-расширениях // Чебышевский сборник, 2017. Т. 18. № 1 (61). С. 109-122.

Российский университет дружбы народов (РУДН), Москва, Россия

e-mail: dmikagan@gmail.com

С. Ф. Каморников (Гомель, Беларусь)

О характеризации ядра π-префраттиниевой подгруппы конечной разрешимой группы

В [1] показано, что если $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, H — $\mathfrak{F}$-префраттини-ева подгруппа конечной разрешимой группы G и

$\Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ — пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп из G, то справедливы следующие утверждения:

1) $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ для некоторых x, y и z из G;

2) если либо группа G является S_4-свободной, либо формация $\mathfrak{F}$ состоит из S_3-свободных групп, то $H \cap H^x \cap H^y = \Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ для некоторых x и y из G.

Частные аспекты этого результата рассматривались в работах [2] ($\mathfrak{F}$ — формация единичных групп, $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G) и [3] ($\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп, $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Delta(G)$ — подгруппа Гашюца группы G, т.е. пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G).

Поскольку $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = Core_G(H) = \bigcap_{x \in G} H^x$ для любой $\mathfrak{F}$-префраттиние-вой подгруппы H группы G, то, по сути, речь идет о возможности представления ядра $\mathfrak{F}$-префратиниевой подгруппы в виде пересечения ограниченного числа (трех или четырех) сопряженных с ней подгрупп.

В данной работе приведенный результат об $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгруппах конечной разрешимой группы G распространяется на ее π-префрат-тиниевы подгруппы. Отметим, что в общем случае множество всех π-пре-фраттиниевых подгрупп группы G не совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгрупп).

Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\Phi_\pi(G)$ — пересечение всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на числа из π. Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Если H — π-префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G, то справедливы следующие утверждения:

1) $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Phi_\pi(G)$ для некоторых элементов x, y и z из G;

2) если группа G является S_4-свободной, то $H \cap H^x \cap H^y = \Phi_\pi(G)$ для некоторых элементов x и y из G;

3) если $2 \notin \pi$ и $3 \notin \pi$, то $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Phi_\pi(G)$ для некоторых элементов x и y из G.

Концепция префраттиниевой подгруппы предложена Гашюцем в 1962 году. В оригинальном изложении префраттиниева подгруппа определяется как пересечение дополнений корон всех дополняемых главных факторов некоторого фиксированного главного ряда группы. Такой подход в дальнейшем широко исследовался и многократно обобщался. Наиболее яркое развитие он получил в работах Хоукса, который для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ ввел понятие $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппы, рассматривая дополнения корон не всех дополняемых главных факторов, а лишь $\mathfrak{F}$-эксцентральных.

Отметим, что известны и подходы, не использующему понятие короны дополняемого главного фактора. Один из таких подходов, рассматривающий обобщенно префраттиниеву подгруппу конечной разрешимой группы G как пересечение некоторых ее максимальных подгрупп, мы используем при определении π-префраттиниевой подгруппы.

Определение. Пусть π — некоторое множество простых чисел,

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A_n = G$$

— главный ряд конечной разрешимой группы G и $\{A_i/A_{i-1} | i \in I\}$ — множество всех дополняемых главных $\pi^{'}$-факторов этого ряда. Пусть M_i $(i \in I)$ — максимальная подгруппа группы G, которая дополняет главный фактор A_i/A_{i-1}. Тогда подгруппа $\bigcap_{i\in I} M_i$ называется π-*префраттиниевой* подгруппой группы G (если в G нет дополняемых главных $\pi^{'}$-факторов, то π-префраттиниевой подгруппой группы G считается сама группа G).

Проверка показывает, что определение π-префраттиниевой подгруппы является корректным: оно не зависит от выбора главного ряда группы. Из определения следует также, что π-префраттиниева подгруппа существует в любой конечной разрешимой группе.

Литература. [1] A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, S. F. Kamornikov, H. Meng. On two questions from the Kourovka Notebook. J. Algebra, 499 (2018), 438–449. [2] S. F. Kamornikov. Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups. Int. J. Group Theory, 6 (2017), 1–5. [3] С. Ф. Каморников. Об одной характеризации подгруппы Гашюца конечной разрешимой группы. Фундамент. и прикл. матем., 20 (2015), 65–75.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

e-mail: sfkamornikov@mail.ru

В. К. Карташов, **А. В. Карташова** (Волгоград)

О базисах тождеств и квазитождеств некоторых унарных алгебр

Исследование базисов тождеств и квазитождеств занимает одно из центральных мест в универсальной алгебре. На это обратил особое внимание А. И. Мальцев в своем докладе на Международном математическом конгрессе в 1966 году [1].

Для произвольного многообразия $\mathfrak{M}$ алгебраических систем сигнатуры Ω через $T_V(\mathfrak{M})$ обозначается эквациональная теория класса $\mathfrak{M}$ (т. е. совокупность всех тождеств, истинных на классе $\mathfrak{M}$). Подмножество $\Sigma \subseteq T_V(\mathfrak{M})$ называется *базисом тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$, если класс всех алгебраических систем, на котором истинны все тождества из Σ, совпадает с $\mathfrak{M}$. Аналогично определяется *базис квазитождеств*.

Г.Биркгоф [2] доказал, что всякая конечная унарная алгебра конечного типа имеет конечный базис тождеств. А.И. Мальцевым было установлено [3, с. 352], что всякое многообразие унарных алгебр с одной операцией имеет базис, состоящий из одного тождества.

Эти работы явились источником новых идей вокруг проблемы нахождения базисов тождеств и квазитождеств.

Позднее в [4] было доказано, что любое многообразие коммутативных унарных алгебр конечного типа имеет конечный базис тождеств.

В работах [5], [6] доказано, что любой конечный унар имеет конечный базис квазитождеств, а любой конечнопорожденный унар – независимый базис квазитождеств. При этом установлено существование континуума квазимногообразий унаров, которые не имеют независимого базиса квазитождеств.

И.П. Бесценный [7] приводит необходимые и достаточные условия существования конечного базиса для трехэлементной унарной алгебры конечного типа. В.А. Горбуновым [8] был приведен пример трехэлементной унарной алгебры, не имеющей независимого базиса квазитождеств. Некоторые условия отсутствия конечного базиса квазитождеств для конечных алгебр указаны в [9], [10]. В [11] рассматриваются унарные алгебры специального типа с нулем, найден критерий существования конечного базиса квазитождеств для таких алгебр.

В [5] показано, что всякая конечная алгебра многообразия алгебр с двумя унарными операциями f и g, определенного тождествами $fg(x) = gf(x) = x$, имеет конечный базис квазитождеств.

Обобщением этого результата является

Теорема 1. Всякая конечная алгебра многообразия алгебр с двумя унарными операциями f и g, определенного тождеством $fg(x) = x$, имеет конечный базис квазитождеств.

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Если унарная алгебра $\mathfrak{A}$ представляется в виде объединения попарно непересекающихся унарных алгебр $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, то $\mathfrak{A}$ называется их *прямой суммой.*

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *коммутативной* , если $fg(a) = gf(a)$ для любых $f, g \in \Omega$, $a \in A$.

В работе рассматриваются прямые суммы сильно связных коммутативных унарных алгебр. В дальнейшем мы будем называть эти алгебры *ssc-алгебрами* (sums of strongly connected algebras).

Такие алгебры широко используются в различных областях математики, в частности, в теории автоматов, в дискретной математике ([12]–[15]).

Далее через Ω^* обозначается свободный моноид слов над алфавитом Ω.

Теорема 2. Конечная унарная алгебраь $\langle A, \Omega \rangle$ конечного типа является ssc-алгеброй тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию, определяемому тождеством вида $wx = x$ для некоторого слова $w \in \Omega^*$, содержащего все сигнатурные символы из Ω.

Следствие. Конечные ssc-алгебры образуют псевдомногообразие.

Теорема 3. Всякая конечная коммутативная ssc-алгебра имеет конечный базис квазитождеств.

Литература. [1] А. И. Мальцев, О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики. Труды международного конгресса математиков (Москва 1966). М.: Мир, 1968, 217–232. [2] G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras. Proc. Camb. Philos. Soc. 31 (1935). part 4, 432–454. [3] А. И. Мальцев. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. [4] V. K. Kartashov, On the finite axiomatizability of varieties of commutative unary algebras. J. Math. Sci. 164 (2010). № 1, 56–59. [5] В. К. Карташов, Квазимногообразия унаров. Математические заметки. 27 (1980). № 1, 7–20. [6] В. К. Карташов, Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов. Алгебра и логика. 19 (1980). № 2, 173–193. [7] И. П. Бесценный, Квазитождества конечных унарных алгебр. Алгебра и логика. 28 (1989). № 5, 493–512. [8] В. А. Горбунов, Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость. Алгебра и логика. 16 (1977). № 5, 507–548. [9] D. Casperson, J. Hyndman, Primitive positive formulas preventing a finite basis of quasi-equations. Internat. J. Algebra Comput. 19 (2009). № 7, 925–935. [10] J. Hyndman, Positive primitive formulas preventing enough algebraic operations. Algebra Universalis. 52 (2004). № 2, 3, 303–312. [11] D. Casperson, J. Hyndman, J. B. Nation, B. Schaan, Existence of finite bases for quasi-equations of unary algebras with 0 // Internat. J.

Algebra Comput. 25 (2015). № 6, 927–950. [12] M. Círic., S. Bogdanovic, Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata. Algebra Colloquium. 6 (1999). № 1, 71–88. [13] А. В. Карташова, О решетках конгруэнций прямых сумм сильно связных коммутативных унарных алгебр. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 13 (2013). выпуск 4(2), 57–62. [14] В. К. Карташов, Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр. Дискретная математика. 20 (2008). № 4, 79–84. [15] А. В. Карташова,Антимногообразия унаров. Алгебра и логика. 50 (2011). № 4, 521–532.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

А. В. Карташова (Волгоград)

О модулярных и дистрибутивных решетках топологий коммутативных унарных алгебр

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная алгебра и σ – топология на ее носителе A. Сигнатурная n-арная операция F называется *непрерывной* относительно σ, если для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и произвольной окрестности U элемента $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ найдутся окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_n$ элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, соответственно, такие, что $F(U_1, U_2, \ldots, U_n) \subseteq U$. Если относительно топологии σ непрерывна каждая сигнатурная операция алгебры $\mathfrak{A}$, то σ называется *топологией на алгебре* $\mathfrak{A}$.

Нетрудно убедиться в том, что такие топологии образуют полную решетку по включению (см., например, [1]). Будем называть ее решеткой топологий алгебры $\mathfrak{A}$ и обозначать через $\Im(\mathfrak{A})$.

Решетки, двойственные к решеткам конгруэнций и квазипорядков произвольной алгебры $\mathfrak{A}$, вкладываются в решетку $\Im(\mathfrak{A})$ ее топологий в качестве подрешеток ([2]).

Задача исследования решеток топологий алгебр различной сигнатуры рассматривалась рядом авторов. В работе [3] М. Лампер доказал, что решетка топологий произвольной абелевой группы модулярна. Б. Шмарда в [4] показал, что решетка топологий абелевой l-группы дистрибутивна. В [5] и [6] исследуются свойства решеток топологий модулей над кольцами.

Автором в работе [7] охарактеризованы классы унаров, т. е. алгебр с одной унарной операцией, решетка топологий которых является модулярной, дистрибутивной, булевой, решеткой с дополнениями, с псевдодополнениями, либо цепью. Описан класс модулярных решеток, реализуемых решетками топологий унаров.

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *коммутативной* , если $fg(a) = gf(a)$ для любых $f, g \in \Omega$, $a \in A$.

В [8] автором описаны коммутативные унарные алгебры, решетка топологий которых является цепью.

В данном сообщении охарактеризован класс всех коммутативных унарных алгебр с конечным числом операций, решетки топологий которых модулярны либо дистрибутивны. Кроме того, приведено описание класса модулярных решеток, реализуемых решетками топологий коммутативных унарных алгебр с конечным числом операций.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Далее обозначим через $\mathcal{E}_1$ класс всех таких конечных коммутативных унарных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$, что выполнены следующие условия:

1) все однопорожденные подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ содержат не более двух элементов;

2) алгебра $\mathfrak{A}$ имеет одноэлементную подалгебру $\langle \{e\}, \Omega \rangle$, и для любых двух различных элементов a, b алгебры $\mathfrak{A}$, отличных от e, найдется операция $f \in \Omega$ такая, что $f(a) = a$, $f(b) = e$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций. Тогда решетка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий этой алгебры модулярна в том и только в том случае, если выполнено одно из следующих условий:

1) $\mathfrak{A}$ – конечная сильно связная алгебра;

2) $\mathfrak{A}$ – однопорожденная алгебра с порождающим элементом a такая, что $\langle A \setminus \{a\}, \Omega \rangle$ – конечная сильно связная алгебра;

3) $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_1$.

Для любой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ через Ω^* обозначается свободный моноид слов над алфавитом Ω. Обозначим через $\mathcal{E}_2$ класс всех конечных сильно связных алгебр, характеристические полугруппы которых являются циклическими группами (см., например, [9]).

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций. Тогда решетка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий этой алгебры дистрибутивна в том и только в том случае, если выполнено одно из следующих условий:

1) $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_1$;

2) $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_2$;

3) $\mathfrak{A}$ – однопорожденная алгебра с порождающим элементом a такая, что $\langle A \setminus \{a\}, \Omega\rangle \in \mathcal{E}_2$.

Теорема 3. Пусть L – произвольная модулярная решетка. Тогда L изоморфна решетке $\Im(\mathfrak{A})$ топологий некоторой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ с конечным числом операций тогда и только тогда, когда L изоморфна решетке L_n натуральных делителей некоторого целого неотрицательного числа n.

Литература. [1] С. Д. Орлов, О решетке допустимых топологий. Упорядоченные множества и решетки. 2 (1974), 68-–71. [2] А. В. Карташова, О решетках квазипорядков и топологий алгебр. Фундаментальная и прикладная математика. 14 (2008). № 5, 85–92. [3] M. Lamper, Complements in the lattice of all topologies of topological groups. Archivum Mathematicum. 10 (1974). №4, 221–230. [4] B. Šmarda, The lattice of topologies of topological l-groups. Czech. Math. J. 26 (1976). №1, 128–136. [5] V. I. Arnautov, S. T. Glavatsky, A. V. Mikhalev. Introduction to the theory of topological rings and modules. New York: Marcel Dekker, 1996. [6] V. I. Arnautov, G. N. Ermakova, Lattice of all topologies of countable module over countable rings. Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2 (2016), 63–70. [7] A. V. Kartashova, On lattices of topologies of unary algebras. J. of Math. Sci. 114 (2003). № 2, 1086–1118. [8] А. В. Карташова, О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр. Дискретная математика. 21 (2009). №3, 119–131. [9] Z. Ésik, B. Imreh, Remarks on finite commutative automata. Acta Cybernet. 5 (1981), 143–146.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Д. Д. Киселев (Москва)

Ультраразрешимые групповые расширения с циклическим ядром

Задача погружения, связанная с точной последовательностью конечных групп,

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F = \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow 1,$$

состоит в том, чтобы построить k-алгебру Галуа L с группой G, содержащую поле K, таким образом, чтобы эпиморфизм ограничения автоморфизмов L на K совпадал бы с φ.

Для случая абелева ядра A задача погружения была полностью решена в работе [1], где критерий разрешимости указан в гомологических терминах. Оказывается, что в достаточно широком классе случаев поиски решения задачи погружения в смысле алгебр Галуа и в смысле полей эквивалентны (например, это так в случае нильпотентного ядра и расширения полей алгебраических чисел см. [2]).

В то же время интересен случай, когда априори можно гарантировать, что все решения задачи погружения окажутся полями (такие задачи мы в дальнейшем, следуя [3], называем ультраразрешимыми). Первые нетривиальные примеры ультраразрешимых задач были построены в [3, 4].

В связи с работами [3, 4] А. В. Яковлевым была поставлена следующая

Проблема 1. Пусть

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow 1 \tag{1}$$

— расширение конечных групп с абелевым ядром A. При каких условиях существует расширение Галуа числовых полей K/k с группой F, такое что получившаяся задача погружения ультраразрешима?

Мы полностью решаем проблему 1 для случая расширений нечетного порядка с циклическим ядром.

Рассмотрим расширение (1) с абелевым ядром A. Пусть p — некоторый простой делитель порядка группы A. Тогда можно профакторизовать расширение (1) по p'-подгруппе $A_{p'}$ группы A, т.е. рассмотреть расширение

$$1 \longrightarrow A/A_{p'} \longrightarrow G/A_{p'} \xrightarrow{\varphi_{p'}} F \longrightarrow 1, \tag{2}$$

где $\varphi_{p'}$ — эпиморфизм, индуцированный φ. Если в (2) $p \mid |F|$, то рассмотрим некоторую силовскую p-подгруппу F_p группы F и обозначим через G_p ее полный прообраз в $G/A_{p'}$ относительно $\varphi_{p'}$. Если же в (2) $p \nmid |F|$, то полагаем $F_p = F$, $G_p = G/A_{p'}$. Полученное расширение

$$1 \longrightarrow A/A_{p'} \longrightarrow G_p \xrightarrow{\varphi_{p'}} F_p \longrightarrow 1$$

мы будем называть *p-силовским подрасширением* к (1).

Теорема 1. Пусть (1) — расширение нечетного порядка с циклическим ядром. Расширение (1) ультраразрешимо тогда и только тогда, когда все его силовские подрасширения не являются полупрямыми.

Литература. [1] А. В. Яковлев, Задача погружения полей. Изв. АН СССР. Сер. мат., 28:3 (1964), 645–660. [2] В. В. Ишханов, О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром. Изв. АН СССР. Сер. мат., 40:1 (1976), 3–25. [3] Д. Д. Киселев, Б. Б. Лурье, Ультраразрешимость и сингулярность в проблеме погружения, Зап. научн. сем. ПОМИ, 414 (2013), 113–126. [4] Д. Д. Киселев, Примеры задач погружения, у которых решения только поля, УМН, 68:4 (2013), 181–182. [5] Д. Д. Киселев, Об ультраразрешимости групповых p-расширений абелевой группы с помощью циклического ядра, Зап. научн. сем. ПОМИ, 452 (2016), 108–131. [6] Д. Д. Киселев, И. А. Чубаров, Об ультраразрешимости некоторых классов минимальных неполупрямых p-расширений с циклическим ядром для $p > 2$, Зап. научн. сем. ПОМИ, 452 (2016), 132–157. [7] А. В. Яковлев, Об ультраразрешимых задачах погружения для числовых полей, Алгебра и анализ, 27:6 (2015), 260–263. [8] D. D. Kiselev, Minimal p-extensions and the embedding problem, Communications in Algebra, 46:1 (2018), 290–321.

Всероссийская академия внешней торговли, г. Москва

e-mail: denmexmath@yandex.ru

А. В. Климаков, **А. А. Михалёв** (Москва)

Почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий

Многообразие линейных алгебр над полем определяется как класс алгебр, замкнутых относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Многообразие алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной (в том же многообразии алгебр). Понятие шрайерова многообразия возникло в теории групп: в 1920-х годах Дж. Нильсен [1] и О. Шрайер [2] доказали, что любая подгруппа свободной группы свободна.

А. Г. Курош [3] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. А. И. Ширшов [4] показал, что многообразие всех алгебр Ли является шрайеровым (этот результат был получен также Виттом в [5], где также было доказано, что многообразие всех p-алгебр Ли является шрайеровым). А. И. Ширшов в [6] показал, что подалгебры свободных неассоциативных коммутативных и свободных неассоциативных антикоммутативных алгебр свободны.

В дальнейшем, в работах А. А. Михалёва, А. С. Штерна, А. И. Корепанова, У. У. Умирбаева, И. П. Шестакова рассматривались различные классы свободных алгебр и доказывалась их шрайеровость. У.У.Умирбаев в [7-8] получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым, и построил новые примеры шрайеровых многообразий.

Система элементов свободной алгебры $F(X)$ называется примитивной, если она является подмножеством некоторого множества свободных образующих алгебры $F(X)$.

Теорема 1. ([9]) Система $a_1, \ldots, a_r$ элементов алгебры $F(X)$ является примитивной тогда и только тогда, когда матрица $\big(\partial(a_1), \ldots, \partial(a_r)\big)$ обратима слева над $U(F(X))$. В частности, элемент a алгебры $F(X)$ примитивен в том и только в том случае, когда существуют такие элементы $m_1, \ldots, m_n \in U(F(X))$, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1.$$

Данная теорема дает алгоритм распознавания примитивности систем элементов свободных алгебр основных типов шрайеровых многообразий алгебр, который был реализован в работах [10-12].

Ненулевой элемент u свободной алгебры $F(X)$ называется почти примитивным элементом, если u не является примитивным элементом алгебры $F(X)$, но является примитивным элементом любой собственной подалгебры H алгебры $F(X)$, содержащей элемент u ($u \in H, H \subseteq F, 0 \neq H \neq F$). Почти примитивные элементы в свободных группах изучались в 90-ых годах в работах Л. Комерфорда, Б. Файна, Г. Розенберга, А. Брюнера. Изучение почти примитивных элементов было начато в работах А. А. Михалёва, Дж. Т. Ю, У. У. Умирбаева, В. Шпилрайна в начале 2000-ых годов.

В докладе будет произведен обзор результатов по исследованию почти примитивных элементов, критериев и алгоритмов их распознавания, полученных авторами за последние 15 лет. Будут рассмотрены примеры и критерии для основных типов свободных алгебр шрайеровых многообразий: свободной неассоциативной алгебры, свободной (анти)коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли малых рангов (работы [9-12]). На основе следующей теоремы строятся серии почти примитивных элементов в алгебрах произвольного ранга.

Теорема 2. ([9,13]) Пусть $F(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $F(X) = A * B$. Пусть также элементы a и b являются почти примитивными элементами в A и B, соответственно. Тогда элемент $a + b$ является почти примитивным элементом алгебры $F(X)$.

С помощью введения таких характеристик элемента свободной алгебры как ранг примитивности элемента, ранг почти примитивности однородного элемента, были построены критерии и алгоритмы распознавания почти примитивных однородных элементов в основных типах свободных алгебр произвольного ранга (работы [13-16]).

Литература. [1] J. Nilsen, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe. Math. Ann., 91 (1924), 161–183. [2] O. Schreier, Die Untergruppen den freien Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1927), 161–183. [3] А. Г. Курош, Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр. Мат. сб., 20 (1947), 239–262. [4] А. И. Ширшов, Подалгебры свободных лиевых алгебр. Мат. сб., 33:2 (1953), 441–452. [5] E. Witt, Die Unterringe der freien Lieschen Ringe. Math. Z., 64 (1956), 195–216. [6] А. И. Ширшов, Подалгебры свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр. Мат. сб., 34:1 (1954), 81–88. [7] У. У. Умирбаев, О шрейреровых многообразиях алгебр. Алг. и Лог., 33:3 (1994), 317–340. [8] U. U. Umirbaev, Universal derivations and subalgebras of free algebras. Algebra(Krasnoyarsk, 1993). Berlin: Walter de Gruyter (1996), 255–271. [9] A. A. Mikhalev, J.-T. Yu, Primitive, almost primitive, test, and Δ-primitive elements of free algebras with the Nielsen-Schreier property. J. Algebra 228 (2000), 603–623. [10] А. В. Климаков, А. А. Михалёв, Почти примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр малых рангов. Фундамент. и прикл. мат. 17:1 (2012), 127–141. [11] А. В. Климаков, Почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр малых рангов. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем. мех. 5 (2012), 19–24. [12] А. В. Климаков, Почти примитивные элементы свободных алгебр Ли малых рангов. Фундамент. и прикл. мат. 18:1 (2013), 63–74. [13] A.V. Klimakov, Primitivity rank of elements of free Schreier algebras. J. of Alg. and Appl. 15:2 (2016) 1650036, 1–8. [14] А. В. Климаков, Однородные почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем. мех. 6 (2013), 52–55. [15] В. А. Артамонов, А. В. Климаков, А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, Примитивные и почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий. Фундамент. и прикл. матем., 21:2 (2016), 3–35. [16] А. В. Климаков, А. А. Михалёв. Критерии и алгоритмы распознавания однородных почти примитивных элементов свободных алгебр шрайеровых многообразий. КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА, Материалы международной конференции Москва, ФГБОУ ВО РЭУ им. Г.В. Плеханова (2017), 118–123.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

e-mail: andrey.klimakov@gmail.com, aamikhalev@mail.ru

В. Н. Княгина, **В. С. Монахов** (Гомель, Беларусь)

Нильпотентность второго коммутанта конечной группы с холловски субнормально вложенными подгруппами Шмидта

Рассматриваются только конечные группы. Используются стандартные обозначения и общепринятая терминология. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в [1].

Группы с ограничениями на подгруппы Шмидта исследовались в различных работах. Например, в [2-4] изучены группы с субнормальными подгруппами Шмидта, а в [5] — с холловыми подгруппами Шмидта.

Подгруппа H группы G называется холловски субнормально вложенной в G, если существует субнормальная подгруппа N в G такая, что $H \leq N$ и H является холловой подгруппой в N, т. е. $(|H|, |N : H|) = 1$. Ясно, что каждая холлова подгруппа и каждая субнормальная подгруппа будут холловски субнормально вложенными. Группы с холловски субнормально вложенными подгруппами изучались, например, в [6,7].

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если в конечной группе G каждая подгруппа Шмидта холловски субнормально вложена, то второй коммутант группы G нильпотентен.

Пример. Группа $S = \langle a, b \mid a^3 = b^4 = e,\ a^b = a^{-1} \rangle$ является группой Шмидта. Группа $G = [E_{5^2}]S$ из голоморфа элементарной абелевой группы E_{5^2} порядка 25 обладает только следующими подгруппами Шмидта: самонормализуемая подгруппа S; нормальная в G подгруппа $[E_{5^2}]\langle a \rangle$; субнормальная в G подгруппа $[E_5]\langle b^2 \rangle$, где E_5 — любая подгруппа порядка 5 из E_{5^2}. Поскольку $F(G) = E_{5^2}$, то группа G не будет метанильпотентной, а значит ее коммутант не нильпотентен.

Литература. [1] В. С. Монахов. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Труды Укр. матем. конгресса 2001. Киев: Институт математики НАУ. 2002, секция № 1. С.81–90. [2] В. Н. Княгина, В. С. Монахов. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сибирский матем. журн. 2004. Том 45, № 6. С. 1316–1322. [3] В. А. Ведерников. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Том 46, № 6.

С. 669-687. [4] V.N. Kniahina, V.S. Monakhov. Finite groups with Hall Schmidt subgroups //Publ. Math. Debrecen. 2012. Vol. 81, № 3–4. P. 341–350. [5] A. Al-Sharo Kh., A.N. Skiba. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Commun. Algebra. — 2017. Vol. 45. — P. 4158–4165. [6] V.N. Kniahina, V.S. Monakhov. On Hall embedded subgroups of finite groups // Journal of Group Theory. 2015. Vol. 18, № 4. P. 565–568. [7] A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, Qiao ShouHong. On Hall subnormally embedded subgroups of finite groups // Monatsh Math. 2016. Vol. 181. P. 753-760.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

e-mail: knyagina@inbox.ru; victor.monakhov@gmail.com

И. Б. Кожухов, **А. М. Пряниников** (Москва)

Полигоны, у которых решётка конгруэнций удовлетворяет тождеству

Полигон X над полугруппой S (см. [1]) – это множество X месте с отображением $X \times S \to X$, $(x,s) \mapsto xs$ таким, что $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s,t \in S$. Понятие полигона является алгебраическим выражением понятия автомата (без выхода). Кроме того, понятие полигона фактически совпадает с понятием унарной алгебры.

Пусть Con$X$ обозначает решётку конгруэнций полигона X. В этой решётке наименьшим элементом является отношение равенства $\triangle = \{(x,x) | x \in X\}$, а наибольшим – универсальное отношение $\nabla = X \times X$. Алгебры, у которых решётка конгруэнций дистрибутивна или модулярна, интенсивно изучались специалистами разных областей общей алгебры. Вообще, конгруэнц-дисрибутивные и конгруэнц-модулярные алгебры – это целое направление абстрактной алгебры.Что касается полигонов, то над некоторыми "хорошими" полугруппами все полигоны с дистрибутивной или модулярной решёткой конгруэнций могут быть описаны. В частности, в работе [2] это сделано для полигонов над прямоугольными связками, т.е. полугруппами вида $L \times R$, где L и R обозначают соответственно полугруппу левых и полугруппу правых нулей.

Дистрибутивные и модулярные решётки образуют многообразия решёток – они задаются тождествами $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ и $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (z \wedge (x \vee y))$ соответственно. В связи с вышесказанным кажется естественным изучение универсальных алгебр, у которых решётка конгруэнций удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству.

Для конечных полугрупп справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть X – полигон над конечной полугруппой. Тогда решётка конгруэнций $\mathrm{Con}X$ удовлетворяет какому-либо нетривиальному тождеству в том и только том случае, если X конечен.

Пусть $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ обозначает регулярную рисовскую матричную полугруппу над группой с нулём $G \cup \{0\}$ с сэндвич-матрицей P; регулярность равносильна тому, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы P есть ненулевые элементы (см. [2, гл. 3]). Согласно хорошо известной теореме Сушкевича – Риса регулярные рисовские матричные полугруппы – это в точности вполне 0-простые полугруппы. Та же теорема утверждает, что рисовские матричные полугруппы без нуля $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ – это в точности вполне простые полугруппы. Отметим, что над полугруппами с нулём естественно рассматривать полигоны с нулём, т.е. полигоны, в которых имеется элемент θ такой, что $x0 = \theta s = \theta 0 = \theta$ при всех $x \in X$, $s \in S$. Для вполне 0-простых и вполне простых полугрупп справедливы утверждения, аналогичные теореме 1.

Теорема 2. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ – вполне 0-простая полугруппа и $|G|, |I| < \infty$. Тогда для любого полигона X с нулём над S выполняется следующее: решётка конгруэнций $\mathrm{Con}X$ удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если X конечен.

Теорема 3. Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ – вполне простая полугруппа и $|G|, |I| < \infty$. Тогда для любого полигона X над S выполняется следующее: решётка конгруэнций $\mathrm{Con}X$ удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если X конечен.

Если I – бесконечное множество, то утверждения теорем 2 и 3 неверны, как показывают утверждения 1,2.

Утверждение 1. Существует вполне 0-простая полугруппа $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и бесконечный полигон X с нулём над S такие, что $|G| = 1$, а решётка конгруэнций $\mathrm{Con}X$ двухэлементна (а значит, удовлетворяет нетривиальному тождеству).

Утверждение 2. Существует вполне простая полугруппа $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и бесконечный полигон X над S такие, что G – группа подстановок S_3, а решётка конгруэнций $\mathrm{Con}X$ двухэлементна.

Литература. [1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V., Monoids, acts and categories. N.Y. - Berlin, Walter de Gruyter, 2000. [2] Кожухов И. Б., Пряничников А. М., Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой (в печати). [3] Клиффорд А. Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, т. 1, 1972, т. 2, 1974.

НИУ «МИЭТ», МГУ им М.В. Ломоносова

e-mail: kozhuhov_ i_ b@mail.ru, genary@ya.ru

В. А. Койбаев (Владикавказ)

К вопросу В.М.Левчука

1. Постановка вопроса и его история. В Коуровской тетради [1, вопрос 15.46] сформулирован вопрос В. М. Левчука о допустимости (замкнутости) ковров (элементарных сетей). Этот вопрос (точнее, ее SL-вариант) звучит следующим образом. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть (элементарный ковер) порядка $n \geqslant 3$ над полем K. Верно ли, что для допустимости ковра (элементарной сети) $\sigma = (\sigma_{ij}),\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, необходимо и достаточно допустимость подковров (подсетей) $\begin{pmatrix} * & \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} & * \end{pmatrix}$ второго порядка (для любых $i \neq j$).

Достаточным условием для успешного решения указанного вопроса является вопрос поставленный Я.Н.Нужиным о справедливости равенства

$$E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K),\ \ t_{ji}(K)\rangle = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}),\ \ t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle \qquad (1)$$

для всех $i \neq j$, где $\sigma = (\sigma_{ij})$ — замкнутая элементарная сеть степени $n \geq 3$ над полем K, $E(\sigma)$ — элементарная сетевая подгруппа (то есть подгруппа, порожденная всеми корневыми подгруппами $t_{ij}(\sigma_{ij})$, $i \neq j$). Включение $(\supseteq)$ очевидно, поэтому вопрос о равенстве (1) состоит в проверке включения $(\subseteq)$ в (1).

В настоящей заметке мы приводим пример поля K и элементарной замкнутой (допустимой) неприводимой сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка $n \geqslant 3$ над полем K, для которой подгруппа $E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K),\ \ t_{ji}(K)\rangle$ не содержится в группе $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}),\ \ t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$. Для простоты изложения, не умаляя общности, мы полагаем $i = 1,\ j = 2$.

Напомним известные определения, которыми мы пользуемся в настоящей заметке. Система аддитивных подгрупп $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, поля (или кольца) K называется *сетью* порядка n над полем K, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j [2]. Для сети принят также термин *ковер* [3], [4]. Такая же система, но без диагонали, называется *элементарной сетью (элементарным ковром)* [1, вопрос 15.46], [2–4]. Полную или элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. Назовем элементарную сеть σ *замкнутой (допустимой)*, если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций.

2. Построение примера. Пусть R — произвольная коммутативная область целостности с 1, $R[x]$ — кольцо многочленов от одной переменной x с коэффициентами из R, $K = R(x)$— поле всех рациональных функций $\frac{f}{g}$, $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$. Для неотрицательного целого $n \in \mathbb{N} \cup 0$ рассмотрим идеал

$$R_n[x] = \{c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \ldots + c_m x^m : \ m \geqslant n, \ c_i \in R\}$$

кольца $R[x] = R_0[x]$. Очевидно, что $(n, s \in \mathbb{N} \cup 0)$

$$R_n[x] R_s[x] = R_{n+s}[x], \quad R_n[x] \supseteq R_{n+1}[x] \supseteq R_{n+2}[x] \ldots. \qquad (2)$$

Рассмотрим замкнутую элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ (порядка $n \geqslant 3$) идеалов кольца $R[x]$: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = R_2[x]$, $\sigma_{ij} = R_1[x]$ для остальных $i \neq j$. В силу (2) построенная таблица $\sigma = (\sigma_{ij})$ является замкнутой элементарной сетью над кольцом $R[x]$ (или над полем $K = R(x)$) порядка n.

Теорема. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда для построенной элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ подгруппа $E(\sigma) \cap \langle t_{12}(K), \ t_{21}(K)\rangle$ не содержится в группе $\langle t_{12}(\sigma_{12}), t_{21}(\sigma_{21})\rangle$.

Литература. [1] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск. 2010. Издание 17-е. [2] З. И. Боревич, О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями. // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. **75**(1978), 22–31. [3] В. М. Левчук, Замечание к теореме Л. Диксона. Алгебра и логика, **22**(1983), № 5, 504-517.[4] V. A. Koibaev, Y. N. Nuzhin, Subgroups of the Chevalley Groups and Lie Rings Definable by a Collection of Additive Subgroups of the Initial Ring. Journal of Mathematical Sciences, **201**(2014), Issue 4, 458-464.

Северо-Осетинский госуниверситет

Южный математический институт ВНЦ РАН

e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

О. О. Комилов (Душанбе,Таджикистан)

Классификация квазигрупп малых порядков по тождествам

Известно, что алгебраическим эквивалентом латинского квадрата является квазигруппа [1]. Алгебраический аппарат теории квазигрупп в основном построен В.Д.Белоусовым и его учениками. Задача получения точной формулы для подсчёта числа *L(n)* латинских квадратов порядка n в общем случае не решена. Известны следующие оценки для $L(n)$:

$$\frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \leq L(n) \leq \prod_{k=1}^{n} (k!)^{n/k}$$

Например, для случая $L(11)$ получим 48-значное число.

В докладе при некоторых ограничениях, например, для известных классов квазигрупп малых порядков получены точные результаты. Квазигруппы 4-го и 5-го порядков охарактеризованы различными известными тождествами. Получены количественные результаты относительно основных тождеств квазигрупп 4-го и 5-го порядков. На языке C++ и в интегрированной среде разработки Delphi 10 Seattle составлены программы, с помощью которых найдены все виды квазигрупп, соответствующие этим тождествам. Полученные результаты приведены в следующей таблице:

Некоторые основные тождества			Количество квазигрупп порядка 4	Количество квазигрупп порядка 5
1	$xy \cdot z = x \cdot yz$	Ассоциативность	16	30
2	$yx \cdot zx = yz$	Транзитивность	16	30
3	$x \cdot yz = xy \cdot xz$	Левая дистрибутивность	2	18
4	$x \cdot xy = xx \cdot y$	Левая альтернативность	16	30
5	$xy \cdot x = x \cdot yx$	Элластичность	98	862
6	$(x \cdot yz)\, x = xy \cdot zx$	Тождество Муфанг	16	30
7	$xx = x$	Идемпотетность	2	48
8	$xx = yy$	Унипотентность	96	6720
9	$x \cdot xy = yx$	Тождество Стейна	2	6
10	$x \cdot xy = y$	Левый закон «ключей» Сада	96	720

Литература. [1] В. Д. Белоусов. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.

Таджикский национальный университет

e-mail: okil.komilov@yandex.ru

Е. И. Компанцева (Москва)

Абелевы MT-группы и кольца на них

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu : G \otimes G \to G$, группу $MultG = Hom(G \otimes G, G)$ называют группой умножений группы G. Абелева группа G с заданным на ней умножением определяет некоторое кольцо, которое называется кольцом на G.

Известно [1], что любое умножение на периодической абелевой группе G определяется его сужением на базисную погруппу B группы G, то есть $MultG \cong Hom(B \otimes B, G)$. Этот факт позволяет строить и изучать кольца не только на периодических группах, но и на смешанных абелевых группах G, обладающих следующим свойством: любое умножение на периодической части $T(G)$ группы G однозначно продолжается до умножения на всей группе. Такие группы называются MT-группами, проблема их изучения сформулирована в [2]. Очевидно, $MultG \cong MultT(G) = Hom(B \otimes B, T(G))$ для MT-группы G.

Настоящая работа посвящена изучению MT-групп и колец на них. Для смешанной абелевой группы G будем использовать следующие обозначения: $\Lambda(G)$ – множество простых чисел p, для которых p-компонента $T_p(G)$ группы $T(G)$ отлична от нуля, G^1_Λ – подгруппа всех элементов группы G, имеющих бесконечную p-высоту для любого $p \in \Lambda(G)$, $End\ G$ и $E(G)$ – группа и кольцо эндоморфизмов группы G соответственно.

Теорема 1. Для любой MT-группы G факторгруппа G/G^1_Λ изоморфна сервантной подгруппе $\mathbb{Z}$-адического пополнения $\widehat{B}$ базисной подгруппы B группы $T(G)$.

Учитывая, что умножения на алгебраически компактных абелевых группах (в частности, на $\widehat{B}$) полностью описаны [3], теорема 1 позволяет изучать кольца на MT-группе G с нулевой подгруппой G^1_Λ, вкладывая их в кольца на $\mathbb{Z}$-адическом пополнении прямой суммы циклических групп.

Для исследования колец на произвольной MT-группе G достаточно выяснить, какую роль в этих кольцах играет подгруппа G^1_Λ. В [4] определена подгруппа $F_G = \langle \Phi(G) \mid \Phi \in Hom\ (G, End\ G) \rangle$ группы $End\ G$ и показано, что F_G является идеалом кольца $E(G)$. Согласно [1], абсолютным аннулятором абелевой группы G называется пересечение $Ann^*(G)$ аннуляторов всех колец на G.

Теорема 2. Если G – MT-группа, то ее подгруппа $F_G(G^1_\Lambda) = \langle \varphi(G^1_\Lambda) \mid \varphi \in F_G \rangle$ содержится в абсолютном аннуляторе $Ann^*(G)$.

Теорема 2 означает, что для каждого умножения μ на MT-группе G подгруппы $\mu(G \otimes G^1_\Lambda)$ и $\mu(G^1_\Lambda \otimes G)$ содержатся в аннуляторе любого кольца на G.

Следствие 3. В любом кольце на MT-группе G подгруппа G^1_Λ является нильпотентным идеалом, степень нильпотентности которого не больше трёх.

Литература. [1] L. Fuchs. Abelian groups, Switzerland: Springer Int. Publ., 2015. [2] Topics in abelian groups, Chicago, Ill., 1963. [3] E. I. Kompantseva. Torsion-free rings, J.Math.Sci., 171 (2010), 213–247. [4] Fried E. On the subgroups of abelian groups that are ideals in every ring, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, 51–55.

Московский педагогический государственный университет
Финансовый университет при Правительстве РФ

e-mail: kompantseva@yandex.ru

М. В. Кондратьева (Москва)

О примитивном элементе для систем линейных дифференциальных уравнений.

Понятия и факты изложены в [1], [2]. Одним из основных объектов изучения дифференциальной алгебры является дифференциальный размерностный многочлен, введенный Э.Колчиным (полином Колчина). Это аналог размерности в алгебраической геометрии, и оценка его коэффициентов относится к классическим нерешенным проблемам дифференциальной алгебры.

Колчиным доказана оценка старшего коэффициента при условии, что степень размерностного многочлена на 1 меньше количества дифференцирований. Это до сих пор является основным продвижением в задаче оценки старшего коэффициента для нелинейных систем. В [2] опровергнуты некоторые полиномиальные гипотезы Колчина. В [3] доказана грубая оценка старшего коэффициента при любом значении дифференциальной размерности, включающая функцию Акермана. Вопрос о том, можно ли доказать дважды экспоненциальную верхнюю оценку для нелинейных систем, пока открыт.

В работе Д.Ю.Григорьева [4] найдена верхняя оценка типовой дифференциальной размерности системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных. $a_d \leq n(4m^2nh)^{4^{m-d-1}(2(m-d))}$. Однако неизвестна нижняя оценка, и вопрос о существовании полиномиальной верхней оценки открыт.

Введем необходимые определения. Дифференциальным кольцом будем называть коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с конечным множеством $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ попарно коммутирующих дифференцирований на $\mathbb{K}$. Вместо дифференциальный будем писать $\Delta-$. Пусть теперь $\mathbb{F}$ – $\Delta-$поле характеристики нуль, D — кольцо линейных $\Delta-$операторов над полем. Рассмотрим кольцо $\Delta-$многочленов $R = \mathbb{F}\{y_i | 1 \le i \le n\}$, обозначим через $R_s = \mathbb{F}(\theta(s)y_i \mid 1 \le i \le n,\ \mathrm{ord}\ \theta(s) \le s)$ подкольцо (не являющееся дифференциальным) многочленов порядка не выше s. Для подмножества Σ кольца R через $[\Sigma]$ обозначим $\Delta-$идеал, порожденный Σ в R. Всюду далее рассматриваем линейные системы Σ.

Колчин (см. [1]) определил понятие дифференциального размерностного многочлена, $\omega_\Sigma(s)$, значение которого для достаточно больших s равно $\dim_{\mathbb{F}} \Sigma \cap\ R_s$. Это целозначный многочлен степени не выше m, имеющий инвариантами степень (который называют $\Delta-$типом Σ) и старший коэффициент (типовая размерность).

Нас интересует такой вопрос. Как оценить типовую $\Delta-$размерность $[\Sigma]$ через порядки $e_i = \mathrm{ord}_{y_i} f,\ f \in \Sigma$? Известна следующая

Теорема 1.(см. 5.6.7, [2]) Пусть Σ – система линейных $\Delta-$уравнений, $n = 1$ и степень многочлена Колчина равна $m - 2$. Тогда $a_{m-2}(\omega_{[\Sigma]}) \le e_1^2$. Эта оценка является достижимой.

Теорема является обобщением классической теоремы Безу, которая утверждает, что если дифференцирования действуют на поле тривиально, и все уравнения Σ однородны, то выполняется неравенство $a_d \le h^{m-d}$, где d – степень характеристического многочлена Гильберта, $h = \max_{1 \le i \le n} e_i$.

Наша цель – доказать оценку типовой Δ-размерности в случае $\Delta-$типа $m - 2$ для $n > 1$. Сначала рассмотрим пример, который дает нижнюю оценку.

Рассмотрим такую систему Σ

$$
\begin{array}{lllll}
\partial_1^{e_1} y_1 = & 0; & & & \\
\partial_2^{e_1} y_1 = & \partial_1^{e_2} y_2; & & & \\
 & \partial_2^{e_2} y_2 = & \partial_1^{e_3} y_3; & & \\
 & & \partial_2^{e_3} y_3 = & \partial_1^{e_4} y_4; & \\
 & & \cdots & & \ldots; \\
 & & & \partial_2^{e_i} y_i = & \partial_1^{e_{i+1}} y_{i+1}; \\
 & & & \cdots & \ldots; \\
 & & & & \partial_2^{e_{n-1}} y_{n-1} = \quad \partial_1^{e_n} y_n; \\
 & & & & \qquad\qquad\qquad \partial_2^{e_n} y_n = 0.
\end{array}
$$

Для системы Σ выполняется следующее

$$\omega_{[\Sigma]}(s) = \sum_{i_1+\dots+i_n=2} e_1^{i_1}\dots e_n^{i_n}\binom{s+m-2}{m-2},$$

где сумма берется по всем таким наборам $(i_1 i_2 \dots i_n)$, что $i_1 \le i_2 \dots \le i_n$.

Этот пример дает нижнюю квадратичную оценку старшего коэффициента для систем $\Delta-$типа $m-2$.

С целью получить верхнюю оценку, докажем конструктивный вариант теоремы о примитивном элементе, который представляет самостоятельный интерес. А именно, линейная система от n неизвестных порядка h эквивалентна системе уравнений от одной неизвестной порядка не выше $O(m)(n+1)h$.

Теорема 2. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{F}\{y_1,\dots,y_n\}$ – совместная система линейных $\Delta-$уравнений, $\operatorname{ord} f_{y_i} \le e_i$ для всех $f \in \Sigma$, $1 \le i \le n$ и $a_m(\omega_{[\Sigma]}) = 0$. Тогда в некотором расширении поля $\mathbb{F}$ существуют элементы $c_2,\dots,c_n$ такие, что модуль дифференциалов системы Σ порожден одним элементом $\psi\delta(y_1)+c_2\delta(y_2)+\dots c_n\delta(y_n)$, Обозначим через $\lambda_i \in D:\ \lambda_i\psi = \delta(y_i)$. Тогда порядок каждого λ_i не выше

$$2^m(e_1+\dots+e_n).$$

Как следует из доказательства, для поиска примитивного элемента достаточно продифференцировать нужное число раз некоторую систему и исключить из полученной линейной системы переменные (например, методом Гаусса). Следствием теорем 1 и 2 является

Теорема 3. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{F}\{y_1,\dots,y_n\}$ – система линейных $\Delta-$уравнений, $m = \operatorname{Card}\Delta$, и пусть $\operatorname{ord}_{y_i} f \le e_i$ для всех $f \in \Sigma$, $1 \le i \le n$. Предположим, что система $[\Sigma]$ имеет $\Delta-$тип $m-2$. Тогда ее типовая $\Delta-$размерность a_{m-2} не превосходит

$$2^{2m+2}(e_1+\dots+e_n)^2.$$

Итак, в случае системы линейных $\Delta-$уравнений мы получили верхнюю и нижнюю квадратичную оценку типовой $\Delta-$размерности для $\Delta-$типа $m-2$. Это более точная, чем в работе [4] оценка.

Литература. [1] E.R.Kolchin, Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, 1973. [2] M.V.Kondratieva, A.B.Levin, A.V.Mikhalev, E.V.Pankratiev, Differential and Difference Dimension Polynomials, Kluwer Academic Publisher, 1999. [3] M.V.Kondratieva, An Upper Bound for Minimizing Coefficients of Dimension Kolchin Polynomial, Programming and

Computer Software, v. 36, N 2 (2010), 83–86. [4] D.Grigoriev, Weak Bezout inequality for D-modules, Journal of Complexity, v. 21 (2005), 532–542.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: kondratieva@sumail.ru

В. И. Копейко (Элиста)

Символы унитарной $K-$теории[1]

Пусть (R, λ, Λ) - унитарное кольцо, где R - ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x \to \bar{x}$, симметрия: λ - центральный элемент кольца R, удовлетворяющий условию $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$, система параметров: Λ - аддитивная подгруппа R такая, что $\Lambda_{min} = \{x - \lambda\bar{x}, x \in R\} \leq \Lambda \leq \Lambda_{max} = \{x \in R : x = -\lambda\bar{x}\}$, причем $\bar{x}\Lambda x \subseteq \Lambda$ для любого $x \in R$. Отметим, что $\overline{\Lambda} = \{\bar{x}, x \in \Lambda\}$ также является системой параметров в R. Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$, положив $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.

Определение 1. Матрица $a = (a_{ij})(\in M_r(R))$ называется $\Lambda-$эрмитовой, если $a = -\lambda a^*$ и все диагональные элементы матрицы a содержатся в Λ.

Положим $I_r^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & e_r \\ \lambda e_r & 0 \end{pmatrix}$, где e_r - единичная матрица порядка r.

Определение 2. Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$, где $a, b, c, d \in M_r(R)$ называется $\Lambda-$унитарной, если $\alpha^* I_r^\lambda \alpha = I_r^\lambda$ и все диагональные элементы матриц ab^*, cd^* содержатся в Λ.

Множество $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ всех $\Lambda-$унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) $\Lambda-$унитарной группой. Переход к $\Lambda-$унитарным группам над унитарными кольцами унифицирует изучение классических групп над кольцами. Например, если R - коммутативное кольцо с тривиальной инволюцией, то симплектическая группа $Sp_{2r}(R)$ есть группа $U_{2r}^{-1}(R, \Lambda_{max} = R)$, а ортогональная группа $O_{2r}(R)$ есть группа $U_{2r}^1(R, \Lambda_{min} = 0)$.

Подгруппа $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$, порожденная матрицами вида $H(a) = diag(a,$
$(a^*)^{-1})$, $T_{12}(b) = \begin{pmatrix} e_r & b \\ 0 & e_r \end{pmatrix}$, $T_{21}(c) = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ c & e_r \end{pmatrix}$, где $a \in E_r(R)$, b - $\overline{\Lambda}-$эрмитова, c - $\Lambda-$эрмитова обозначается $EU_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ и называется элементарной (гиперболической) $\Lambda-$унитарной группой. Пусть

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00148).

$U^\lambda(R,\Lambda) = \cup U^\lambda_{2r}(R,$
$\Lambda)$, $EU^\lambda(R,\Lambda) = \cup EU^\lambda_{2r}(R,\Lambda)$ - стабильные группы. В силу унитарного аналога леммы Уайтхеда [1], группа $EU^\lambda(R,\Lambda)$ совпадает с коммутантом группы $U^\lambda(R,\Lambda)$ и, в частности, корректно определена (абелева) группа $K_1U^\lambda(R,\Lambda) = U^\lambda(R,\Lambda)/EU^\lambda(R,\Lambda)$. Класс матрицы $\alpha(\in U^\lambda(R,\Lambda))$ в группе $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ будем обозначать $[\alpha]$.

Предложение 1. Если $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U^\lambda_{2r}(R,\Lambda)$, то $\alpha_1\alpha_2^{-1} = T_{21}(c_1d_2^* + \lambda d_1c_2^*) \in EU^\lambda_{2r}(R,\Lambda)$. В частности, $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ в группе $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$.

Следствие 1. В обозначениях и условиях предложения, матрица $c_1d_2^* + \lambda d_1c_2^*$ - $\Lambda-$эрмитова.

Следствие 2. Произвольный элемент группы $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ однозначно определяется верхней половиной $\Lambda-$унитарной матрицы, представляющей данный элемент.

Замечание 1. В действительности, произвольный элемент группы $K_1U^\lambda(R,$
$\Lambda)$ однозначно определяется любой из половинок (верхней, нижней, правой или левой) $\Lambda-$унитарной матрицы, представляющей заданный элемент.

Таким образом, если положить $TP^\lambda_r(R,\Lambda) = \{(a,b), a,b \in M_r(R) : \exists c,d \in M_r(R)$ такие, что $[a,b] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U^\lambda_{2r}(R,\Lambda)\}$, то получаем корректно определенный унитарный (матричный) символ $[\ ,\ ] : TP^\lambda_r(R,\Lambda) \to K_1U^\lambda(R,\Lambda) : (a,b) \to [a,b]$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) $[a+bt,b] = [a,b]$ для произвольной $\Lambda-$унитарной матрицы $t \in M_r(R)$;

1)' $[a,b+as] = [a,b]$ для произвольной $\overline{\Lambda}-$унитарной матрицы $s \in M_r(R)$;

2) если $a \in GL_r(R)$, то $[a,b] = [a,0]$.

Положим $LP^\lambda_r(R,\Lambda) = \{(c,d), c,d \in M_r(R) : \exists a,b \in M_r(R)$ такие, что $[c,d]'$
$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U^\lambda_{2r}(R,\Lambda)\}$. В результате получаем корректно определенный унитарный (матричный) символ $[\ ,\ ]' : LP^\lambda_r(R,\Lambda) \to K_1U^\lambda(R,\Lambda) : (c,d) \to [c,d]'$, связанный с предыдущим символом следующим равенством (свойство симметрии):

3) $[a,b] = [\lambda b,a]'$ для произвольной $(a,b) \in TP^\lambda_r(R,\Lambda)$.

Так как в обозначениях и условиях предложения 1, $H(\alpha_1)H(\alpha_2^{-1}) = H(\alpha_1\alpha_2^{-1}) = H(T_{21}(c_1 d_2^* + \lambda d_1 c_2^*)) \in EU_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, то для произвольной $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ класс гиперболической матрицы $H(\alpha)$ в группе
$K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ совпадает с классом $H([a,b])$. В результате получаем еще один корректно определенный унитарный (матричный) символ $\{\ ,\ \} :\ TP_r^{\lambda}(R,\Lambda)$
$\to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) : (a,b) \to \{a,b\} = H([a,b])$.

Предложение 2. Для произвольной пары $(a,b),(a^*,c^*) \in TP_r^{\lambda}(R,\Lambda)$ справедливо равенство: $\{a,b\}[a^*,c^*] = [a,-\lambda bc^*b]$.

Следствие. Если матрица a - $\overline{\Lambda}$−эрмитова, то $\{a,b\} = [a,-\ \lambda b^2][I_r^{\lambda}]^{-1} = [-\ \lambda b^2,\bar{\lambda}a]$, а равенство из предложения 2 принимает вид: $[a,-\ \lambda b^2][a^*,c^*] = [a,-\lambda bc^*b][I_r^{\lambda}]$.

Замечание 2. Классический симплектический символ Меннике [2] есть частный случай введенного символа [,], получаемый при $r = 1$. В этом случае R - коммутативное кольцо с тривиальной инволюцией, $\lambda = -1$, $\Lambda = R$, а последнее равенство принимает вид: $[a,b^2][a,c] = [a,b^2c]$ для произвольной пары $(a,b),(a,c)$ унимодулярных строк (мультипликативность символа).

Литература. [1] H. Bass, Unitary algebraic $K-$theory. Lect.Notes Math, 343 (1973), 57–265. [2] Х. Басс, Дж. Милнор, Ж.- П. Серр, Решение конгруэнцпроблемы для $SL_n(n \geq 3)$ и $Sp_{2n}(n \geq 2)$. Математика, 15(1971), 44–60.

Калмыцкий государственный университет имени Б.Б.Городовикова

e-mail: kopeiko52@mail.ru

С. С. Коробков (Екатеринбург)

О решёточных изоморфизмах конечных локальных колец

Рассматриваются ассоциативные кольца. Под решёточным изоморфизмом (иначе проектированием) кольца R на кольцо R^{φ} понимается изоморфизм φ решётки подколец $L(R)$ кольца R на решётку подколец $L(R^{\varphi})$ кольца R^{φ}. При этом кольцо R^{φ} называется проективным образом кольца R, а кольцо R — проективным прообразом кольца R^{φ}.

Пусть R — конечное кольцо с единицей, $\operatorname{Rad} R$ — радикал Джекобсона кольца R. Кольцо R называется локальным, если фактор-кольцо $R/\operatorname{Rad} R$ — поле. Конечное локальное кольцо имеет характеристику p^k, где p — простое число, а k — натуральное число. Выясняется следующий вопрос: при каких условиях проективный образ конечного локального кольца является локальным кольцом?

Если кольцо R коммутативно, то согласно [1, теорема XIX.4] R представимо в виде: $R = S \oplus N$, где $S = GR(p^k, m)$ — кольцо Галуа, N — S-модуль из $\operatorname{Rad} R$. Кольца Галуа и конечные поля являются локальными кольцами. В работе [2] доказано, что проективным образом конечного поля $GF(p^k)$ при $k \neq q^n$ и $k \neq p_1 p_2$ (q, p_1, p_2 — простые числа), является конечное поле, а в [3] доказано, что $R^\varphi \cong R$, если $R = GR(p^k, m)$ при $k > 1$ и $m > 1$. При $m = 1$ решётка подколец кольца $GR(p^k, 1)$ является конечной цепью и потому среди проективных образов этого кольца есть кольца, не являющиеся локальными кольцами.

Получены следующие результаты:

Теорема 1. Пусть конечное коммутативное кольцо R с единицей определено следующим образом: $R = S + N$, где $S \cong GR(p^n, m)$, $n \geqslant 1$, $m > 1$, N — нильпотентный идеал, не содержащийся в S. Пусть φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Тогда справедливы следующие утверждения:

1)R^φ — кольцо с единицей;

2) $S^\varphi \cong S$;

3) N^φ — нильпотентное кольцо;

4) $(\operatorname{Rad} R)^\varphi$=$\operatorname{Rad} R^\varphi$;

5) $|R^\varphi| = |R|$;

6) $R^\varphi = S^\varphi + N^\varphi$;

7) R^φ коммутативно тогда и только тогда, когда коммутативно подкольцо N^φ.

Теорема 2. Пусть решётка подколец $L(R)$ конечного однопорождённого локального кольца R с единицей не является цепью и $R/\operatorname{Rad} R$ — непростое поле. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда R^φ — конечное однопорождённое локальное кольцо с единицей.

Теорема 3. Пусть R — конечное коммутативное локальное кольцо R с единицей и φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Тогда, если решётка $L(R)$ не является цепью, то R^φ — конечное локальное кольцо с единицей.

Построен пример двух решёточно изоморфных конечных локальных колец, содержащих единичные элементы, из которых только одно кольцо коммутативно.

Будем говорить, что кольцо R определяется своей решёткой подколец, если R изоморфно своему проективному образу R^{φ} для любого проектирования φ.

Теорема 4. Пусть R — конечное коммутативное локальное кольцо простой характеристики с единицей. Пусть $\operatorname{Rad} R \neq \{0\}$, $(\operatorname{Rad} R)^2 = \{0\}$ и $R/\operatorname{Rad} R$ — непростое поле. Тогда кольцо R определяется своей решёткой подколец.

Литература. [1] B. R. McDonald, Finite rings with identity. N.Y., 1974. [2] С. С. Коробков, Решёточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов, Изв. Урал. гос. ун-та. Математика и механика, № 22, вып. 4 (2002), 81–93. [3] С. С. Коробков, Проектирования колец Галуа, Алгебра и логика, 54, № 1 (2015), 16–33.

Уральский государственный педагогический университет

e-mail: ser1948@gmail.com

О. В. Кравцова, **Т. В. Моисеенкова** (Красноярск)

Конечные полуполевые плоскости, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную S_3

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество является полуполем (semifield). Известен способ задания полуполевой плоскости, как и всякой плоскости трансляций, с использованием линейного пространства и специального семейства линейных преобразований, так называемого регулярного множества. Матричное представление регулярного множества определяет геометрические свойства полуполевой плоскости, в том числе строение группы автоморфизмов (коллинеаций).

Решается задача построения матричного представления регулярного множества конечной полуполевой плоскости в предположении, что ее группа автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе S_3. Таким свойством обладает, например, полуполевая плоскость порядка 64, координатизируемая непримитивным полуполем Хентзела–Руа порядка 64 [1].

Задача решена для полуполевой плоскости ранга 2 над своим ядром и подгруппы линейных автотопизмов. В случае произвольного ранга доказан результат:

Теорема. Пусть π – полуполевая плоскость порядка p^n (p – простое), группа автотопизмов которой содержит подгруппу $H \simeq S_3$. Тогда

$n = 2m$ и инволюции подгруппы H фиксируют поточечно различные подплоскости порядка p^m.

Литература. [1] V. M. Levchuk, O. V. Kravtsova, Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 38, No. 4 (2017), 688–698.

Сибирский федеральный университет

e-mail: ol71@bk.ru

Е. М. Крейнес (Москва)

О функции Белого детского рисунка, связанного с пространством модулей $M_{0,5}^{\mathbb{R}}$

Известно, что компактификация Делиня-Мамфорда пространства вещественных кривых рода 0 с 5 отмеченными точками $M_{0,5}^{\mathbb{R}}$ представляет собой 2-мерное многообразие. Однако, это многообразие является неориентируемым. Его ориентирующие накрытие — поверхность в $\mathbb{R}^3$ рода 4. Стандартное клеточное разбиение возникшей поверхности задает на ней детский рисунок. Мы вычислили функцию Белого этого рисунка. В частности, оказалось, что она определена на кривой Бринга.

Доклад основан на результатах совместной работы с Н.Я. Амбург.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: elena_msu@mail.ru

Т. Э. Кренкель (Москва)

Матрицы Адамара, алгебры Паули и гипотеза Цаунера

Элементы матрицы Адамара H принимают значения $\{\pm 1\}$ и

$$HH^t = NI_N.$$

Пэли [1] высказал гипотезу, что матрицы Адамара существуют при N=2 и N=4k. Наименьший порядок, при котором матрица Адамара неизвестна равен 668. Матрицы Адамара находят разнообразные применения в различных разделах дискретной математики [2].

Алгебры Паули A_{2^n-1}, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ имеют четыре образующие в виде эрмитовых матриц 2×2

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и допускают процедуру удвоения.

Алгебры Паули при n=2,3,4,5 описывают пространства состояний двух, трех и т.д. кубит, т.е. пространства состояний четырех-, восьми-, шестнадцати - и т.д. уровневых квантово-механических систем.

По теореме Дембовского-Вагнера [3] алгебры Паули обладают ортогональным разложением

$$DW_n = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_{2^n-1} \oplus H_{2^n} \oplus H_{2^n+1}, \quad n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Гипотеза Цаунера [4] заключается в существовании при всех размерностях $d = 2^n, n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ SIC-POVM (Symmetrical Informationally Complete – Positive Operator Valued Measures) таких, что выполняется условие

$$|\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2 = \frac{1}{d+1}.$$

Литература. [1] R. E. A. C. Paley, On orthogonal matrices. J. Math and Phys., 12:311, 1933. [2] K. J. Horadam. Hadamard Matrices and Their Applications. Prinston University Press, 2007. [3] P. Dembowski. Finite geometries. Springer, 1968. [4] G. Zauner. Quantendesigns. PhD thesis, Univ.Wien, 1999

Московский технический университет связи и информатики

e-mail: krenkel2001@mail.ru

Д. К. Кудрявцев

Длина локально-комплексных алгебр

Изучение длины алгебры как ее фундаментального инварианта началось в конце 20 века с работы [1], где изучаются свойства длины для ассоциативных, а именно матричных, алгебр. Первые результаты для неассоциативного случая были получены не столь давно в работе [2]. Помимо самостоятельного интереса, эти результаты являются первыми шагами в изучении класса локально-комплексных алгебр, базовые свойства которого подробно изучаются в [3].

Рассмотрим конечномерную не обязательно ассоциативную алгебру с единицей A над полем $\mathbb{R}$.

A называется *локально-комплексной*, если произвольный $a \in A \backslash \mathbb{R}$ порождает алгебру, изоморфную алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечный набор ее элементов.

Словом длины k для этой системы называется произведение $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$ с произвольным порядком выполнения умножений, где $i_m \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $L_k(S)$ линейную оболочку над $\mathbb{R}$ всех слов длины не более k.

Говорят, что система элементов $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *порождает алгебру* A, если существует k, такое что $L_k(S)$ совпадает с A. Самое маленькое такое k называется *длиной* данной системы.

Длиной алгебры A называется максимальная длина системы среди всех конечных систем, порождающих A.

Заметим, что если алгебра A ассоциативна, то из $L_k = L_{k+1}$ следует, что для всех $m > k$ выполняется $L_k = L_m$, т.е. порождаемые множества стабилизируются. Отсюда, в частности, ясно, что в ассоциативном случае для порождающей системы $dim L_{n-1} \geq n$, т.к. $dim L_1 \geq 2$, и, значит, длина A не выше $n-1$. В неассоциативном случае это не так.

Теорема 1. Длина локально-комплескной алгебры размерности n не превосходит F_{n-1}, где F_j — последовательность Фиббоначиевых чисел. Оценка является точной.

Теорема 2. Пусть $m_0, \ldots m_{n-1}$ $(n \geq 3)$ - конечная последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условиям:

1. $m_0 = 0$.

2. $m_1 = \ldots = m_k = 1$ для некоторого k от 2 до $n-1$, так что либо $k = n-1$, либо $m_{k+1} > 1$.

3. Последовательность монотонно не убывает.

4. $\forall h$: $k < h \leq n-1$ существует пара чисел $0 < t_1(h) < t_2(h) < m_h$, такая что $m_h = m_{t_1(h)} + m_{t_2(h)}$ и для $k < h_1 < h_2$ верно $t_1(h_1) < t_1(h_2)$

или $t_2(h_1) < t_2(h_2)$.

Тогда существует локально-комплексная алгебра размерности n и длины m_{n-1}.

Автор доклада благодарен своему научному руководителю профессору А.Э. Гутерману за постановку задачи и ценные обсуждения.

Литература. [1] C.J. Pappacena, An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra, J. Algebra, 197 (1997), 535-545. [2] A.E. Guterman, D.K. Kudryavtsev, The lengths of the quaternion and octonion algebras, Journal of Mathematical Sciences (New York). 224: 6 (2017), 826-832. [3] M. Bresar, P. Semrl, S. Spenko, On locally complex algebras and low-dimensional Cayley-Dickson algebras, Journal of Algebra, 327 (2011), 107-125.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: kdk97@rambler.ru

Л. В. Кузьмин (Москва)

Арифметика некоторых ℓ-расширений с тремя точками ветвления

Для нечетного регулярного простого числа ℓ рассматривается круговое поле $k = \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ и его круговое $\mathbb{Z}_\ell$-расширение k_∞. Пусть $K = k(\sqrt[\ell]{a})$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$ такого, что a является ℓ-й степенью в $\mathbb{Q}_\ell$, и $K_\infty = k_\infty \cdot K$. Тогда $G(K_\infty/\mathbb{Q}) \cong G \times \Gamma$, где $G = G(K/\mathbb{Q})$ и $\Gamma \cong \mathbb{Z}_\ell$ – группа Галуа кругового $\mathbb{Z}_\ell$-расширения поля $\mathbb{Q}$. Пусть N – максимальное абелево неразветвленное ℓ-расширение поля K_∞ такое, что в N/K_∞ вполне распадаются все точки, лежащие над ℓ, и $T_\ell(K_\infty) = G(N/K_\infty)$ – модуль Ивасавы $\mathbb{Z}_\ell$-расширения K_∞/K. Из результатов [1] следует

Теорема 1. Пусть в расширении K_∞/k_∞ разветвлены ровно три точки, не лежащие над ℓ. В этом случае группа $T_\ell(K_\infty)$ является циклическим $\mathbb{Z}_\ell[G]$-модулем, причем либо $T_\ell(K_\infty) \cong \mathbb{Z}_\ell^{\ell-1}$ как $\mathbb{Z}_\ell$-модуль, либо группа $T_\ell(K_\infty)$ конечна и имеет не более $\ell - 1$ образующей как $\mathbb{Z}_\ell$-модуль.

Следующий результат показывает, что оценки, даваемые этой теоремой в определенном смысле точны.

Теорема 2. В случае $\ell = 3$ существует бесконечно много полей K, указанного выше типа, таких, что группа $T_\ell(K_\infty)$ имеет ровно две образующих.

На группу $T_\ell(K_\infty)$ действует группа G, кроме того, на ней существует некоторая структура, напоминающая скалярное произведение Вейля. Как показывает следующая теорема, это однозначно определяет действие группы Γ на $T_\ell(K_\infty)$.

Теорема 3. Пусть γ – топологическая образующая группы Γ и $\varkappa$ – значение кругового характера на элементе γ. Тогда γ действует на $T_\ell(K_\infty)$ как умножение на $\lambda := \sqrt{\varkappa} \in \mathbb{Q}_\ell$, где λ обозначает то значение корня, для которого $\lambda \equiv 1 \pmod{\ell}$.

Литература. [1] Л. В. Кузьмин, "Аналог формулы Римана – Гурвица для одного типа l-расширений полей алгебраических чисел", Изв. АН СССР, Сер. матем. **54**, № 2, 1990, 316-338.

Российский научный центр "Курчатовский институт"

e-mail: helltiapa@mail.ru

О. В. Куликова (Москва)

О проблеме обобщенной сопряженности в группе $F/N_1 \cap N_2$

Пусть $F = F(A)$ – свободная группа, порожденная конечным алфавитом A. Пусть N_1 (соотв., N_2) – нормальное замыкание конечного непустого множества R_1 (соотв., R_2) слов в F. Считаем, что множество R_i $(i = 1, 2)$ симметризованно, т.е. все элементы из R_i циклически приведены и для каждого r из R_i все циклические перестановки элементов r и r^{-1} также лежат в R_i.

В работе [1] были получены условия, достаточные для разрешимости проблемы сопряженности в группе $F/N_1 \cap N_2$. Естественным продолжением является рассмотрение в группе $F/N_1 \cap N_2$ проблемы обобщенной сопряженности. Напомним, что по определению в некоторой группе разрешима проблема обобщенной сопряженности, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $u_1, \ldots, u_k$ и $v_1, \ldots, v_k$ определить, существует ли или нет такое слово h, что $h^{-1}u_jh = v_j$ в данной группе для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$. При $k = 1$ получаем проблему сопряженности.

Группа $F/N_1 \cap N_2$, если ее рассматривать, как подгруппу прямого произведения F/N_1 и F/N_2, является подпрямым произведением F/N_1 и F/N_2. Пример подпрямого произведения (точнее расслоенного произведения) с неразрешимой проблемой сопряженности (а значит, и с неразрешимой проблемой обобщенной сопряженности) можно найти в работе Ч.Миллера [2].

Проблема обобщенной сопряженности для различных групп рассматривалась в работах М.Д. Гриндлингера, В.Н. Безверхнего и других (см. работу [3] и ссылки в ней).

Обобщением Теоремы 1 из [1] является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть F – свободная группа, порожденная конечным алфавитом A, N_1 (соотв., N_2) – нормальное замыкание конечного непустого симметризованного множества R_1 (соотв., R_2) элементов в F.*

Пусть для группы $G_i = F/N_i$ $(i = 1, 2)$ выполняется следующее:

1.1. В G_i разрешима проблема обобщенной сопряженности.

1.2. В G_i существует алгоритм, позволяющий по несократимому слову $x \in F$, $x \neq 1$, определить все $z \in F$ такие, что $x \in \langle z \rangle$ в G_i, причем таких различных элементов z из G_i – конечное число.

1.3. Если $x^n \neq 1$ в G_i, то из $x^n y = y x^n$ в G_i следует $xy = yx$ в G_i для любых $x, y \in G_i$, $n \in \mathbb{N}$.

И пусть для группы $G = F/N_1N_2$ выполняется следующее:

2.1. В G разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу.

2.2. Копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим.

Тогда в $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема обобщенной сопряженности.

Отметим, что для выполнения условия 1.3 достаточно, например, чтобы централизатор любого неединичного элемента в G_i был циклическим.

Определение аторического копредставления (условие 2.2) в терминах диаграмм ван Кампена можно найти, например, в [4] (или в терминах картинок, двойственных объектах к диаграммам ван Кампена, в [1]). Отметим также, что для непересекающихся R_1 и R_2 условие 2.2 обеспечивает равенство $N_1 \cap N_2 = [N_1, N_2]$ (смотри, например, [5, 6]).

Напомним определение малых сокращений $C'(\lambda)$ ([7]). Предположим, что r_1 и r_2 – различные элементы из R, такие что $r_1 \equiv bc_1$ и $r_2 \equiv bc_2$. В этом случае элемент b называется *куском относительно множества R*. Говорят, что *множество R удовлетворяет условию $C'(\lambda)$*, где λ – некоторое положительное действительное число, если из $r \in R$, $r \equiv bc$, где b – кусок, следует $|b| < \lambda |r|$, где $|w|$ – длина слова w в свободной группе F.

В качестве примера применения Теоремы 1 приведем следующее

Следствие. *Если $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$, то в $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема обобщенной сопряженности.*

Литература. [1] О. В. Куликова. О проблеме сопряженности в группе $F/N_1 \cap N_2$. Матем. заметки, 2013, 93:6, с. 853-868. [2] C. F. Miller III. On group-theoretic decision problems and their classification. Annals of

Mathematics Studies, No. 68, Princeton University Press, 1971. [3] В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя, И. В. Добрынина, О. В. Инченко, А. Е. Устян. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера. Чебышевский сб., 2016, том 17, выпуск 4, с. 23-50. [4] А. Ю. Ольшанский. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: "Наука", 1989. [5] M. A. Gutiérrez, J. G. Ratcliffe. On the second homotopy group. Quart. J. Math. Oxford (2) 32, 1981, 45-55. [6] O. V. Kulikova. On intersections of normal subgroups in free groups. Algebra and discrete mathematics, Number 1, 36-67, 2003. [7] Р. Линдон, П. Шупп. Комбинаторная теория групп. М.: "Мир", 1980.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: olga.kulikova@mail.ru

А. Н. Лебедев (Москва)

Обобщенный протокол Диффи–Хеллмана с аутентификацией сторон

Классический протокол Диффи–Хеллмана формирования общего секрета (ключа) парой удаленных пользователей сети [2] выглядит следующим образом: стороны A и B умеют вычислять известные однонаправленные функции $f(x)$, $g(x,y)$; независимо генерируют случайные числа x, y; вычисляют значения $f(x)$, $f(y)$ и обменниваются ими по открытому каналу, а затем вычисляют общий секрет $K = g(x, f(y)) = g(f(x), y)$.

Основными конкретными примерами функций $f(x), g(x,y)$ являются:

$$\begin{aligned} &f(x) = a^x (\mathrm{mod}\ p),\\ &g(x, f(y)) = f(y)^x (\mathrm{mod}\ p) = g(f(x), y) =\\ &\qquad\qquad = f(x)^y (\mathrm{mod}\ p) = a^{x*y} (\mathrm{mod}\ p) \end{aligned} \tag{1}$$

в мультипликативной группе $Z^*(p)$ поля $Z(p)$ [1]; или

$$\begin{aligned} &f(x) = x * P,\\ &g(x, f(y)) = x * (y * P) = g(f(x), y) = y * (x * P) \end{aligned} \tag{2}$$

в группе точек эллиптической кривой $E(a,b,p)$ над полем $Z(p)$, где $|<P>| = q$ — простое число [3].

Главным недостатком оригинального протокола Диффи–Хеллмана является отсутствие гарантированного взаимного подтверждения подлинности сторон (их аутентификации). Поэтому позднее было предложено несколько различных вариантов усложнения протокола с аутентификацией сторон [4, 5, 6].

В докладе представлен метод формирования общего секрета, обобщающий варианты протокола Диффи–Хеллмана с аутентификацией сторон на основе введения новых операций в кольце вычетов $Z(p-1)$ для функций (1); и новых операций в поле вычетов $Z(q)$ как множестве кратностей точки $P \in E(a, b, p)$, для которой $| < P > | = q$ для функций (2).

Операции вводятся так:

$$x \oplus y = \sigma^{-1}(\alpha(\sigma(x) + \sigma(y))), x \otimes y = \sigma^{-1}(\mu(\sigma(x) * \sigma(y))) \qquad (3),$$

где операции сложения $+$ и умножения $*$ - привычные арифметические операции кольца $Z(p-1)$ или поля $Z(q)$, а через $\sigma^{-1}, \alpha, \mu, \sigma$ обозначены подстановки на этом множестве [1].

Теорема 1. Введенные выше операции (3) на множестве $\{0, 1, \ldots, q-1\}$, или $Z(q)$, удовлетворяют всем аксиомам поля на множестве тогда и только тогда, когда подстановка μ есть умножение на некоторое число $\mu \neq 0$, а $\alpha = \mathrm{id}$.

Кроме этих алгебраических требований к новым операциям сложения и умножения для практичесих применений важно, чтобы подстановки $\sigma^{-1}, \alpha, \mu, \sigma$ были легко вычислимы. Исходя из этого требования можно утверждать, что справедлива следующая

Теорема 2. Если на множестве $\{0, 1, \ldots, q-1\}$операции сложения и умножения заданы по формулам

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x + k/m) + (y + k/m) - k/m, \\ x \otimes y &= m * (x + k/m) * (y + k/m) - k/m \end{aligned} \qquad (4)$$

для произвольного k и $m \neq 0$, то относительно этих операций выполняются все аксиомы поля.

Теорема 3. Различные пары чисел (k, m) и (k_1, m_1), где $k, k_1, m, m_1 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $m \neq 0$, $m_1 \neq 0$, задают различные согласованные пары операций (сложения и умножения) конечного поля на множестве $\{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Теорема 4. Если на множестве $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ задана пара операций сложения и умножения по формулам (4) для произвольного k и $m \neq 0$, то для любой циклической группы $< a >$ порядка q может быть следующим образом организован протокол формирования общего секрета с аутентификацией сторон:

стороны A и B умеют вычислять $f(x) = a^x, g(x, f(y)) = g(f(x), y) = a^{x \otimes y}$ в мультипликативной циклической группе <a> порядка q;

независимо генерируют случайные числа $1 < x, y < q$;

вычисляют значения $f(x), f(y)$ и обмениваются ими по открытому каналу;

а затем, зная параметры аутентификации — пару чисел (k, m), вычисляют общий секрет $K = g(x, f(y)) = g(f(x), y) = a^{x \otimes y}$

.

Следствие 5. Если на множестве $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ задана пара операций сложения и умножения по формулам (4) для произвольного k и $m \neq 0$, то для аддитивной циклической группы $< P >$ порядка q в группе точек эллиптической кривой $E(a, b, p)$ может быть следующим образом организован протокол формирования общего секрета с аутентификацией сторон:

стороны A и B умеют вычислять $f(x) = x * P, g(x, f(y)) = g(f(x), y) = (x \otimes y) * P$;

независимо генерируют случайные числа $1 < x, y < q$;

вычисляют значения $f(x), f(y)$ и обмениваются ими по открытому каналу;

а затем, зная параметры аутентификации — пару чисел (k, m), вычисляют общий секрет $K = g(x, f(y)) = g(f(x), y) = (x \otimes y) * P$.

Литература. [1] А. Г. Курош. Теория групп. М.: Наука, 1967. [2] W. Diffie, M. E. Hellman, New Directions in Cryptography. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-22, N6 (1976) 644-654. [3] N. Koblitz, Elliptic curve cryptosystems. Math. of Computations, 48 (1987) 203-209. [4] S. Blake-Wilson, Authenticated Diffie-Hellman Key Agreement Protocols, Lecture Notes in Computer Sci. v. 1556 (1999) 339-361. [5] T. Matsumoto, Y. Takashima, H. Imai, On Seeking Smart Public Key Distribution Systems, Trans. IECE of Japan, v.E69 (1986) 99-106. [6] http://csrc.nist.gov/encryption/skipjack-kea.htm

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

e-mail: lan@lancrypto.com , a.lebedev@bmstu.net

В. М. Левчук (Красноярск)

Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: enveloping algebras, ideals and connected problems Нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле: обертывающие алгебры, идеалы и связанные с ними проблемы

Произвольную (не обязательно ассоциативную) алгебру $A = (A, +, \cdot)$ называем *обертывающей алгебры Ли* L, если A с новым умножением $a * b := ab - ba$ дает алгебру Ли $R^{(-)} \simeq L$, ср. [1], [2]. Их исследуем для *нильтреугольной* подалгебры $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ алгебры Шевалле над полем K, [3, § 4.2]. Унипотентную подгруппу $U\Phi(K)$ группы Шевалле типа Φ над K представляют присоединенной группой на $N\Phi(K)$; как правило, ее нормальные подгруппы есть, в точности, идеалы кольца Ли $N\Phi(K)$, [4]. По теореме Шевалле о базисе, при $r, s, r+s \in \Phi^+$ в $N\Phi(K)$ имеем $e_r * e_s = N_{r,s} e_{r+s}$, $N_{r,s} = \pm 1, \pm 2$ или (тип G_2) ± 3.

Лемма 1. Обертывающей для алгебры Ли $N\Phi(K)$ является K-алгебра R с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ и умножением: $e_r e_s = 0$ при $r+s \notin \Phi$, а если $r, s, r+s \in \Phi^+$ и $N_{rs} \geq 1$, то $e_r e_s = e_{r+s}$ и $e_s e_r = (1 - N_{rs}) e_{r+s}$.

Для корней считаем $s \leq r$, если в разложении $r - s$ по базе $\Pi(\Phi^+)$ коэффициенты неотрицательны. Корни r и s называем *инцидентными*, если $r \leq s$ или $s \leq r$. *Множеством углов в* Φ^+ называют любое множество $\mathcal{L} = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ попарно неинцидентных корней из Φ^+. Очевидно, к идеалам обертывающей алгебры относятся $T(r) := \sum_{s \geq r} K e_s$, $Q(r) := \sum_{s > r} K e_s$ и $Q(\mathcal{L}) := \sum_{r \in \mathcal{L}} Q(r)$. Если $H \subseteq T(\mathcal{L}) := \sum_{r \in \mathcal{L}} T(r)$ и включение нарушается при любой замене в сумме $T(r)$ на $Q(r)$, то назовем $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ также *множеством углов в* H. Идеал H кольца Ли $N\Phi(K)$ называем *стандартным*, если $Q(\mathcal{L}(H)) \subset H$. Обертывающая алгебра R из леммы 1 алгебры Ли $N\Phi(K)$ зависит от выбора знаков структурных констант базиса Шевалле и названа *стандартной*, если все ее идеалы стандартны.

Для классических типов в [5] записана, как проблема 1, задача

(A) *Найти число стандартных идеалов алгебры Ли* $N\Phi(q) := N\Phi(GF(q))$.

Алгебра $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K представляет ассоциативную обертывающую алгебру алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1}; известно, что все идеалы даже кольца $NT(n, K)$ стандартны. Лемма 1 и зафиксированный в [6, Лемма 2] выбор знаков констант $N_{r,s}$ определяют однозначно обертывающую алгебру R_Φ классического типа Φ с соответствующим обозначением: $RB_n(K)$, $RC_n(K)$ и $RD_n(K)$. При этом $RD_n(K)$ есть подалгебра в $RB_n(K)$. Для алгебр Ли $N\Phi(K)$ типа D_n $(n \geq 4)$ и E_n $(n = 6, 7, 8)$ стандартная обертывающая алгебра R не существует, а для остальных типов существует ([7], [8]). Проблему 1 из [5] решает теорема Г.П. Егорычева–Н.Д. Ходюни и автора [7]. Для исключительных типов задача **(A)** решена в [8]. Далее автор и Н.Д. Ходюня решают задачу

(B) *Выявить все обертывающие алгебры R алгебры Ли $N\Phi(K)$ классического типа, которые для типа $\neq D_n$ стандартны, а для типа D_n являются подалгеброй какой-либо стандартной алгебры R типа B_n.*

Кроме $NT(n, K) = RA_{n-1}(K)$ существует еще лишь одна стандартная обертывающая алгебра R из леммы 1 алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} ($n > 3$); обе алгебры изоморфны по модулю аннулятора. Сходная единственность находится и для других алгебр в **(B)**. Завершая перечисление идеалов всех обертывающих алгебр из задачи **(B)**, перечисляем нестандартные идеалы алгебры $RD_n(q)$.

Отметим, что развиваемый Г. П. Егорычевым [9] метод интегрального представления комбинаторных сумм распространяется в комбинаторных теоремах на суммы, включающие q-биномиальные коэффициенты.

Теоретико-модельные свойства и соответствия Мальцева линейных групп и колец изучались в тесной связи с изоморфизмами с 70-х годов, см. монографию [10], [11]-[12] и др.

В докладе отражаются исследования (совместные с И.Н. Зотовым) вопросов о соответствии Мальцева и изоморфизмах алгебр Ли $N\Phi(K)$ и их обертывающих алгебр, см. также [13].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-007-07).

Литература. [1] A. A. Albert. Power-Associative Rings. Trans. Amer. Math. Soc., V. 64 (1948). No. 3, 552–593. [2] P. J. Laufer, M. L. Tomber. Some Lie admissible algebras. Canad. J. Math., V. 14 (1962), 287–292. [3] R. Carter. Simple Groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972. [4] V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type. J. Algebra, V. 349 (2012), No. 1, 98–116. [5] G. P. Egorychev, V. M. Levchuk. Enumeration in the Chevalley algebras. ACM SIGSAM Bulletin, V. 35 (2001), No. 2, 20–34. [6] В. М. Левчук. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле. Алгебра и Логика, 29 (1990), No. 3, 315–338. [7] V. M. Levchuk. Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: the enveloping algebra, ideals and automorphisms. Dokl. Math. V. 97 (2018), No. 1, 23–27. [8] N. D. Hodyunya. Enumerations of ideals in niltriangular subalgebra of Chevalley algebras. J. SFU Math. and Phys., V. 11 (2018) No. 3. [9] G. P. Egorychev. Integral representation and the computation of combinatorial sums. Translations of

Mathematical Monographs, 59. AMS, Providence, RI, 1984. [10] Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, А. Г. Пинус. Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр. М: МЦНМО, 2015, 360 с. [11] O. V. Belegradek. Model Theory of Unitriangular Groups. Amer. Math. Soc. Transl., V. 195, (1999), No. 2, 1–116. [12] В. М. Левчук, Е. В. Минакова. Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально-нильпотентных матричных групп и колец. ДАН, Т. 425, (2009), No. 2, 165–168. [13] В. М. Левчук. Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле. Итоги науки. - Юг России, Т. 6. (2012), 75–84.

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет

e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

О. В. Любимцев (Нижний Новгород)

Нередуцированные обобщенно эндопримальные абелевы группы

Пусть A — абелева группа. Функция $f : A^n \to A$ $(1 \leq n < \omega)$ называется (n-арной) *эндофункцией*, если она коммутирует со всеми эндоморфизмами группы A, т.е. $\varphi f(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ для всех $\varphi \in E(A)$, $x_1, \ldots, x_n \in A$. Группа A называется *обобщенно эндопримальной* (*GE–группой*), если для любой эндофункции f выполнено равенство: $f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_n(x_n)$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — центральные эндоморфизмы группы A.

Понятие эндопримальности возникло естественным образом в универсальной алгебре (см., например, [1]), и использовалось при изучении абелевых групп в работах [2], [3] и других. В данной работе предложен метод, позволяющий находить GE–группы в классах абелевых групп, имеющих достаточный запас идемпотентных эндоморфизмов. В качестве применения предложенной техники выделены сепарабельные и нередуцированные GE–группы. Второй результат сводит задачу описания GE–групп к аналогичной задаче для редуцированных абелевых групп. Кроме этого, установлена связь обобщенно эндопримальных абелевых групп с абелевыми группами, имеющими своими кольцами эндоморфизмов кольца с однозначным сложением (End–UA–группы [4]).

Прямое слагаемое B ранга 1 сепарабельной абелевой группы A называется *изолированным*, если в дополнительном прямом слагаемом не найдется прямого слагаемого ранга 1, тип которого сравним с типом группы B.

Теорема 1. Пусть A — сепарабельная абелева группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:

1. A не содержит изолированных слагаемых;
2. A — End–UA–группа;
3. A — GE–группа.

Примарную ограниченную абелеву группу назовем *циклически изолированной*, если она является ограниченной с экспонентой p^m и не содержит подгрупп вида $Z_{p^m} \bigoplus Z_{p^m}$.

Теорема 2. Пусть $A = D \bigoplus R$ — абелева группа, где $0 \neq D$ — делимая, $0 \neq R$ — редуцированная смешанная группы. Тогда A является GE–группой в том, и только том случае, если группа R не содержит в качестве p–компоненты такую циклически изолированную подгруппу $t_p(R)$, что $p \notin supp\ t(D)$ и дополнение $\overline{R}$ к $t_p(R)$ в группе R p–делимо. Если при этом исключить из рассмотрения группы, у которых указанные циклически изолированные p–компоненты изоморфны Z_2 или Z_3, то нередуцированные GE–группы есть в точности End–UA–группы.

Литература. [1] B. Davey, Dualisability in general and endodualisability in particular. Logic and Algebra, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 180, Marcel Dekker, New York, (1996), 437—455. [2] R. Göbel, K. Kaarli, L. Marki, S. L. Wallutis, Endoprimal torsion-free separable abelian groups. Jour. of Alg. and Its Appl, 3:1 (2004), 61–73. [3] U. Albrecht, S. Breaz, W. Wickless, Generalized endoprimal abelian groups. Jour. of Alg. and Its Appl, 5:1 (2006), 1–17. [4] О. В. Любимцев, Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA–кольцами эндоморфизмов. Фундаментальная и прикладная математика, 4:4 (1998), 1419–1422.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

e-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru

А. Р. Майорова (Москва), **Е. А. Васильева** (Paris, France)

Новая связь между производящей функцией таблиц домино и квазисимметрическими функциями типа B.

У перестановки $\pi \in S_n$ рассмотрим статистику $Des(\pi) = \{i \in \{1, 2, \dots n-1\} \mid \pi(i) > \pi(i+1)\}$. В работе [1] показано, что, как и в случае с цикловой структурой, элементы $D_I = \sum_{Des(\pi)=I} \pi$ порождают алгебру, называемую *алгеброй спуска*. С помощью квазисимметрических функций авторы установили связь структурных констант этой алгебры со стандартными таблицами Юнга. Большую роль в доказательстве играет производящая функция полустандартных таблиц

Юнга, также известная как функция Шура s_λ, и ее разложение на фундаментальные квазисимметрические функции F_I.

Естественным образом возникает вопрос обобщения этого результата на случай групп Кокстера других типов. Элементами группы Кокстера типа B являются биекции из множества $\{-n, -n+1, \dots -1, 0, 1, \dots n\}$ в себя, удовлетворяющие свойству $\pi(-i) = -\pi(i)$. Определим $Des(\pi) = \{i \in \{0, 1, 2, \dots n-1\} \mid \pi(i) > \pi(i+1)\}$. Главное отличие от случая симметрической группы – возможный спуск в позиции 0.

Алгебра спуска типа B оказывается связана таблицами домино. Диаграмму Юнга, разбитую на доминошки и заполненную неотрицательными целыми числами назовем *полустандартной таблицей домино*, если выполнены следующие условия:

- каждая строка является неубывающей последовательностью,
- каждый столбец – возрастающей,
- верхняя левая доминошка не может быть заполнена нулем если она вертикальна.

Обозначим $\mathcal{P}^0(n)$ множество разбиений, у которых диаграмма Юнга допускает разбиение на доминошки. Таблица называется *стандартной* если каждое число из интервала $[1, n]$ использовалось ровно один раз. Обозначим $d^B_{\lambda I}$ количество таблиц домино формы λ и множеством спуска I.

Чау в своей диссертации [2] предложил семейство квазисимметрических функций типа B и, в частности, определил фундаментальные квазисимметрические фунции $F^B_I(X) = \sum_{\substack{0 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_n \\ j \in I \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$. Авторами показано, что за счет такого добавления нулей в определение таблиц домино, производящая функция полустандартных таблиц домино допускает похожее разложение через фундаментальные функции Чау:

Теорема 1. Пусть $\lambda \in \mathcal{P}^0(n)$

$$\mathcal{G}_\lambda(X) = \sum_{shape(T)=\lambda} X^T = \sum_{I \subseteq \{0\} \cup [n-1]} d^B_{\lambda I} F^B_I,$$

Теорема 1 является основой для дальнейших результатов. В частности, известно ([2]), что алгебра квазисимметрических функций типа B дуальна как алгебра Хопфа алгебре спуска для группы Кокстера B_n. Используя этот факт и Теорему 1, авторами была доказана

Теорема 2. Пусть $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}^0(n)$. Обозначим $g^B(\lambda, \mu, \nu)$ коэффициенты Кронекера группы B_n. Тогда структурные константы

$c^{\emptyset}_{IJ} = [D^B_{\emptyset}]D^B_I D^B_J$ и $c^{\emptyset}_{I,J,K} = [D^B_{\emptyset}]D^B_I D^B_J D^B_K$ можно выразить следующим образом:

$$c^{\emptyset}_{IJ} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(n)} d^B_{\lambda I} d^B_{\lambda J}; \quad c^{\emptyset}_{I,J,K} = \sum_{\lambda,\mu,\nu \in \mathcal{P}^0(n)} g^B(\lambda,\mu,\nu) d^B_{\lambda I} d^B_{\mu J} d^B_{\nu K}.$$

Еще одно следствие Теоремы 1 связано с понятием Шур-положительности. Множество A называется *Шур-положительным*, если ассоциированная с ним квазисимммметрическая функция $Q(A) = \sum_{a \in A} F_{Des(a)}$ оказывается симметрической и раскладывается с положительными коэффицентами на функции Шура. Так как многочлены Шура являются характерами GL_n и связаны с характерами S_n при помощи отображения Фробениуса, Шур-положительность в точности означает, что $Q(A)$ соотвествует какому-либо характеру. Классическими примерами Шур-положительных множеств являются классы сопряженности, классы Кнута и обратные классы спусков. В работе [3] показано, что множество дуговых перестановок также Шур-положительно. Основной идеей доказательства является предоставление сохраняющей определение спуска биекции между множеством A и некоторыми подмножествами стандартных таблиц Юнга. К подобным сохраняющим определение спуска операциям относится известный алгоритм RSK. Он лежит в основе доказательства ряда базовых примеров.

В работе [4] Адин и др. рассмотрели случай группы Кокстера типа B, в качестве квазисимметрических функций типа B взяв семейство функций Пуарье. Им удалось перенести множество основных примеров на случай типа B, однако они используют иное, менее интуитивное определение множества спуска перестановки из B_n.

Авторы предлагают другой подход к определению Шур-положительности типа B. Множество A назовем *$\mathcal{G}$-положительным* если $Q^B(A) = \sum_{a \in A} F^B_{Des(a)}$ раскладывается с положительными коэффициентами на функции домино. Для таблиц домино имеется аналог алгоритма RSK, позволяющий показать $\mathcal{G}$-положительность ряда базовых примеров, в частности, обратных классов спусков и классов Кнута типа B. Более продвинутым примером $\mathcal{G}$-положительного множетсва являются дуговые перестановки со знаками $\mathcal{A}^s_n$. Множество $\mathcal{A}^s_n$ состоит из элементов B_n, избегающих следующие 24 паттерна: $[\pm 1, -2, \pm 3]$, $[\pm 1, 3, \pm 2]$, $[\pm 2, -3, \pm 1]$, $[\pm 2, 1, \pm 3]$, $[\pm 3, -1, \pm 2]$, $[\pm 3, 2, \pm 1]$. Авторами предложена не основанная на RSK биекция между множеством $\mathcal{A}^s_n$ и классами стандартных таблиц домино, соответсвующих описанным ниже формам. Вместе с Теоремой 1 она влечет следующий результат:

Теорема 3.

$$\sum_{\pi\in\mathcal{A}_n^s} F^B_{Des(\pi)} = \mathcal{G}_{(2n)} + \mathcal{G}_{(2n-1,1)} + \mathcal{G}_{(2n-2,1,1)} + \mathcal{G}_{(2n-3,1,1,1)} + 2\sum_{a\geq 2n-a\geq 2} \mathcal{G}_{(a,2n-a)} + \sum_{a\geq 2n-a-2\geq 2} \mathcal{G}_{(a,2n-a-2,2)} + \sum_{a\geq 2n-a-2\geq 2} \mathcal{G}_{(a,2n-a-2,1,1)}.$$

Литература. [1] L. Solomon, *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*, Journal of Algebra **41** (1976), 255–264. [2] C.O. Chow, *Non commutative symmetric functions of type B*, PhD thesis. MIT, 2001. [3] S. Elizalde, Y. Roichman, *Arc Permutations*, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 39, 301–334, 2014. [4] R.M. Adin, C. A. Athanasiadis, S. Elizalde and Y. Roichman, *Character formulas and descents for the hyperoctahedral group*, arXiv:1504.01283, 2015

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Laboratoire d'Informatique de l'Ecole Polytechnique

e-mail: alina.r.m@yandex.ru, katya@lix.polytechnique.fr

А. И. Макосий (Абакан), **А. В. Тимофеенко** (Красноярск)

Как построить порождающие группу инволюции

Обладание группой системой порождающих её инволюций позволяет многое сказать как о самой группе, так и о применении этой группы. Например, порождение группы n инволюциями, определяющие соотношения которых соответствуют определённого вида отражениями от гиперплоскостей, позволяет говорить об этой группе как прообразе группы симметрий правильного n-мерного многогранника, $n = 1, 2, \ldots$. Для каждой (известной) конечной простой и отличной от $PSU_3(9)$ нециклической группы либо известно, что неперестановочны любые две из трёх порождающих её инволюций, либо явно указана её $(2\times 2, 2)$-тройка инволюций за исключением спорадического монстра F_1, [1]. Минимальное число порождающих группу $PSU_3(9)$ инволюций равно четырём. Путь от доказательства существования в группе F_1 $(2\times 2, 2)$-тройки инволюций, [1], до построения самих этих инволюций ещё предстоит пройти.

Сформулируем задачу нахождения систем порождающих группу инволюций в следующем виде. Каждую $(2\times 2,2)$-тройку инволюций i_1, i_2, i_3 характеризует пятёрка (m,n,A_1,A_2,A_3), где m,n — порядки произведений i_1i_3, i_2i_3 неперестановочных инволюций и $m\leq n$, а A_k — имя класса сопряженных инволюций, содержащего инволюцию i_k, $k=1,2,3$ (эти имена обычно записывают как $2A,2B,\ldots$). Мы не различаем $(2\times 2,2)$-тройки инволюций, имеющие одинаковые пятерки указанного вида. Цель настоящей работы заключается в создании инструментов нахождения таких пятёрок для максимально возможного количества групп. Результаты вычислений сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если G — знакопеременная группа Alt_l степени $l\leq 16$ или спорадическая группа Матье, Янко J_1,J_2,J_3, Хигмана-Симпса HS, Сузуки Suz, Рудвалиса Ru, или Маклафлина McL, то расположенные в Атласе [2] пятёрки (m,n,A_1,A_2,A_3) и только они соответствуют $(2\times 2,2)$-тройкам инволюций группы G.

Опираясь на $(2\times 2,2)$-тройки инволюций теоремы 1 можно найти генетический код соответствующей группы. Например, пятёркам $(4,5,2A,2B,2B)$ и $(4,5,2B,2B,2B)$ группы Рудвалиса Ru соответствуют коды с 26 и 164 определяющими соотношениями. Справедливо также

Предложение 1. Спорадические группы J_1,J_2 обладают следующими генетическими кодами:

$$J_1=\langle a,b,c\,|\,a^2,b^2,c^2,(ab)^2,(ac)^3,(bc)^7,(abc)^{19},(bcbca)^{15}\rangle,$$

$$J_2=\langle a,b,c\,|\,a^2,b^2,c^2,(ab)^2,(ac)^3,(bc)^{15},(abcbc)^7,(abcbcbc)^5\rangle.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта №16–41–240670.

Литература. [1] В. Д. Мазуров, О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Сибирский математический журнал, 44, №1(2003), 193–198. [2] А. И. Макосий, А. В. Тимофеенко, Атлас конечных простых $(2\times 2,2)$-порождённых групп. http://ftp.kspu.ru/moodle/t/index.html

Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова
Сибирский федеральный университет

e-mail: aimakosi@mail.ru
A.V.Timofeenko62@mail.ru

Ф. М. Малышев (Москва)

Группы подстановок, порождённые модульными сложениями

Рассматривается множество $V = \mathbb{Z}_q^n$, $n \geqslant 2$, представленное декартовой степенью кольца вычетов $\mathbb{Z}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$, $q \geqslant 2$. Конечной последовательности $x_1, \dots, x_r$ вычетов из $\mathbb{Z}_q$ ставим в соответствие вычет по $\operatorname{mod} q^r$: $[x_1, \dots, x_r] = x_1 q^{r-1} + \ldots + x_{r-1} q + x_r$. Упорядоченному подмножеству $(i_1, \dots, i_r) \subseteq \{1, \dots, n\}$ ставим в соответствие подстановку $\pi = \pi_{(i_1,\dots,i_r)}\colon \mathbb{Z}_q^n \to \mathbb{Z}_q^n$. Если $\pi_{(i_1,\dots,i_r)}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, то $y_i = x_i$ для $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$, а $[y_{i_1}, \dots, y_{i_r}] = [x_{i_1}, \dots, x_{i_r}] + 1 (\operatorname{mod} q^r)$. Мощность подмножества r, $1 \leqslant r \leqslant n$, своя для каждой такой подстановки π и может быть любой из указанного диапазона. Упорядоченность тоже может быть любой из $r!$ возможных.

Множеству $\mathcal{S} = \{\pi_1, \dots, \pi_s\}$ таких подстановок ставим в соответствие группу $G = G_{\mathcal{S}} = \langle \pi_1, \dots, \pi_s \rangle$, ими порождаемую, и ориентированный (без петель) граф $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$ на множестве вершин $\{1, \dots, n\}$. Если подстановки π_j определяются соответственно наборами номеров $\left(i_1^{(j)}, \dots, i_{r_j}^{(j)}\right)$, $j = 1, \dots, s$, то дугами графа Γ являются: $i_t^{(j)} \leftarrow i_{t+1}^{(j)}$, $t = 1, \dots, r_j - 1$, $j = 1, \dots, s$.

Теорема. Если граф $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$ сильно связен, $\mathcal{S} = \{\pi_1, \dots, \pi_s\}$, $q \geqslant 2$, то группа $G = G_{\mathcal{S}} = \langle \pi_1, \dots, \pi_s \rangle$ содержит знакопеременную группу A_V на множестве V, за единственным исключением при $q = 2$, $n \geqslant 3$, $r_j \leqslant 2$ для всех $j = 1, \dots, s$, когда $G_{\mathcal{S}} = AGL(n, 2)$ – полная аффинная группа, действующая на пространстве $GF(2)^n$.

Группа $G_{\mathcal{S}}$ совпадает со всей симметрической группой S_V при наличии среди образующих хотя бы одной нечётной подстановки π_j, $j \in \{1, \dots, s\}$. Тогда $(q^{r_j} - 1)\, q^{n - r_j}$ нечётно и потому q чётно, а $r_j = n$. Обратное к теореме утверждение очевидно: при нарушении сильной связности графа $\Gamma_{\mathcal{S}}$ группа $G_{\mathcal{S}}$ будет импримитивной.

Рассматриваемые системы образующих удобны для их практической реализации при $r_j \leqslant r \ll n$, где r ограничивается сверху разрядностью используемого вычислительного процессора. Это же обстоятельство создаёт трудности при обосновании включения $G_{\mathcal{S}} \supseteq A_V$. В большинстве известных достаточных условий такого включения требуются подстановки $\pi \in G_{\mathcal{S}}$ из l циклов простой длины p, причём $l < p$ и $l < k$, если $|V| = pl + k$. Подстановки π_j, $j \in \{1, \dots, s\}$, состоят из q^{n-r_j} циклов длины q^{r_j}, поэтому для π в виде произведения нескольких таких подстановок имеем $l \gg p$.

В условиях Теоремы вначале доказывается 2-транзитивность группы $G_{\mathcal{S}}$, причём, в более общей ситуации, для декартова произведения $W = \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{q_n}$, $q_i \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда конечной последовательности $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, $x_{i_j} \in \mathbb{Z}_{q_{i_j}}$, $j = 1, \ldots, r$, ставится в соответствие вычет $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}] = x_{i_1} \cdot (q_{i_2} \cdot \ldots \cdot q_{i_r}) + \ldots + x_{i_j} \cdot \left(q_{i_{j+1}} \cdot \ldots \cdot q_{i_r}\right) + \ldots + x_{i_{r-1}} \cdot q_{i_r} + x_{i_r}$ по mod $(q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_r})$. Подстановка $\pi_{(i_1,\ldots,i_r)} : W \to W$ определяется аналогично. Если $\pi_{(i_1,\ldots,i_r)}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, то для $j \in \{1, \ldots, n\} \diagdown \{i_1, \ldots, i_r\}$ имеем $y_j = x_j$, а $[y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}] = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}] + 1 (\mathrm{mod}\ (q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_r}))$. В введённых обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма. Если $\mathcal{S} = \{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$ и граф $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$ сильно связен, то группа $G = G_{\mathcal{S}} = \langle \pi_1, \ldots, \pi_s \rangle$ будет 2-транзитивной на $W = \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{q_n}$.

С учётом этой леммы для доказательства теоремы останется проанализировать полный список конечных 2-транзитивных групп, полученный благодаря классификации конечных простых групп [1]. Отбраковка отличных от знакопеременной и симметрической групп из списка будет производиться, главным образом, с помощью доказанной в 2003 году Михайлеску [2] теоремы о единственность решения уравнения $x^z - y^t = 1$ в целых числах больших единицы: $3^2 - 2^3 = 1$, известной с 1844 года как теорема (догадка) Каталана [3]. Полный список конечных 2-транзитивных групп подстановок $G \subseteq S_N$ [1] включает в себя, прежде всего, аффинные группы: $G = L \cdot GF(p)^m \subseteq AGL(m,p) = GL(m,p) \cdot GF(p)^m$, где подгруппа $L \subseteq GL(m,p)$ транзитивна на множестве ненулевых векторов из $GF(p)^m \diagdown \{0\}$, $N = p^m$, p – простое, и группы проективных коллинеаций: $PSL(m,p) \subseteq G \subseteq P\Gamma L(m,p)$, где p – степень простого, $N = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1}$, $(m,p) \neq (2,2)$, $(m,p) \neq (2,3)$, $m \geqslant 2$. Для всех спорадических групп (из списка 2-транзитивных) степени подстановок N не представляются в виде $q^n = |V|$, поэтому в качестве $G_{\mathcal{S}}$ они не подходят. Оставшиеся пять бесконечных серий 2-транзитивных групп подстановок – это группы конечной проективной плоскости, группы Судзуки, группы Ри, две серии симплектических групп, для которых степени подстановок N относятся соответственно к одному из следующих видов: 1) $1+p^{3m}$, p – простое, $p^m > 2$; 2) $1 + 2^{4m+2}$, $m \geqslant 1$; 3) $1 + 3^{6m+3}$, $m \geqslant 1$; 4) $2^{m-1}(2^m - 1)$, $m \geqslant 3$; 5) $2^{m-1}(2^m + 1)$, $m \geqslant 3$. Все пять серий этих групп отбраковываются с помощью теоремы Каталана [2], [3].

На рубеже XIX и XX веков C. Jordan, W.A. Manning, M.J. Weiss доказали ряд теорем о совпадении 2-транзитивной группы со знакопеременной или симметрической (см. монографию H. Wielandt [4]). При доказательстве Теоремы настоящих тезисов используется, в частности, в качестве достаточного условия для включения $G_{\mathcal{S}} \supseteq A_V$ неравенство $3\mu < N - 2\sqrt{N}$, где μ – точная нижняя граница числа мобильных точек неединичных подстановок группы $G_{\mathcal{S}}$ (см. теорему 15.1 в [4]). Эти теоремы с учётом леммы позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. Если $\mathcal{S} = \{\pi_1, \dots, \pi_s\}$, $q_i \geqslant 2$, $i = 1, \dots, n$, и граф $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$ сильно связен, то группа $G = G_{\mathcal{S}} = \langle \pi_1, \dots, \pi_s \rangle$ содержит знакопеременную группу A_W на множестве W, за единственным исключением при $q_i = 2$, $i = 1, \dots, n$, $n \geqslant 3$, $r_j \leqslant 2$, $j = 1, \dots, s$, когда $G_{\mathcal{S}} = AGL(n, 2)$ – полная аффинная группа, действующая на пространстве $GF(2)^n$.

Используемые при доказательстве теоремы рассуждения позволяют убедиться в справедливости Гипотезы для следующих случаев: при $n = 2$; при $q_{r_1^{(j)}} \geqslant 5$ для некоторого $j \in \{1, \dots, s\}$; при $|W| > 64$ и $q_{r_1^{(j)}} \geqslant 4$ для некоторого $j \in \{1, \dots, s\}$; при $q_i = 2^{u_i}$, $u_i \in \mathbb{N}$, для всех $i = 1, \dots, n$.

Полные доказательства для представленных в настоящих тезисах Теоремы и Леммы имеются в работе [5].

Литература. [1] J. D. Key. Note on a consequence for affine groups of the classification theorem for finite simple groups. Geometrial Dedicata, **14** (1983), 81—86. [2] P. Mihăilescu. Primary Cyclotomic Units and a Prof of Catalan's Conjecture. J. Reine Angew. Math. **572** (2004), 167 – 195. [3] В. Серпинский. О решении уравнений в целых числах. М.: Физматлит, 1961. [4] H. Wielandt. Finite Permutation Groups. New York, London: Acad. Press, 1964. [5] Ф. М. Малышев. Порождение знакопеременной группы модульными сложениями. Дискретная математика, **30**:1 (2018), 56–65.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

e-mail: malyshevfm@mi.ras.ru

Ф. М. Малышев (Москва)

Условия слабой обратимости для n-квазигрупп

Вводимые в докладе понятия обратимости для n-квазигрупп выступают в качестве альтернативы понятию ассоциативности. Они задают более широкие классы n-квазигрупп, но для них остаются справедливыми аналоги теоремы Поста – Глускина – Хоссу, причём в более естественном и простом виде.

Пусть $n \geqslant 3$ и $Q\colon X^n \to X$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1, \dots, x_n]$, квазигрупповая операция. Она биективна по каждому из n аргументов при фиксации остальных $n-1$ аргументов [1]. Обозначим $x_i^j = (x_i, \dots, x_j)$, $x_i^j(\Delta) = (x_{i+\Delta}, \dots, x_{j+\Delta})$.

Определение 1 Для целых $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\varpi > 1$, $s + \varpi \leqslant n$, $t + \varpi \leqslant n$, n-квазигруппа (X, Q) является (s, ϖ, t)-*слабо обратимой*, если из равенства $\left[a_1^s, x_{s+1}^{s+\varpi}(-s), a_{s+\varpi+1}^n\right] = \left[a_1^s, y_{s+1}^{s+\varpi}(-s), a_{s+\varpi+1}^n\right]$ при каких-то $a_1^s \in X^s$, $a_{s+\varpi+1}^n \in X^{n-s-\varpi}$, x_1^ϖ, $y_1^\varpi \in X^\varpi$ следует тождество $\left[z_1^t, x_{t+1}^{t+\varpi}(-t), z_{t+\varpi+1}^n\right] = \left[z_1^t, y_{t+1}^{t+\varpi}(-t), z_{t+\varpi+1}^n\right]$, справедливое для всех $z_1^t \in X^t$, $z_{t+\varpi+1}^n \in X^{n-t-\varpi}$. Если $s = 0$, а $\varpi = n - t$, то $(0, n-t, t)$-слабо обратимую n-квазигруппу будем называть t-*слабо обратимой*.

Для (s, ϖ, t)-слабо обратимой n-квазигруппы Q все эквивалентные ей
n-квазигруппы σQ, $\sigma \in S_X$, также будут (s, ϖ, t)-слабо обратимыми, $(\sigma Q)(x_1, \dots, x_n) = \sigma(Q(x_1, \dots, x_n))$.

Предложение 1. n-квазигруппа $Q : X^n \to X$ является (s, ϖ, t)-слабо обратимой тогда и только тогда, когда относительно переменных x_1^n со значениями в X^n справедливы тождества $Q(x_1^n) = A(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^n) = C(x_1^t, D(x_{t+1}^{t+\varpi}), x_{t+\varpi+1}^n)$, в которых A и C некоторые $(n - \varpi + 1)$-квазигруппы, а B и D – эквивалентные ϖ-квазигруппы.

Следствие 1. Если n-квазигруппа Q является (s, ϖ, t)-слабо обратимой, то она является (t, ϖ, s)-, (s, ϖ, s)- и (t, ϖ, t)- слабо обратимой.

Следствие 2 [1]. Если n-квазигруппа Q является (s, ϖ, s)-слабо обратимой, то она представляется в виде $Q(x_1^n) = A(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^n)$,
где A – $(n - \varpi + 1)$-квазигруппа, B – ϖ-квазигруппа.

Следствие 3. Если n-квазигруппа Q является (s, ϖ, t)-слабо обратимой и $t \geqslant s+\varpi$, то $Q(x_1^n) = A(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^t, B(x_{t+1}^{t+\varpi}), x_{t+\varpi+1}^n)$, где A – $(n - 2\varpi + 2)$-квазигруппа, B – ϖ-квазигруппа.

Теорема 1. Пусть $Q : X^n \to X$ – (s, ϖ, t)-слабо обратимая n-квазигруппа и $0 \leqslant s < t < s + \varpi$, $t + \varpi \leqslant n$. Тогда $Q(x_1^n) = F\left(x_1^s, \widetilde{Q}\left(x_{s+1}^{t+\varpi}\right), x_{t+\varpi+1}^n\right)$, где $F : X^{n+s-t-\varpi+1} \to X$ – некоторая $(n + s - t - \varpi + 1)$-квазигруппа, $\widetilde{Q} : X^{t+\varpi-s} \to X$ – некоторая

$(t-s)$-слабо обратимая m-квазигруппа, $m = \varpi + t - s$. Обратно, если F – произвольная $(n + s - t - \varpi + 1)$-квазигруппа, а $\widetilde{Q}$ – произвольная $(t-s)$-слабо обратимая m-квазигруппа, то n-квазигруппа $Q(x_1^n) = F\left(x_1^s, \widetilde{Q}\left(x_{s+1}^{t+\varpi}\right), x_{t+\varpi+1}^n\right)$ будет (s, ϖ, t)-слабо обратимой.

Теорема 1 (вместе со следствиями 1, 2, 3) показывает, что для выявления строения (s, ϖ, t)-слабо обратимых n-квазигрупп в общем случае (при $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\varpi > 1$, $s + \varpi \leqslant n$, $t + \varpi \leqslant n$) достаточно понять строение r-слабо обратимых n-квазигрупп для произвольных $n \geqslant 3$ и $r > 0$, $1 \leqslant r < \frac{n}{2}$.

n-квазигруппа является (i,j)-ассоциативной [1], если в ней выполняется тождество $[x_1^{i-1}, [x_i^{i+n-1}], x_{i+n}^{2n-1}] = [x_1^{j-1}, [x_j^{j+n-1}], x_{j+n}^{2n-1}]$ и ассоциативной, если такие тождества выполняются для всех i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Предложение 2. Если n-квазигруппа $Q : X^n \to X$ является (i,j)-ассоци-ативной, то она является $(j-i)$-слабо обратимой.

Теорема 2. Пусть $n = n_t = n_0 + tr$, $t \geqslant 0$, $2r < n_0 \leqslant 3r$ и (X, Q) – конечная r-слабо обратимая n-квазигруппа. Тогда $Q(x_1^n) = Pu_0 \cdot Rv_0 \cdot \varphi(Pu_1 \cdot Rv_1) \cdot \varphi^2(Pu_2 \cdot Rv_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^t(Pu_t \cdot Rv_t) \cdot \varphi^{t+1}(Pu_{t+1} \cdot Rv_{t+1}) \cdot \varphi^{t+2}(Pu_{t+2})$,
где: $\cdot$ – групповая операция на множестве X, $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$,
$P : X^{n_0-2r} \to X$ – (n_0-2r)-квазигруппа, $u_i \in X^{n_0-2r}$, $i = 0, 1, \ldots, t+2$,
$R : X^{3r-n_0} \to X$ – $(3r-n_0)$-квазигруппа, $v_i \in X^{3r-n_0}$, $i = 0, 1, \ldots, t+1$,
$(x_1^n) = (u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_t, v_t, u_{t+1}, v_{t+1}, u_{t+2})$

Обратное к теореме 2 утверждение тоже справедливо. Для любых: групповой операции $\cdot$ на множестве X, $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$, $(n_0 - 2r)$-квазигруппы P, $(3r - n_0)$-квазигруппы R n-квазигруппа Q, задаваемая равенством из теоремы 2, будет r-слабо обратимой. В силу теоремы 2 из r-слабой обратимости n-квазигруппы Q следует её αr-слабая обратимость для всех натуральных $\alpha \leqslant (n-2)/r$.

Строение (i,j)-ассоциативных n-квазигрупп (см. [1], [2]) показывает, что предложение 2 справедливо в более сильной форме: *любая (i,j)-ассоциатив-ная n-квазигруппа является r-слабо обратимой для $r =$НОД$(i-1, j-i, n-1)$*. Согласно теореме 8.6 монографии [1] дополнительные требования на выражение для Q в теореме 2, обусловленные (i,j)-ассоциативностью, заключаются в домножении справа на элемент $c \in X$, для которого $\varphi^{t+2}(x) = cxc^{-1}$, $x \in X$, $\varphi^{k/r}(c) = c$, где $k =$НОД$(j-i, n-1)$, при этом, $n = 1 + (t+2)r$, т.е. $n_0 - 2r = 1$, и $P(x) = x$, $x \in X$.

Ассоциативные n-квазигруппы являются 1-слабо обратимыми. Теорема 2 для $r = 1$, доказанная в [3], утверждает, что для некоторой $\sigma \in S_X$ справедливо $[x_1, \dots, x_n] = \sigma(x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi^{n-1}(x_n))$. Из ассоциативности такой n-квазигруппы следует, что σ – умножение справа на $c \in X$ такое, что $\varphi^{n-1}(x) = cxc^{-1}$, $x \in X$, $\varphi(c) = c$. Тем самым, теорема Поста – Глускина – Хоссу [4] получается как следствие теоремы 2 для $r = 1$.

Если $Q(x_1, x_2, x_3)$ – 1-слабо обратимая 3-квазигруппа, а третья координата "куба" направлена вертикально, то X^3 разбивается на семейство "поверхностей" $Q^{-1}(z)$, $z \in X$. Оказывается, что пересечения этого семейства с "плоскостями" $x_3 = c$ одинаковы для всех $c \in X$ и они же являются "линиями уровня" каждой поверхности $Q^{-1}(z)$, $z \in X$. Данное наблюдение, полученное в [3], позволило получить простое наглядное доказательство теоремы о 4-х квазигруппах и теоремы Хоссу о решении уравнения общей ассоциативности [1].

Литература. [1] В. Д. Белоусов. n-арные квазигрупы. Кишинёв: “Штиница”, 1972. [2] Ф. Н. Сохацкий Ф. Н. Об ассоциативности многоместных операций. Дискретная математика, **4**:1 (1992), 67–84. [3] Ф. М. Малышев. Теорема Поста – Глускина – Хоссу для конечных n-квазигрупп и самоинвариантные семейства подстановок. Математический сборник, **207**:2 (2016), 81–92. [4] А. М. Гальмак, Г. Н. Воробьёв О теореме Поста – Глускина – Хоссу, Проблемы физики, математики и техники. № 1(14) (2013), 55-60.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

e-mail: malyshevfm@mi.ras.ru

В. Т. Марков, **А. А. Туганбаев** (Москва)

Центрально существенные кольца

Все рассматриваемые здесь кольца — ассоциативные кольца с единицей.

Определение. Кольцо A с центром C называется *центрально существенным*, если модуль A_C — существенное расширение модуля C_C.

Очевидными примерами центрально существенных колец являются коммутативные кольца. Более того, справедлива

Теорема 1. Полупервичное кольцо является центрально существенным тогда и только тогда, когда оно коммутативно.

Первым естественным примером некоммутативных центрально существенных колец являются алгебры Грассмана.

Теорема 2. Пусть R — кольцо (не обязательно коммутативное), A — алгебра Грассмана свободного модуля ранга n над R. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) Кольцо A является центрально существенным;
(2) Кольцо R является центрально существенным и число n нечётно.

Другой класс некоммутативных центрально существенных колец — групповые алгебры некоторых групп.

Теорема 3. Пусть F — поле характеристики $p > 0$ и G — конечная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) Кольцо $A = FG$ является центрально существенным;
(2) Группа R разлагается в прямое произведение $H \times S$, где S — силовская подгруппа группы G, где группа H коммутативна и кольцо FS является центрально существенным.

Полностью описать класс центрально существенных групповых алгебр конечных p-групп над полем характеристики p не удалось, имеется лишь следующее достаточное условие.

Теорема 4. Пусть F — поле характеристики $p > 0$ и G — конечная p-группа ступени нильпотентности 2. Тогда FG — некоммутативное центрально существенное кольцо.

С другой стороны, имеет место

Предложение. Для любого простого числа p существует такая группа G порядка p^5, что кольцо $\mathbb{F}_pG$ не является центрально существенным.

Доказательства этих и других утверждений о центрально существенных кольцах можно найти в препринтах [1-3].

Работа В.Т.Маркова и А.А.Туганбаева поддержана, соответственно, грантами РФФИ 17-01-00895 и РНФ 16-11-10013.

Литература. [1] Markov V.T., Tuganbaev A.A. Rings which are essential over their centers // arXiv:1712.02133 [math.RA]. [2] Markov V.T., Tuganbaev A.A. Rings which are Essential over their Centers, II // arXiv:1801.00653 [math.RA]. [3] Markov V.T., Tuganbaev A.A. Centrally Essential Group Algebras // arxiv:1801.00951 [math.RA].

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Национальный исследовательский университет “МЭИ”

e-mail: markov@mech.math.msu.su, tuganbaev@gmail.com

О. В. Маркова (Москва)

Длина групповых алгебр конечных абелевых групп

В докладе будут представлены результаты совместного с А. Э. Гутерманом и М. А. Хрыстиком исследования [1] о длине коммутативных групповых алгебр и её связи с характеристиками группы и свойствами поля коэффициентов.

Длиной конечной системы $\mathcal{S}$ порождающих конечномерной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ над произвольным полем называется наименьшее натуральное число $l(\mathcal{S})$, такое что слова длины не большей $l(\mathcal{S})$ порождают данную алгебру как векторное пространство. *Длиной алгебры* называется максимум длин её систем порождающих, обозначим её $l(\mathcal{A})$. Общая задача исследования связи функции длины с другими характеристиками алгебры была впервые поставлена К. Паппаченой в [2]. Результаты в этом направлении для коммутативных алгебр были получены О.В. Марковой в [3].

Для длины групповой алгебры $\mathbb{F}G$ конечной абелевой группы G справедлива тривиальная верхняя оценка $l(\mathbb{F}G) \le |G|-1$; более того $l(\mathbb{F}G) = |G|-1$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой. Мы исследуем вопрос, для каких полей $\mathbb{F}$ выполнено это условие в полупростом случае, т.е. в предположении $\mathrm{char}\mathbb{F} \nmid |G|$.

Очевидно выполнена:

Лемма 1. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и пусть G — конечная циклическая группа. Тогда $l(\mathbb{F}G) = |G|-1$.

Получены следующие основные результаты. Для бесконечных и достаточно больших конечных полей выполнено условие однопорождённости:

Теорема 2. Пусть G — конечная абелева группа и $\mathbb{F}$ — бесконечное поле такое, что $\mathrm{char}\mathbb{F} \nmid |G|$. Тогда групповая алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой и $l(\mathbb{F}G) = |G|-1$.

Теорема 3. Пусть G — конечная абелева группа и $\mathbb{F}_q$ — такое конечное поле, что $\mathrm{char}\mathbb{F} \nmid |G|$ и $q \ge |G|$. Тогда групповая алгебра $\mathbb{F}_qG$ является однопорождённой и $l(\mathbb{F}G) = |G|-1$.

Для маленьких конечных полей получены логарифмические относительно порядка группы оценки длины групповой алгебры:

Теорема 4. Пусть G — конечная абелева группа и $\mathbb{F}_q$ — конечное поле порядка $q \le |G|-1$, удовлетворяющее условию $\exp(G)|(q-1)$. Тогда

$$l(\mathbb{F}_qG) = (q-1)[\log_q |G|] + [q^{\{\log_q |G|\}}] - 1,$$

где как обычно $[x]$ и $\{x\}$ обозначают, соответственно, целую и дробную части вещественного числа x.

Предложение 5. Пусть G — конечная абелева группа и $\mathbb{F}_q$ — конечное поле порядка $q \leq |G|-1$, такое, что $\mathrm{char}\mathbb{F} \nmid |G|$. Тогда

$$l(\mathbb{F}_q G) \leq (m-1)[\log_m |G|] + [m^{\{\log_m |G|\}}] - 1,$$

для произвольного $m \geq \max\{\deg \mu_a(t) | a \in \mathbb{F}_q G\}$, где $\mu_a(t)$ — минимальный многочлен элемента $a \in \mathbb{F}_q G$.

Доказательства основаны на исследовании систем порождающих прямых сумм полей — простых алгебраических расширений фиксированного поля, и применении общих фактов о длине коммутативных алгебр из [3].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, грант 17-11-01124.

Литература. [1] A.E. Guterman, O.V. Markova, M.A. Khrystik, On the lengths of group algebras of finite Abelian groups in the semi-simple case, Preprint, 2018. [2] C. J. Pappacena, An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra, J. Algebra, 197 (1997), 535–545. [3] О. В. Маркова, Верхняя оценка длины коммутативных алгебр, Матем. сб., 200:12 (2009), 41–62.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: ov_markova@mail.ru

А. П. Мехович (Витебск, Республика Беларусь)

О решетке кратно композиционных формаций

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология [1–3].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \{\omega\}$. Через $C^p(G)$ обозначено пересечение централизаторов всех тех главных факторов G, чьи композиционные факторы имеют простой порядок p [3], а через $R_\omega(G)$ обозначена наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \qquad (1)$$

Следуя [1], сопоставим функции f вида (1) класс групп

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех таких}$$
$$p \in \omega, \text{ что в } G \text{ имеется композиционный фактор порядка } p).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-композиционной формацией* с *ω-композиционным спутником* f [1]. В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, то ω-композиционную формацию называют *композиционной формацией.*

Всякая формация считается 0-*кратно ω-композиционной*, а при $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-композиционной* [1], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения ω-композиционного спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают через form$\mathfrak{X}$ и называют *формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$ [2]. Подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется *дополняемой* в $\mathfrak{F}$ [4], если $\mathfrak{M}$ дополняема в решетке всех подформаций формации $\mathfrak{F}$, т. е. если в $\mathfrak{F}$ имеется такая подформация $\mathfrak{H}$ (*дополнение* к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$), что

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}), \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Для произвольной n-кратно композиционной формации $\mathfrak{F}$ через $L_{c_n}(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех n-кратно композиционных подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно композиционная формация. Тогда если формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_{c_n}(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \pi(Com(\mathfrak{F}))$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Литература. [1] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп. Украинский матем. журн., 52:6 (2000), 783–797. [2] А. Н. Скиба. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. [3] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. De Gruyter Expositions in Mathematics 4. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. [4] А. Н. Скиба. О формациях с заданными системами подформаций. Подгрупповое строение конечных групп: Труды Гомельского семинара. Ин-т математики АН БССР, (1981), 155–180.

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

e-mail: amekhovich@yandex.ru

В. Г. Микаелян (Ереван, Армения)

Явные вложения рекурсивных групп в конечно представленные группы

Цель настоящей работы — представить конструкцию явного вложения рекурсивных групп в 2-порожденные конечно заданные группы. *Для любой рекурсивной группы* $H = \langle x_1, x_2, \ldots \mid r_1, r_2, \ldots \rangle$, *заданной счетным количеством порождающих* $x_1, x_2, \ldots$ *и рекурсивно перечислимыми определяющими соотношениями* $r_1, r_2, \ldots$ *имеется явное вложение* H *в некоторую 2-порожденную конечно представленную группу*

$$G = \langle\, y_1, y_2 \ \mid w_1(y_1, y_2),\, w_2(y_1, y_2), \ldots, w_n(y_1, y_2)\,\rangle.$$

Более того, имеется алгоритм, который позволяет явно выписать конечное количество определяющих соотношений $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *группы* G *исходя из порождающих* $x_1, x_2, \ldots$ *и определяющих соотношений* $r_1, r_2, \ldots$ *группы* H. *Существует универсальная верхняя грань для числа* n *таких соотношений* w_i.

Отправной точкой для обширных исследований о вложениях счетных групп в 2-порожденные (или конечно-порожденные) группы является известная теорема Г. Хигмэна, Б.Г. Ноймана и Х. Нойман о вложимости любой счетной группы H в 2-порожденную группу G [3]. Этот результат стал стимулом для исследований о подобных вложениях *с дополнительными свойствами*, т.е. о вложениях, которые либо удовлетворяют некоторому условию (например, являются субнормальными, вербальными и т.д.), либо о вложениях в группу G обладающую некоторым дополнительным свойством (например, разрешимостью, финитной аппроксимируемостью и т.д.) при условии, что H обладает этим свойством. В частности, [12, 13] рассматривают случаи, когда разрешимая, нильпотентная, обобщенная разрешимая или обобщенная нольпотентная счетная группа H вложима в 2-порожденную группу G такого же типа. Вложения счетных групп в простые 2-порожденные группы рассмотрены в [6]. Субнормальные вложения счетных групп построены в [1]. Вербальные вложения (см. определение вербального вложения, данное Г. Хайнекеном, в [2]) рассмотрены в [9, 10]. Вложения финитно аппроксимируемых групп были рассмотрены в [14]. Случаи, когда группа G может быть метабелевой для абелевой H полностью классифицированы в [8]. Вложения группы H с почти экспоненциальным ростом в конечно порожденную аменабельную группу G обсуждены в [7]. См. также наши работы [8–11] по некоторым из обозначенных направлений.

Другим важным результатом в этой области явяется теорема Г. Хигмэна, из которой следует, что каждая рекурсивная группа H может быть вложена в конечно представленную группу G [4]. В отличии от других конструкций, [4] не устанавливает *явного* вложения H в G. Этим и мотивировано анонсируемое выше явное вложения.

Наше вложение также связано с *Проблемой 14.10* **(a)** в Коуровской тетради [5], в которой П. де ля Арп просит найти явное вложение рекурсивных групп $H = \mathbb{Q}$ и $H = GL_n(\mathbb{Q})$ в "естественные" конечно представленные группы. Наша конструкция позволяет строить вложения для этих групп H. Более того, G может быть 2-порожденной, и мы можем явно выписать определяющие соотношения G. Техника доказательства основана на свободных произведениях с объединенной подгруппой и на HNN-расширениях. Построенные группы G являются специфическими сложными структурами, которые, однако, не идентифицируются с "естественными" хорошо знакомыми группами.

Литература. [1] R. Dark, On subnormal embedding theorems of groups, J. London Math. Soc. 43 (1968), 387–390. [2] H. Heineken, Normal embeddings of p-groups into p-groups, Proc. Edinburgh Math. Soc. 35 (1992), 309–314. [3] G. Higman, B. Neumann and H. Neumann, Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. (3) 24 (1949), 247–254. [4] G. Higman, Subgroups of finitely presented groups, Proc. Roy. Soc. A, 262 (1961), 455-75 [5] Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook. No. 18 (2018). [6] A.Yu. Ol'shanskii, Economical embeddings of countable groups, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 105 (1989), 28–34. [7] A.Yu. Ol'shanskii; D. Osin, A quasi-isometric embedding theorem for groups, Duke Math. J. 162 (2013), 1621–1648. [8] V.H. Mikaelian, A.Yu. Olshanskii, On abelian subgroups of finitely generated metabelian groups, Journal of Group Theory, 16 (2013), 695–705. [9] V.H. Mikaelian, Subnormal embedding theorems for groups, Journal of the London Mathematical Society, 62.2 (2000), 398–406. [10] V.H. Mikaelian, On embeddings of countable generalized soluble groups into two-generated groups, Journal of Algebra, 250 (2002), 1–17. [11] V.H. Mikaelian, On some residual properties of the verbal embeddings of groups, Advances in Group Theory and Applications (AGTA), 1 (2016), 3–19. [12] B.H. Neumann, H. Neumann, Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. 34 (1959), 465–479. [13] B.H. Neumann, Embedding theorems for groups, Nieuw Arch. Wisk. (3) 16 (1968), 73–78. [14] J.S. Wilson, Embedding theorems for residually finite group, Math. Z. 174 (1980), 149–157.

Ереванский государственный университет
Американский университет Армении

e-mail: v.mikaelian@gmail.com

В. С. Монахов (Гомель), **И. Л. Сохор** (Брест)

О группах с альтернативными системами подгрупп

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология и обозначения соответствуют [1], [2].

Одно из направлений исследований современной теории групп связано с изучением групп с альтернативными свойствами нетривиальных подгрупп. Из работ текущего десятилетия отметим, например, статью [3], в которой изучены группы, каждая максимальная подгруппа которых простая или сверхразрешимая (в частности, нильпотентная).

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-абнормальной, если $L/K_L \notin \mathfrak{F}$ для всех подгрупп K и L таких, что $H \leq K < \cdot\ L \leq G$. Здесь запись $K < \cdot\ L$ означает, что K — максимальная подгруппа группы L, а K_L — ядро подгруппы K в группе L. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует такая цепочка подгрупп

$$H = H_0 < \cdot\ H_1 < \cdot\ \ldots < \cdot\ H_n = G,$$

что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i. В любой группе G каждая собственная подгруппа не может быть одновременно $\mathfrak{F}$-субнормальной и $\mathfrak{F}$-абнормальной, т. е. эти понятия альтернативные.

Группы, в которых некоторые подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны или $\mathfrak{F}$-абнормальны, изучались в работах многих авторов, см. литературу в [4]. В этом направлении доказана следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Предположим, что в группе G каждая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или $\mathfrak{F}$-абнормальна. Тогда либо $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$, либо справедливы следующие утверждения:

(1) только одна из силовских подгрупп группы G $\mathfrak{F}$-абнормальна, пусть это будет силовская p-подгруппа P группы G;

(2) группа G разрешима, P является неабелевой подгруппой Картера и Гашюца;

(3) $G_{p'} \leq G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$ и каждая примарная подгруппа в $G_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна.

Здесь $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ — классы всех абелевых и нильпотентных групп соответственно; $\mathfrak{A}_1$ — класс всех абелевых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами; $\mathcal{A}$ — класс всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами; $G^{\mathfrak{F}}$ и $G_{p'}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал и p'-холлова подгруппа группы G соответственно.

Литература. [1] В. С. Монахов. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. [2] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. [3] В. С. Монахов, В. Н. Тютянов. О конечных группах с заданными максимальными подгруппами. Сиб. матем. журн., 55 (2014), 553–561. [4] В. С. Монахов, И. Л. Сохор. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами. Сиб. матем. журн., 58 (2017), 851–863.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

e-mail: irina.sokhor@gmail.com

В. И. Мурашко (Гомель)

О характеризациях $\mathfrak{F}$-гиперцентра конечных групп

Рассматриваются только конечные группы. Понятие гиперцентра естественно возникает в связи с определением нильпотентной группы через центральные ряды. Первые характеризации гиперцентра, как пересечения системы заданных подгрупп, возникли в работах Ф. Холла [1] и Р. Бэра [2]. Так, Р. Бэр [2] показал, что, с одной стороны, гиперцентр совпадает с пересечением всех максимальных нильпотентных подгрупп, а с другой стороны — с пересечением нормализаторов всех силовских подгрупп.

Б. Хупперт и Л.А. Шеметков (см., [3, §7]) стали изучать формационные обобщения гиперцентра, вводя его с помощью понятия экрана. Определение $\mathfrak{F}$-гиперцентра для более широкого класса групп, не использующее понятие экрана, было предложено в [4].

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Напомним [4, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется *$\mathfrak{X}$-центральным*, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$, в противном случае он называется *$\mathfrak{X}$-эксцентральным*. *$\mathfrak{X}$-гиперцентром* группы G называется наибольшая нормальная подгруппа G, все G-главные факторы ниже которой $\mathfrak{X}$-центральны в G. Обозначается $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$. Напомним (см., например, [5]), что подгруппа U группы G называется *$\mathfrak{X}$-максимальной* в G, если (a) $U \in \mathfrak{X}$, и (b) из $U \leq V \leq G$ и $V \in \mathfrak{X}$ следует, что $U = V$. Пересечение всех $\mathfrak{X}$-максимальных подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Int}_{\mathfrak{X}}(G)$.

В 1995 году на Гомельском алгебраическом семинаре Л. А. Шеметков задал вопрос: «Для каких нормально наследственных разрешимо насыщенных формация $\mathfrak{F}$ равенство $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G?» Отвечая на вопрос Л. А. Шеметкова А. Н. Скиба [5] (в разрешимом случае, Дж. Бейдлеман и Г. Хайнекен [6]) описал все наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$ для которых $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Однако, разработанные в этих работах методы не работают в случаях ненаследственной и ненасыщенной формаций. Поэтому решение данного вопроса было неизвестно даже для такого важного класса групп, как класс всех квазинильпотеных групп $\mathfrak{N}^*$. Оно было получено автором в работе [7]. Напомним [8], что группа G называется *квази-$\mathfrak{X}$-группой*, если G индуцирует внутренние автоморфизмы на всяком своём $\mathfrak{X}$-эксцентральном главном факторе. Класс всех квази-$\mathfrak{X}$-групп обозначается через $\mathfrak{X}^*$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Равенство $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G тогда и только тогда, когда равенство $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}^*}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}^*}(G)$ верно для любой группы G.

Следствие 1. Пересечение всех максимальных квазинильпотентных подгрупп G совпадает с $\mathrm{Z}_{\mathfrak{N}^*}(G)$.

Напомним [9, с. 95], что $\underset{i\in I}{\times}\mathfrak{F}_{\pi_i} = (G = \underset{i\in I}{\times}\mathrm{O}_{\pi_i}(G)|\mathrm{O}_{\pi_i}(G) \in \mathfrak{F}_{\pi_i})$ — наследственная насыщенная формация, где $\sigma = \{\pi_i\,|\,i \in I\}$ — разбиение $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся множества и $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ — наследственная насыщенная формация для которой $\pi(\mathfrak{F}_{\pi_i}) = \pi_i$ для любого $i \in I$. Отметим, что во многих работах исследуются пересечения нормализаторов различных систем подгрупп (см. [10, 11]). Обозначим пересечение нормализаторов всех $\mathfrak{F}$-максимальных подгрупп G через $\mathrm{NI}_{\mathfrak{F}}(G)$. В работе [12] автором получена

Теорема 2. Пусть $\sigma = \{\pi_i\,|\,i \in I\}$ — разбиение $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся множества, $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ — наследственная насыщенная формация, $\pi(\mathfrak{F}_{\pi_i}) = \pi_i$ для любого $i \in I$ и $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\times}\mathfrak{F}_{\pi_i}$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G.

(2) $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}_{\pi_i}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}_{\pi_i}}(G)$ верно для любой π_i-группы G и любого $i \in I$.

(3) $\bigcap\limits_{i\in I}\mathrm{NI}_{\mathfrak{F}_{\pi_i}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G.

Следствие 2 (Р. Бэр [2]). Для любой группы G верно $\mathrm{Z}_{\mathfrak{N}}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{N}}(G) = \bigcap\limits_{P\in \mathrm{Syl} G} N_G(P)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Напомним, что подгруппа H группы G называется *K-$\mathfrak{F}$-субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп

$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \triangleleft H_i$, либо $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Подгруппу S группы G назовём слабым *K-$\mathfrak{F}$-субнормализатором* H в G. Если H K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в S и из $S \leq M \leq G$ и K-$\mathfrak{F}$-субнормальности H в M всегда следует $S = M$. В частности, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, то K-$\mathfrak{F}$-субнормальность эквивалентна субнормальности. Нетрудно заметить также, что слабый K-$\mathfrak{N}$-субнормализатор силовской подгруппы совпадает с её нормализатором. Нами получено следующее развитие теоремы Р. Бэра о пересечении нормализаторов силовских подгрупп

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Пересечение всех слабых K-$\mathfrak{F}$-субнормализаторов силовских подгрупп совпадает с $\mathfrak{F}$-гиперцентром.

(2) Пересечение всех слабых K-$\mathfrak{F}$-субнормализаторов циклических примарных подгрупп совпадает с $\mathfrak{F}$-гиперцентром.

(3) Существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества такое, что $\mathfrak{F} = \times_{i\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$.

Литература. [1] P. Hall, On the System Normalizers of a Soluble Group. Proc. London Math. Soc., 43(1) (1938), 507–528. [2] R. Baer, Group elements of prime power index. Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 20–47. [3] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. [4] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. [5] A. N. Skiba, On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group. Journal of Pure and Aplied Algebra, 216(4) (2012), 789–799. [6] J. C. Beidleman, H. Heineken, A note of intersections of maximal $\mathfrak{F}$-subgroups. J. Algebra, 333 (2010), 120–127. [7] V. I. Murashka, On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group. J. Group. Theory, 21(3) (2018), 463–473. [8] W. Guo, A. N. Skiba, On finite quasi-$\mathfrak{F}$-groups. Comm. Algebra, 37 (2009), 470–481. [9] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. Classes of Finite Groups. Springer, 2006. [10] S. Li, Z. Shen, On the intersection of the normalizers of derived subgroups of all subgroups of a finite group. J. Algebra, 323(5) (2010), 1349–1357. [11] M. G. Drushlyak, T. D. Lukashova, F. M. Lyman, Generalized norms of groups. Algebra and Discrete Mathematic. 22(1) (2016), 48–81. [12] V. I. Murashka, A note on the generalized hypercenter of a finite group. Journal of Algebra and Its Applications, 16(2) (2017), 1750202 (7 pages).

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

e-mail: mvimath@yandex.ru

М. И. Наумик (Витебск, Республика Беларусь)

О максимальной локальной полугруппе линейных отношений

В данной работе дано описание максимальной локальной полугруппе линейных отношений. Отметим, что в [1] доказано, периодическая полугруппа линейных отношений конечномерного пространства над полем локально конечна.

Пусть V – левое конечномерное векторное пространство над произвольным телом F. Бинарное отношение $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством $V \oplus V$. Множество $LR(V)$ всех линейных отношений пространства V является, как известно [2] полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений. Пусть $S \subseteq LR(V)$ – полугруппа. Обозначим $pr_1 S = \sum\limits_{a \in S} pr_1 a$, $coker S = \bigcap\limits_{a \in S} coker a$. Назовем S-модулем любое пространство $U \subseteq V$ устойчивое относительно S, т.е. $U \subseteq pr_1 S$, $U_1 = \{\overline{y} \in V : (\overline{x}, \overline{y}) \in a \in S, \quad \overline{x} \in U\}$, то $U_1 \subseteq U$. $S(U)$ обозначает полугруппу линейных отношений пространства U, индуцированную S. Если $pr_1 S$ разложимо в прямую сумму

$$pr_1 S = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n \tag{1}$$

ненулевых S-модулей и $S_i \subseteq S(V_i)$, то мы назовем полугруппу S подпрямой суммой ненулевых S-модулей, ассоциированной с разложением (1). Если при этом S изоморфна прямому произведению всех S_i, то мы назовем S прямой суммой этих полугрупп и пишем $S = S_1 \dot{+} S_2 \dot{+} ... \dot{+} S_n$.

Периодическую полугруппу, содержащую ровно два идемпотента – нуль и единицу, назовем, аналогично [3], локальной, а в случае конечных коммутативных полугрупп в [4] такие полугруппы назывались элементарными.

Будем говорить, что линейное отношение $a \in LR(V)$ аннулирует цепь $pr_1 a = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset ... \supset U_{n-1} \supset U_n = coker a$, если $pr_1 a \subset U_i$, а $pr_2 a \subset U_{i+1}$.

Множество всех линейных отношений $N \subseteq LR(V)$, аннулирующих цепь $pr_1 N = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset ... \supset U_{n-1} \supset U_n = coker N$ назовем аннулятором цепи.

Теорема. *Пусть $S \subseteq LR(V)$, где F – поле характеристики 0. Множество S тогда и только тогда является максимальной локальной полугруппой, когда $S = G \cup N$ и существует разложение $pr_1 S = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$, для которого*

1) $G = G_1 \dotplus G_2 \dotplus ... \dotplus G_n$, *где* $G_i = G[V_i]$ – *максимальная неприводимая периодическая подгруппа из* $GL(V_i, F)$;

2) N – *аннулятор цепи* $pr_1 S = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset ... \supset U_{n-1} \supset U_n = coker N$, где $U_{i-1} = V_i \oplus V_{i+1} \oplus ... \oplus V_n$.

Литература. [1] L. B. Sneperman. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relations. Semigroup Forum. 25 (1982), 203–211. [2] С. Маклейн. Алгебра аддитивных отношений. Сб. переводов. Математика. 7:6 (1963), 1–12. [3] И. О. Коряков. Линейные периодические полугруппы с центральными идемпотентами. Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск. (1987), 72–80. [4] И. С. Понизовский. О матричных представлениях конечных коммутативных полугрупп. Сиб. мат. журнал. XI(5) (1970), 1098–1106.

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

e-mail: naumik@tut.by

А. Ю. Никитин (Омск)

Критерий нётеровости по уравнениям для частичных порядков

С точки зрения алгебраической геометрии, *частично упорядоченным множеством (частичным порядком)* является алгебраическая структура $\mathcal{P} = \langle P| \leqslant^{(2)}, A\rangle$ с носителем P, предикатным символом порядка $\leqslant$ и множеством константных символов A. *Уравнениями* над частичным порядком $\mathcal{P}$ от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ называются атомарные формулы над $\mathcal{P}$ от переменных X. Легко видеть, что таких уравнений 7 типов.

Системой уравнений $S(X)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ от переменных X называется любое множество уравнений над $\mathcal{P}$ от переменных X. Точка $p = (p_1, \dots, p_n) \in P^n$ называется *решением* системы уравнений S, если для любого уравнения системы S при подстановке вместо переменных соответствующих значений получается истинное над $\mathcal{P}$ выражение. Естественным образом определяется множество решений системы уравнений. Системы уравнений $S_1(X_n)$ и $S_2(X_n)$ называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Для частичного порядка $\mathcal{P}$ выполнено *свойство нётеровости по уравнениям*, если для любой бесконечной системы уравнений $S(X_n)$ существует эквивалентная её конечная подсистема. Для частичного порядка $\mathcal{P}$ выполнено *свойство слабой нётеровости по уравнениям*, если для любой бесконечной системы уравнений $S(X_n)$ существует конечная система $S_0(X_n)$, эквивалентная изначальной системе (в этом случае система S_0 не обязательно является подсистемой S).

Для частичного порядка $\mathcal{P}$ и множества его элементов A этого частичного порядка можно определить верхний и нижний конус множества A: $A^{\uparrow} = \{x \mid a \leqslant x, \forall a \in A\}$ и $A^{\downarrow} = \{x \mid x \leqslant a, \forall a \in A\}$ соответственно. Верхний конус $A^{\uparrow}$ называется конечно порожденным, если существует конечное множество элементов частичного порядка B, такое что $A^{\uparrow} = B^{\uparrow}$. Верхним А-конусом называется пара $(A, A^{\uparrow})$, где A – база конуса. Верхний А-конус называется конечно порожденным, если существует конечное подмножество $B \subseteq A$, такое что $B^{\uparrow} = A^{\uparrow}$. Данные определения переносятся на нижние конусы аналогичным образом.

Основной результат работы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Частичный порядок $\mathcal{P}$ обладает свойством нётеровости по уравнениям тогда и только тогда, когда для любого подмножества A элементов частичного порядка $\mathcal{P}$ верхний и нижний A-конусы являются конечно порожденными.

Как следствие, легко получается критерий слабой нётеровости по уравнениям частичных порядков.

Следствие 1. Частичный порядок $\mathcal{P}$ обладает свойством слабой нётеровости по уравнениям тогда и только тогда, когда для любого подмножества A элементов частичного порядка $\mathcal{P}$ конусы $A^{\uparrow}$ и $A^{\downarrow}$ являются конечно порожденными.

Омский Государственный Технический Университет

e-mail: nikitinlexey@gmail.com

Я. Н. Нужин (Красноярск)

Промежуточные подгруппы как группы с (B, N) парой

Подгруппы B и N произвольной группы G называют (B,N)-*парой*, если выполняются следующие аксиомы.

$BN1$) Подгруппы B и N порождают G.

$BN2$) $B \cap N \trianglelefteq N$.

$BN3$) Фактор-группа $W = N/B \cap N$ порождается инволюциями $w_i, i \in I$.

$BN4$) Для любого прообраза $n_i \in N$ элемента w_i при естественном гомоморфизме N на W имеем $Bn_iB \cdot BnB \subseteq Bn_inB \cup BnB, \quad n \in N$.

$BN5)$ Если n_i – элемент из аксиомы $BN4)$, то $n_iBn_i \neq B$.
В другой терминологии при $S = \{w_i \mid i \in I\}$ четверка (G, B, N, S) называется *системой Титса* [1]. (B, N)-пара называется *расщепляемой* (*насыщенной*), если $B = U(B \cap N)$, где U — нормальная нильпотентная подгруппа группы B [2] (соответственно если $\bigcap\limits_{n \in N} B^n = B \cap N$ [1]).

Хорошо известно, что группа Шевалле $\Phi(K)$ типа Φ над полем K обладает расщепляемой насыщенной (B, N)-парой. В качестве подгруппы B можно взять ее борелевскую подгруппу $B(K) = U(K)H(K)$, а в качестве N — ее мономиальную подгруппу $N(K)$. Отметим, что $(B(K), N(F))$ также является (B, N)-парой группы $\Phi(K)$ для любого подполя F поля K, но является насыщенной только при $F = K$.

При описании подгрупп, лежащих между группами Шевалле $\Phi(R)$ и $\Phi(K)$ типа $\Phi = B_l$ $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 2)$, F_4, G_2, где K — алгебраическое расширение несовершенного поля R характеристики $p = 2$ при $\Phi = B_l$, C_l, F_4 и $p = 3$ при $\Phi = G_2$, в статье [3] возникали ковровые подгруппы $\Phi(\mathfrak{A})$, параметризуемые двумя различными аддитивными подгруппами P и Q основного поля K с условиями

$$R \leq P^p \leq Q \leq P \leq K, \tag{1}$$

причем ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является замкнутым, то есть его ковровая подгруппа не содержит новых корневых элементов, и

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ длинный корень.} \end{cases}$$

(Определение ковра и ковровой подгруппы см. в [4].) При $\Phi = F_4, G_2$ подгруппы P и Q оказались подполями поля K и в [3] был поставлен вопрос. *Являются ли в случае $\Phi = B_l, C_l$ аддитивные подгруппы P и Q с условиями (1) полями?*

Недавно А. В. Степанов дал отрицательный ответ на этот вопрос, но, тем не менее, следующая теорема показывает, что и в этом случае промежуточные ковровые подгруппы $\Phi(\mathfrak{A})$ похожи на группы Шевалле.

Теорема 1. Пусть $\Phi(\mathfrak{A})$ — ковровая подгруппа, лежащая между группами Шевалле $\Phi(R)$ и $\Phi(K)$ типа $\Phi = B_l$ $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 2)$, F_4, G_2, где K — алгебраическое расширение несовершенного поля R характеристики $p = 2$ при $\Phi = B_l$, C_l, F_4 и $p = 3$ при $\Phi = G_2$. Тогда группа $\Phi(\mathfrak{A})$ является простой и обладает расщепляемой насыщенной (B, N)-парой.

Группы $\Phi(\mathfrak{A})$ из теоремы 1 представляют интерес в связи со следующей проблемой А. В. Боровика [5]. *Описать бесконечные группы с расщепляемой насыщенной* (B, N)*-парой.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707).

Литература. [1] Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли. VII-VIII. М.: Мир, 1978. [2] Д. Горенстейн, Конечные простые группы. Введение в их классификацию, М.: Мир, 1985. [3] Я. Н. Нужин, Группы, лежащие между группами Шевалле типа B_l, C_l, F_4, G_2 над несовершенными полями характеристики 2 и 3. Сиб. мат. журн., 54 (2013), 157–162. [4] В. М. Левчук, Параболические подгруппы некототорых ABA -групп. Матем. заметки, 31 (1982), 509–525. [5] А. И. Кострикин, Х. Я. Уначев, С. А. Сыскин, Третья школа по теории конечных групп. УМН, 38 (1983), 236–238.

Сибирский федеральный университет

e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

А. С. Панасенко (Новосибирск)

Центральные порядки в конечномерных простых альтернативных супералгебрах

В работе Форманека [1] исследовались унитальные ассоциативные первичные PI-алгебры (фактически, центральные порядки в матричных алгебрах над конечномерными телами). Было доказано, что такая алгебра является конечным Z-модулем, где Z — центр алгебры.

Ранее в работах [2] и [3] было доказано, что центральные порядки в конечномерных центральных простых альтернативных и йордановых алгебрах являются конечными Z-модулями, где Z — центр алгебры.

Альтернативные первичные и простые супералгебры изучались в работах [4,5]. В частности, там было показано, что первичная неассоциативная альтернативная супералгебра A при некотором дополнительном условии невырожденности либо является тривиальной, либо алгебра $Z^{-1}A$ является простой альтернативной супералгеброй (которые так же были описаны). Здесь Z — четная часть центра супералгебры A. Все простые альтернативные неассоциативные нетривиальные супералгебры являются конечномерными над центром, за исключением скрученной супералгебры векторного типа.

Была доказана следующая

Теорема 1. Пусть A — унитальная супералгебра и Z — четная часть ее центра. Предположим, что $Z^{-1}A$ является альтернативной неассоциативной конечномерной центральной простой супералгеброй. Тогда A является конечным Z-модулем.

В качестве следствия получаем конечность над четной частью центра первичной альтернативной унитальной супералгебры при дополнительных условиях из работы [5].

Работа поддержана РНФ (проект 14-21-00065).

Литература. [1] E. Formanek, Noetherian PI-rings. Comm. Algebra, 1 (1967), 79—86. [2] А. С. Панасенко, Почти конечномерные альтернативные алгебры. Мат. заметки, 98:5 (2015), 747–755. [3] В. Н. Желябин, А. С. Панасенко, Почти конечномерные йордановы алгебры. Алгебра и логика, принята к печати. [4] Е. И. Зельманов, И. П. Шестаков, Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры. Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:4 (1990), 676–693. [5] И. П. Шестаков, Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики. Алгебра и логика, 36:6 (1997), 675–716.

Новосибирский государственный университет
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

e-mail: tom-anjelo@mail.ru

Н. П. Панов (Ульяновск)

О почти нильпотентных многообразиях линейных алгебр с целочисленными PI-экспонентами

Далее характеристика основного поля K предполагается равной нулю. Ненильпотентное многообразие алгебр, все собственные подмногообразия которого являются нильпотентными, называют почти нильпотентным. Используемые определения и обозначения можно найти в монографии [1].

В работе [2] определена линейная алгебра A_2, порождающая почти нильпотентное многообразие экспоненциального роста, $\exp(A_2) = 2$. При этом соответствующий KS_n-модулю $L_n(A_2) = L_n/(L_n \cap Id(A_2))$, $n = 2, 3, \ldots$, $L_n = span\{x_0 X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}$, характер $\chi_n^L(A_2)$ имеет разложение

$$\chi_2^L(A_2) = \chi_{(2)} + \chi_{(1,1)},$$

$$\chi_{2k-1}^L(A_2) = 2\chi_{(k,k-1)}, \quad \chi_{2k}^L(A_2) = 2\chi_{(k,k)} + \chi_{(k+1,k-1)}, \quad k \geq 2, \quad (1)$$

где S_n — симметрическая группа, и прописными буквами обозначены операторы правого умножения, например $x_0 X^2 = (x_0 x)x$, [2, 3].

По аналогии с конструкцией алгебры A_2 в работе [4] для $m = 3, 4, \ldots$ определена линейная алгебра A_m и доказано равенство $\exp(A_m) = m$. Алгебры A_k, $k = 2, 3, \ldots$, удовлетворяют тождествам:

$$x(yz) \equiv 0, \quad x_0X^3 \equiv 0, \quad x_0X^2Z_1 \ldots Z_sY^2 \equiv 0, \tag{2}$$

$$\sum_{\sigma \in S_{m+1}} (-1)^\sigma x_0 X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(2)} \ldots X_{\sigma(m+1)} \equiv 0, \tag{3}$$

где $s \not\equiv m - 2 \pmod m$. В результате применения к многообразиям $var(A_m)$, $m \geq 3$, теоремы о существовании почти нильпотентного многообразия в любом ненильпотентном многообразии получен основной результат — доказательство существования множества почти нильпотентных многообразий с различными целочисленными PI-экспонентами.

Алгебрам A_m посвящены работы [5], [6], основными результатами которых являются следующие утверждения.

Теорема 1. Многообразия $var(A_m)$, $m = 3, 4, \ldots$, являются почти нильпотентными.

Теорема 2. Кратности $m^L_\lambda(A_m)$ в разложении $\chi^L_n(A_m)$, $m = 3, 4, \ldots$, определяются следующим образом:

1. если $\lambda = (1^k)$, $1 \leq k \leq m$, то $m^L_\lambda(A_m) = 1$;
2. если $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^k, \mathfrak{s}^{m-k}\big)$, $\mathfrak{s} \geq 1$, $1 \leq k \leq m$, то $m^L_\lambda(A_m) = m$;
3. если $\lambda = \big((\mathfrak{s}+2)^{k_1}, (\mathfrak{s}+1)^{k_2}, \mathfrak{s}^{m-k_1-k_2}\big)$, $\mathfrak{s} \geq 0$, $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 \leq m - 1$, то $m^L_\lambda(A_m) = k_2 + 1$;
4. $m^L_\lambda(A_m) = 0$ для всех остальных λ.

Теорема 3. Идеал тождеств многообразия $var(A_m)$, $m \geq 2$, порождается системой тождеств (2), (3).

Теорема 4. Все ненулевые кратности $m_\lambda(A_m)$, $m \geq 2$, определяются следующим образом:

1. если удалением одной клетки из диаграммы λ может быть получена единственная диаграмма μ, для которой $m^L_\mu(A_m) > 0$, то $m_\lambda(A_m) = m^L_\mu(A_m)$;
2. если удалением одной клетки из диаграммы λ могут быть получены две различные диаграммы μ_1, μ_2, для которых $m^L_{\mu_1}(A_m), m^L_{\mu_2}(A_m) > 0$, то $m_\lambda(A_m) = m^L_{\mu_1}(A_m) + m^L_{\mu_2}(A_m)$.

Далее приведем определения кодлин, в которых обозначим через $\lfloor x \rfloor$ наибольшее целое число, меньшее или равное x, и пусть $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x. Также используем нотацию Айверсона. Пусть утверждение B является истинным или ложным, тогда $[B] = 1$ если B истинно, иначе $[B] = 0$. Например, если целое r четное, то $[2 \mid r] = 1$.

Теорема 5. Зафиксируем $m \geq 2$. При $n > m$ обозначим через r остаток от деления n на m, если m не делит n, иначе $r = m$. Тогда выполняются следующие равенства

$$l_n^L(A_m) = \begin{cases} m + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m-r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{m-r}{2} \right\rceil, & n > m, \\ 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & n \leq m. \end{cases}$$

Теорема 6. Зафиксируем $m \geq 2$. Если натуральное $n \leq m$, то выполняется равенство

$$l_{n+1}(A_m) = 2 + 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - [2 \mid n]$$

и $l_1(A_m) = 1$. Пусть $n > m$. Обозначим через r остаток от деления n на m, если m не делит n, иначе $r = m$. Тогда

$$l_{n+1}(A_m) = \alpha m + \beta \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil - [2 \mid r] + \gamma \left\lfloor \frac{m-r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{m-r}{2} \right\rceil -$$

$$- [r \leq m - 2 \text{ и } 2 \mid (m-r)],$$

где $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$ при $m < n < 2m$. Если $n \geq 2m$, то $\alpha = 3 - [r = m]$, $\beta = 4$, $\gamma = 4$.

Литература. [1] A. Giambruno, M. Zaicev, Polynomial Identities and Asymptotic Methods. RI: AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2005. [2] S. Mishchenko, A. Valenti, An almost nilpotent variety of exponent 2. Israel J. of Math., 1 (2014), 241–257. [3] О. В. Шулежко, Новые свойства почти нильпотентного многообразия экспоненты два. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 3 (2014), 316–320. [4] С. П. Мищенко, О. В. Шулежко, Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты. Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика, 2 (2015), 53–57. [5] Н. П. Панов, О почти нильпотентных многообразиях с целой экспонентой. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 3 (2017), 331–343. [6] Н. П. Панов, Новые свойства почти нильпотентных многообразий с целыми экспонентами. Чебышевский сборник, 4 (2017), 305–324.

Ульяновский государственный университет
e-mail: nppanov@yandex.ru

Е. П. Петров (Барнаул, Россия)

О степени стандартного тождества в конечномерной нильпотентной алгебре R над полем характеристики, не равной 2, с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ при $N > 2$.

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] была поставлена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). Многими авторами в те годы изучался этот вопрос (Пихтильков С.А., Мальцев Ю.Н., Гусева И.Л., Петров Е.П.) и, в частности, Мальцевым Ю.Н. [2] был поставлен вопрос: какова степень минимального тождества в многообразии $\mathfrak{M}_n$, порожденным всеми n-мерными нильпотентными алгебрами? В 1991 г. автором [3] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, \ldots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, в качестве подтверждения этой гипотезы приводился пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени.

В последние годы автор продолжил исследования с целью нахождения степени минимального тождества в многообразии $\mathfrak{M}_n$. Так, в работе [4] было показано, что всякая ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0.$$

Причем эта оценка является точной.

В процессе обобщения указанного результата в работе [5] выяснилось, что ассоциативная нильпотентная 2-порожденная алгебра R, над полем характеристики, не равной 2, с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ при $N > 2$, удовлетворят при достаточно больших значениях числа N стандартному тождеству значительно меньшей степени, чем N.

Теорема 1. Произвольная 2-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, $N \geq 3$, удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \ldots, x_T) = 0$, где
$T = \lceil \frac{N+2^{m+1}}{m} \rceil - 2$, параметр m вычисляется по формуле:

$$m = \begin{cases} \lfloor \log_2 \frac{N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor, & \text{если } N < \lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor 2^{\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor}; \\ \lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor, & \text{если } N \geq \lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor 2^{\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor}. \end{cases}$$

Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает округление числа x в меньшую сторону (целая часть числа, пол), $\lceil x \rceil$ обозначает округление числа x в большую сторону (потолок).

Для лучшего восприятия взаимосвязи N и T приведем некоторые начальные значения функции $T = T(N)$:

N	$3,4$	$5,6$	$7,8$	$9,10,11$	$\ldots$	$30,31,32$	$33,34,35,36$	$\ldots$
T	4	5	6	7	$\ldots$	14	15	$\ldots$

N	$\ldots$	$97,98,99,100,101$	$\ldots$	$252,253,254,255,256$	$\ldots$
T	$\ldots$	31	$\ldots$	62	$\ldots$

Эта оценка для бесконечного множества значений N определенного вида является точной.

В случае произвольного количества s порождающих алгебры R имеет место следующий результат:

Теорема 2. Произвольная s-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной 2, с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2 \quad (N > 2)$, удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1, x_2, \ldots, x_{N+2}) = 0$.

Причем эта оценка является точной, когда $s \geq N$.

Литература. [1] Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей : (оперативно-информационный материал). В.А. Андрунакиевич, Ин-т математики СО АН СССР, 1982. [2] Ю. Н. Мальцев, О тождествах нильпотентных алгебр. Известия вузов, Мат., 9 (1986), 68–72. [3] Е. П. Петров, О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр. Алгебра и логика, 30, 5 (1991), 540–556. [4] Е. П. Петров, Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры R с условием $dimR^2/R^3 = 2$. Сибирские электронные математические известия, 13 (2016), 1052–1066. [5] Е. П. Петров, Строение, определяющие соотношения и тождества конечномерной нильпотентной алгебры R с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$. Сибирские электронные математические известия, 14 (2017), 1153–1187.

Алтайский государственный университет, Барнаул

e-mail: pep@email.asu.ru

Т. К. Петрова, **М. И. Наумик** (Витебск, Республика Беларусь)

О периодической полугруппе линейных отношений с центральными идемпотентами

В данной работе дано описание полугрупп, указанных в заголовке и в дальнейшим называемых кратко PCJ-полугруппами линейных отношений. Интерес к этому классу (включающему важный подкласс коммутативных периодических полугрупп) обусловлен, прежде всего, простым устройством PCJ-полугрупп линейных отношений. Отметим, что в [1] доказано, периодическая полугруппа линейных отношений конечномерного пространства над полем локально конечна.

Пусть V – левое конечномерное векторное пространство над произвольным телом F. Бинарное отношение $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством $V \oplus V$.

Множество $LR(V)$ всех линейных отношений пространства V является, как известно [2] полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений.

При изучении линейных отношений $a \in LR(V)$ будем рассматривать следующие подпространства V:

$$pr_1 a = \{\overline{x} \in V : \exists \overline{y} \in V, (\overline{x}, \overline{y}) \in a\}; \quad ker a = \{\overline{x} \in V : (\overline{x}, \overline{0}) \in a\};$$

$$pr_2 a = \{\overline{y} \in V : \exists \overline{x} \in V, (\overline{x}, \overline{y}) \in a\}; \quad coker a = \{\overline{y} \in V : (\overline{0}, \overline{y}) \in a\}.$$

Пусть $S \subseteq LR(V)$ – полугруппа. Обозначим $pr_1 S = \sum\limits_{a \in S} pr_1 a$. Назовем S-модулем любое пространство $U \subseteq V$, устойчивое относительно S, т.е. $U \subseteq pr_1 S$, $U_1 = \{\overline{y} \in V : (\overline{x}, \overline{y}) \in a \in S, \overline{x} \in U\}$, то $U_1 \subseteq U$.

$S(U)$ обозначает полугруппу линейных отношений пространства U, индуцированную S. Если $pr_1 S$ разложимо в прямую сумму

$$pr_1 S = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n \tag{1}$$

ненулевых S-модулей и $S_i = S(V_i)$, то мы назовем полугруппу S подпрямой суммой полугрупп S_i, ассоциированной с разложением (1). Если при этом S изоморфна прямому произведению всех S_i, то мы назовем S прямой суммой этих полугрупп и пишем $S = S_1 \dot{+} S_2 \dot{+} ... \dot{+} S_n$.

Заметим, что если e – нетривиальный, т.е. отличный от нуля и единицы, идемпотент из центра полугруппы S, то ясно, что S является подпрямой суммой полугрупп $S(ker e)$, $S(V_1)$ и $S(V_2)$, где

$pr_2 e = cokere \otimes V_1, V_1$ – некоторое дополнение, а $pr_1 S = kere \otimes V_1 \otimes V_2$, где V_2 некоторое дополнение $pr_1 e = kere \otimes V_1$ до $pr_1 S$.

Периодическую полугруппу, содержащую ровно два идемпотента – нуль и единицу, назовем, аналогично [3], локальной, а в случае конечных коммутативных полугрупп в [4] такие полугруппы назывались элементарными. Очевидно, локальная полугруппа является PCJ-полугруппой, а именно идеальным расширением нильполугруппы посредством группы с присоединенным нулем, причем единица группы служит единицей расширения. Сформулируем для удобства очевидную

Лемма. *Если $e \in S$ – идемпотент подполугруппы S из $LR(V)$, то подпространство $U \subseteq pr_1 S$ устойчиво относительно e тогда и только тогда, когда $U = (U \cap kere) \otimes (U \cap V_1) \otimes (U \cap V_1)$.*

Теорема 1. *PCJ-полугруппа линейных отношений над произвольным телом является подпрямой суммой полугрупп, каждая из которых – либо периодическая группа, либо нильпотентная полугруппа, либо локальная полугруппа.*

Теорема 2. *Для того, чтобы PCJ-полугруппа линейных отношений над произвольным телом была максимальной (в классе PCJ-полугрупп линейных отношений) необходимо и достаточно, чтобы она была прямой суммой максимальных локальных полугрупп.*

Литература. [1] L. B. Sneperman. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relations. Semigroup Forum. 25 (1982), 203–211. [2] С. Маклейн. Алгебра аддитивных отношений. Сб. переводов. Математика. 7:6 (1963), 1–12. [3] И. О. Коряков. Линейные периодические полугруппы с центральными идемпотентами. Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск. (1987), 72–80. [4] И. С. Понизовский. О матричных представлениях конечных коммутативных полугрупп. Сиб. мат. журнал. XI(5) (1970), 1098–1106.

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

e-mail: naumik@tut.by

А. Г. Пинус (Новосибирск)

О пространствах функциональных клонов на множествах

Через F_A обозначим совокупность функционалных клонов на множестве A. Традиционно эта совокупность рассматривается как решетка $L_A = \langle F_A; \wedge, \vee \rangle$ относительно теоретико-множественного отношения включения $\subseteq$ на клонах. Для любого натурального n через $F^{(n)}$ обозначим n —фрагмент клона F — совокупность функций входящих в F арность которых не превышает числа n. В работе [1] на совокупности F_A введена следующая естественная метрика: для $F_1, F_2 \in F_A$

$$d(F_1, F_2) = \begin{cases} 1/\min\{n \in \omega | F_1^{(n)} \neq F_2^{(n)}\}, & \text{если } F_1 \neq F_2; \\ 0, & \text{если } F_1 = F_2. \end{cases}$$

превращающая совокупность F_A в метрическое пространство $\rho_A = \langle F_A; d\rangle$.

Имеют место следующие свойства этих метрических пространств.

Теорема 1. а) Пространства ρ_A полны.

б) Пространство ρ_A компактно тогда и только тогда, когда множество A конечно.

в) Для любых $B \subseteq A$ пространство ρ_B изометрически вложимо в пространство ρ_A и пространство ρ_B является топологическим ретрактом пространства ρ_A.

г) Для любого не менее чем трехэлементного A существует подрешетка L решетки L_A образующая совершенное подмножество пространства ρ_A гомеоморфное канторову дисконтинууму.

д) Решеточные операции $\wedge, \vee$ решетки L_A непрерывны в пространстве ρ_A.

е) Для любого $\delta > 0$ δ–окрестность любой точки пространства ρ_A представляет собой выпуклую подрешетку решетки L_A с наименьшим и наибольшим элементами.

Клон $F \in F_A$ назовем ограниченно порожденным, если он порождается некоторым своим фрагментом $F^{(n)}$. Совокупность всех ограниченно порожденных клонов на A образует подрешетку $L*_A$ решетки L_A. Имеет место

Теорема 2. Решетка $L*_A$ является всюду плотной в пространстве ρ_A подрешеткой решетки L_A универсально (в теоретико-модельном смысле) эквивалентной последней. Любая $\forall\exists$-формула истинная на решетке L_A будет истинна и на решетке $L*_A$ и, значит, решетка $L*_A$ замкнута относительно функций определимых на решетке L_A бескванторными формулами.

Литература. [1] А. Г. Пинус. Размерности функциональных клонов, метрика на их совокупности.- Сибирские электронные математ. Известия, 2016, т.13, с.366–374.

Новосибирский государственный технический университет

e-mail: ag.pinus@gmail.com

В. Б. Поплавский (Саратов, Россия)

Идемпотенты частично упорядоченных моноидов

В докладе бсуждаются свойства множеств левых и правых единиц элемента $a \in \mathbf{X}$ частично упорядоченного моноида $\mathbf{X}$, т. е. полугруппы с единицей 1, на которой задан стабильный относительно полугрупповой операции умножения частичный порядок $\leq$.

Пусть существует наибольшее решение уравнения $xa = a$ для некоторого $a \in \mathbf{X}$, тогда обозначим его через a^R. Если существует наименьшее решение уравнения $xa = a$, то обозначим его через a_R. Соответственно, если для уравнения $ax = a$ существует наибольшее решение, то обозначим его через a^L, и если среди решений уравнения $ax = a$ существует наименьшее, то обозначим его через a_L.

Теорема 1. Если a^R, a_R, a^L, a_L существуют, то они являются идемпотентами моноида $\mathbf{X}$.

Теорема 2. Пусть e – идемпотент моноида $\mathbf{X}$. Тогда следующие условия равносильны:

$$1 \leq e \Longleftrightarrow e = e^R \Longleftrightarrow e = e^L; \qquad e \leq 1 \Longleftrightarrow e = e_R \Longleftrightarrow e = e_L.$$

Определение 1. Идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом,* порожденным заданным на моноиде порядком $\leq$, если он сравним с единицей моноида $\mathbf{X}$, т. е. $e \leq 1$ или $1 \leq e$. Идемпотент назовем *первичным* в противном случае, т. е. если он не сравним с единицей заданным на моноиде частичным порядком $\leq$.

Таким образом, если идемпотент e – вторичный, то выполняется либо $e = e^R = e^L$, либо $e = e_R = e_L$. В случае $e = e^R = e^L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом максимального типа*, в случае $e = e_R = e_L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом минимального типа.*

Если существуют элементы a^R, a_R, a^L, a_L для некоторого $a \in \mathbf{X}$, то они являются вторичными идемпотентами. Будем называть их соответственно *R-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа или L-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа, порожденными элементом a.*

Множества всех идемпотентов, первичных идемпотентов, вторичных идемпотентов максимального и минимального типов будем обозначать символами E, E_0, $E^{\uparrow}$ и $E_{\downarrow}$ соответственно. Заметим, что $E_0 \cap E^{\uparrow} = \emptyset$, $E_0 \cap E_{\downarrow} = \emptyset$, $E^{\uparrow} \cap E_{\downarrow} = \{1\}$ и $E = E_0 \cup E^{\uparrow} \cup E_{\downarrow}$.

Приведем примеры моноидов и их идемпотентов

Пусть $(\mathbf{X}, \wedge, 1)$ – нижняя полурешетка с наибольшим элементом 1 в качестве единицы моноида, которым является эта полурешетка. Очевидно, что в этом случае все элементы моноида X являются вторичными идемпотентами минимального типа: $X = E_{\downarrow}$. Аналогично, если $(\mathbf{X}, \vee, 0)$ – верхняя полурешетка с наименьшим элементом 0 в качестве единицы моноида, которым является эта полурешетка. В этом случае выполняется равенство $X = E^{\uparrow}$.

Пример нетривиального строения множества идемпотентов дает множество всех бинарных отношений $B(M)$ на множестве M ($|M| \geq 3$), которое определяется как множество всевозможных подмножеств декартова квадрата $M \times M$ с частичным порядком включения $\subseteq$. На множестве $B(M)$ определена стандартным образом структура моноида с операцией умножения бинарных отношений, относительно которого частичный порядок включения $\subseteq$ стабилен, и единицей $\Delta = \{(x,x)|x \in M\}$. Вторичными идемпотентами минимального типа моноида $(B(M), \subseteq)$ являются все такие бинарные отношения ρ, для которых выполняется $\rho \subseteq \Delta$. Например, $\rho = \{(x,x),(y,y)\}$ для любых $x, y \in M$. Очевидно также, что множество первичных идемпотентов E_0 непусто. Например, $\{(x,x),(x,y),(y,y),(y,x)\} \in E_0 \subset B(M)$. Множество вторичных идемпотентов максимального типа $E^{\uparrow}$ содержит также элементы, отличные от Δ. Например, $\Delta \cup \{(x,y),(y,x)\} \in E^{\uparrow} \subset B(M)$.

Примеры построения вторичных идемпотентов максимального типа в полугруппах матриц с элементами из произвольной булевой алгебры, их свойства, применения можно найти в [1], [2].

Множество идемпотентов E любой полугруппы $\mathbf{X}$ всегда можно частично упорядочить, вводя так называемый *естественный порядок* $\preceq$, определяемый для элементов $a, b \in E$ следующим образом: $a \preceq b \Leftrightarrow a = a \cdot b = b \cdot a$ (см. [1] и [2, §7.1]).

Теорема 3. Какой бы стабильный порядок $\leq$ ни был на моноиде $\mathbf{X}$ всегда выполняется равенство $\leq = \preceq$ на множестве вторичных идемпотентов минимального типа $E_{\downarrow} \subseteq \mathbf{X}$, и равенство $\leq = \succeq$ на множестве вторичных идемпотентов максимального типа $E^{\uparrow}$, где $\preceq$ – естественный порядок на множестве идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$, а частичный порядок $\succeq = \preceq^{-1}$ является обратным бинарным отношением для естественного порядка $\preceq$.

Теорема 4. Пусть $\leq$ и $\sqsubseteq$ два стабильных порядка моноида $\mathbf{X}$ относительно которых все идемпотенты моноида не превосходят единицы. Пусть существуют $a_{L_{\leq}}$, $a_{R_{\leq}}$ – вторичные идемпотенты минимального типа, порожденные элементом $a \in \mathbf{X}$ относительно порядка $\leq$, и вторичные идемпотенты минимального типа $a_{L_{\sqsubseteq}}$, $a_{R_{\sqsubseteq}}$, порожденные тем же элементом относительно порядка $\sqsubseteq$. Тогда

$$a_{L_{\leq}} = a_{L_{\sqsubseteq}}, \quad a_{R_{\leq}} = a_{R_{\sqsubseteq}}.$$

Соответствующее утверждение можно сформулировать для вторичных идемпотентов максимального типа.

Литература. [1] Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц. // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 2. С. 26-33. [2] Поплавский В. Б. О частичных порядках на множестве булевых матриц // Электронные информационные системы. 2017. №3 (14) С.105-113. [3] Вагнер В. В. Обобщенные группы // ДАН СССР. 1952. № 84. С. 1119—1122. [4] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2т. – М.:"МИР 1972. Т. 2. 422 с.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

e-mail: poplavskivb@mail.ru

А. В. Попов (Ульяновск)

Многообразия йордановых алгебр почти экспоненциального роста

Будем предполагать, что характеристика основного поля $\mathbb{F}$ равна нулю.

Пусть $\mathcal{V}$ – многообразие линейных алгебр над $\mathbb{F}$, т.е. класс всех линейных алгебр, удовлетворяющих фиксированному набору тождественных соотношений. Обозначим через $P_n(\mathcal{V})$ подпространство свободной алгебры многообразия $\mathcal{V}$, образованное все полилинейными элементами степени n от образующих $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $c_n(\mathcal{V}) = \dim P_n(\mathcal{V})$, тогда верхней и нижней экспонентой многообразия $\mathcal{V}$ называются соответственно величины

$$\overline{EXP}(\mathcal{V}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{V})}, \qquad \underline{EXP}(\mathcal{V}) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{V})},$$

в случае если они существуют. В случае же их совпадения говорят просто об экспоненте многообразия $EXP(\mathcal{V})$.

Если последовательность $c_n(\mathcal{V})$ растет асимптотически быстрее любой экспоненты, то многообразие $\mathcal{V}$ называют многообразием сверэкспоненциального роста. Отдельный интерес представляют многообразия со следующим экстремальным свойством: само многообразие $\mathcal{V}$ имеет сверэкспоненциальный рост, а всякое его собственное подмногообразие имеет уже экспоненциально ограниченный рост. Тогда говорят, что $\mathcal{V}$ имеет почти экспоненциальный рост.

Пусть L – алгебра Ли. Определим на пространстве $J(L) = G \otimes L \oplus G_1$, где G – алгебра Грассмана счетного ранга, операцию умножения $\circ$ следующим образом:

$$(a \otimes g) \circ h = a \otimes gh, \text{ если } a \otimes g \in L \otimes G_0, h \in G_1$$
$$(a \otimes g) \circ (b \otimes h) = ab \otimes gh, \text{ если } a \otimes g, b \otimes h \in L \otimes G_0.$$

Все остальные произведения будем считать нулевыми.

Данная алгебра является йордановой [1] и, кроме того, удовлетворяет тождествам

$$x^4 \equiv 0, \tag{1}$$

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_5 x_6) \equiv 0. \tag{2}$$

В алгебре $J(L)$ определим подалгебру $J'(L) = G_0 \otimes L^2 \oplus G_1 \otimes L \oplus G_1$.

Результаты настоящей работы представлены в следующих теоремах:

Теорема 1. Пусть L – алгебра Ли, $\mathcal{V} = \mathrm{var}(L)$, $\mathcal{V}_J = \mathrm{var}(J(L))$, $\mathcal{V}'_J = \mathrm{var}(J'(L))$. Тогда:

1. Если $\mathcal{V}$ имеет экспоненциально ограниченный рост, то справедливы следующие неравенства

$$2\sqrt{\overline{EXP}(L)} \leq \overline{EXP}(\mathcal{V}'_J) \leq \overline{EXP}(\mathcal{V}_J) < 2\sqrt{\overline{EXP}(L)} + 1.$$

$$2\sqrt{\underline{EXP}(L)} \leq \underline{EXP}(\mathcal{V}'_J) \leq \underline{EXP}(\mathcal{V}_J) < 2\sqrt{\underline{EXP}(L)} + 1.$$

2. Если $\mathcal{V}$ имеет сверхэкспоненциальный рост, то многообразия $\mathcal{V}_J$ и $\mathcal{V}'_J$ также имеют сверхэкспоненциальный рост.

Теорема 2. Пусть L – алгебра Ли, $\mathcal{V} = \mathrm{var}(L)$, $\mathcal{V}'_J = \mathrm{var}(J'(L))$, $\mathcal{W}$ – собственное подмногообразие в $\mathcal{V}'_J$. Тогда существует алгебра Ли M, порождающая собственное подмногообразие $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$ такое, что

$$W \subset \mathrm{var}(J(M)).$$

Из теорем 1 и 2 непосредственно получается следствие:

Следствие 1. Пусть L – алгебра Ли, порождающая многообразие $\mathcal{V}$ почти экспоненциального роста. Тогда многообразие $\mathrm{var}\,(J'\,(L))$ также имеет почти экспоненциальный рост.

В классе алгебр Ли в настоящий момент известно одно многообразие почти экспоненциального роста, – многообразие $\mathcal{A}N_2$ [2,3], определенное тождеством

$$(x_1x_2x_3)\,(y_1y_2y_3) \equiv 0.$$

Обозначим через $\mathcal{V}J$ многообразие, порождаемое алгеброй $J'\,(L)$, где L – алгебра, порождающая многообразие $\mathcal{A}N_2$.

Теорема 3. Справедливы следующие утверждения:

1. многообразие $\mathcal{V}J$ имеет почти экспоненциальный рост;
2. базис тождеств многообразия $\mathcal{V}J$ составляют тождества (1), (2) и тождество
$$(x_1x_2x_3x_4)\,(y_1y_2y_3y_4) \equiv 0.$$

Многообразие $\mathcal{V}J$ является первым примером многообразия почти экспоненциального роста в йордановом случае. При этом заметим, что другим предполагаемым многообразием почти экспоненциального роста является многообразие, порожденное йордановой алгеброй билинейной невырожденной симметрической формы на бесконечномерном пространстве [4].

Литература. [1] И. П. Шестаков, Альтернативные и йордановы супералгебры. Труды X Сибирской Школы “Алгебра и Анализ”. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997, 157-169. [2] И. Б. Воличенко, О многообразии алгебр Ли $\mathcal{A}N_2$ над полем характеристики нуль. ДАН БССР. 1981. Т.25. №12. С. 1063–1066. [3] И. Б. Воличенко, Многообразие алгебр Ли с тождеством $[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]] = 0$ над полем характеристики нуль. Сиб. матем. журнал. 1984. Т.25. №3. С. 40–54. [4] V. Drensky, Polynomial identities for the Jordan algebra of a Symmetric Billinear Form. Journal of algebra 108 (1987), 66-87.

Ульяновский государственный университет

e-mail: klever176@rambler.ru

А. М. Попова, **Е. В. Грачев** (Новосибирск)

О факторизации автоморфизмов Q-алгебры конечной группы G

Будем рассматривать алгебру $\mathbb{Q}[R_l(G)]$, где $R_l(G)$ — левое регулярное матричное представление конечной группы $G = \{e, g_2, \cdots, g_n\}$. Пусть σ – некоторый автоморфизм такой алгебры. Существует ли единица s алгебры $\mathbb{Q}[R_l(G)]$ такая, что $\sigma = \tau \circ \varphi_s$, гле τ – автоморфизм целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[R_l(G)]$, а φ_s – сопряжение единицей s?

Обозначим $L(G) = \sigma(R_l(G))$. Тогда $L(g_i) = \frac{p_1^i}{q_1^i} R_l(e) + \cdots + \frac{p_n^i}{q_n^i} R_l(g_n)$, $i = 1, \cdots, n$.

Легко показать, что если матрица $a \in \mathbb{Q}[R_l(G)] \cap M_n(\mathbb{Z})$, то $a \in \mathbb{Z}[R_l(G)]$. Поэтому сформулированный вопрос сводится к ситуации аналогичной теореме Бернсайда ([1], стр. 68). Имеется конечная группа матриц с рациональными элементами, существует ли единица s алгебры $\mathbb{Q}[R_l(G)]$ такая, что в результате сопряжения матриц группы матрицей s они становятся целочисленными? Следуя идее доказательства теоремы Бернсайда, будем искать в $\mathbb{Z}^n$ правый подмодуль N инвариантный относительно $L(G)$ и имеющий матрицу перехода, лежащую в $\mathbb{Q}[R_l(G)]$. Заметим, что матрицы из $\mathbb{Q}[R_l(G)]$ имеют вид $\alpha_1 R_l(e) + \cdots + \alpha_n R_l(g_n) = (\alpha\ R(g_2)\alpha \cdots R(g_n)\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^T$, $R(g_i)$ – правое регулярное матричное представление группы G. Тогда если $p_i = (\frac{p_1^i}{q_1^i}, \cdots, \frac{p_n^i}{q_n^i})$, то $L(g_i) = (p_i^T\ R(g_2)p_i^T \cdots R(g_n)p_i^T)$.

Пусть $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, $uL(g_i) \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \cdots, n$.

Обозначим

$$S(u) = \begin{pmatrix} u \\ uR(g_2^{-1}) \\ \vdots \\ uR(g_n^{-1}) \end{pmatrix}, \widetilde{S}(u) = (u^T\ R(g_2^{-1})u^T \cdots R(g_n^{-1})u^T), L' = \begin{pmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix}.$$

Теорема Пусть G – конечная группа.

Для данного автоморфизма σ алгебры $\mathbb{Q}[R_l(G)]$ существуют единица s этой алгебры и автоморфизм τ кольца $\mathbb{Z}[R_l(G)]$ такие, что $\sigma = \tau \circ \varphi_s$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия. Существует вектор $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ такой, что

1) $uL(g_i) \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \cdots, n$;

2) матрица $s = u_1 R_l(e) + \cdots + u_n R_l(g_n)$ – обратима и не перестановочна с некоторыми матрицами $L(g_i)$;

3) существуют матрицы $A_i \in M_n(\mathrm{Z})$ такие, что выполняются равенства $L'\widetilde{S}(u) R_l(g_i^{-1}) = A_i S(u)$, $i = 1, \cdots, n$.

Литература. [1] Д. А. Супруненко. Группы матриц. М.: Наука, 1972.

А. Л. Расстригин (Волгоград)

О наследственности формаций унарных алгебр

Класс алгебраических систем называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формации получили широкое распространение и сыграли важную роль в теории конечных групп [1]. Понятие формации групп было расширено до понятия формации алгебраических систем в [2]. Разными авторами изучались формации произвольных алгебр [3, 4], а также формации конкретных типов алгебраических систем [5, 6].

Алгебра называется *унарной*, если все операции этой алгебры унарные. Унарные алгебры имеют отличия по сравнению с такими классическими алгебрами как группы, кольца, решетки и т. п. Например, класс унарных алгебр не образует конгруэнц-модулярного многообразия. В этой связи такие алгебры вызывают значительный интерес и служат источником примеров в универсальной алгебре.

Унарные алгебры с одной операцией называются *унарами*. Для конечных алгебр такого вида полностью описана [7] решетка формаций по отношению включения классов и показано, что каждая такая формация является наследственной. Формация называется *наследственной*, если вместе с каждой алгеброй она содержит и любую ее подалгебру. В настоящем сообщении мы рассматриваем коммутативные унарные алгебры. Унарная алгебра называется *коммутативной*, если любые две её операции перестановочны, т. е. являются эндоморфизмами этой алгебры. Для таких алгебр известно описание [8] подпрямо неразложимых алгебр, полученное в теории автоматов.

Псевдомногообразием [9, 10] называется класс конечных алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, фактор-алгебр и конечных прямых произведений. Таким образом, всякая наследственная формация, которая состоит из конечных алгебр, является псевдомногообразием и для нее применимо синтаксическое описание последних [10].

Теорема 1. Каждая формация конечных коммутативных унарных алгебр является наследственной формацией.

Следствие 2. Каждая формация конечных коммутативных унарных алгебр является псевдомногообразием.

Следствие 3. Пусть C — класс всех конечных коммутативных унарных алгебр и F — формация алгебр из C. Тогда существует такая последовательность тождеств $e_1, e_2, \ldots$, что $A \in C$ принадлежит F тогда и только тогда, когда в A выполнены все тождества e_n, кроме конечного числа.

Унарную алгебру называют *связной*, если любые две ее однопорожденные подалгебры имеют непустое пересечение. Связную унарную алгебру называют *петельносвязной*, если она содержит наименьшую подалгебру, состоящую из одного элемента.

Теорема 4. Каждая формация петельносвязных унарных алгебр является наследственной формацией.

Литература. [1] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. [2] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. [3] Guo W., Shum K. P. Minimal formations of universal algebras // Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. 2001. Vol. 21, no. 2. P. 201–205. [4] Guo W., Shum K. P. Formation operators on classes of algebras // Communications in Algebra. 2002. Vol. 30, no. 7. P. 3457–3472. [5] Ballester-Bolinches A., Pin J.-É., Soler-Escrivà X. Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's theorem revisited // Forum Mathematicum. 2012. Vol. 26, no. 6. P. 1731–1761. [6] Lihová J., Pócs J. On formations of lattices // Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics. 2009. No. 15. P. 63–72. [7] Расстригин А. Л. Формации конечных унаров // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 2 (38). С. 102–109. [8] Ésik Z., Imreh B. Subdirectly irreducible commutative automata // Acta Cybernetica. 1981.Vol. 5, no. 3. P. 251–260. [9] Eilenberg S. Automata, languages, and machines. Vol. B. Academic Press, New York, 1976. [10] Ash C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // Journal of Algebra. 1985. Vol. 92, no. 1. P. 104–115.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Н. С. Романовский (Новосибирск)

Теория моделей разрешимых групп

Группа G называется *m-жёсткой*, если в ней существует нормальный ряд

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_m > G_{m+1} = 1,$$

факторы которого G_i/G_{i+1} абелевы и, рассматриваемые как (правые) $\mathbb{Z}[G/G_i]$-модули, не имеют модульного кручения. В [1] доказано, что такой ряд, если существует, определяется группой G однозначно и ступень разрешимости группы в точности равна m. Для членов этого (жёсткого) ряда вводятся обозначения $G_i = \rho_i(G)$. Жёсткими (то есть m-жёсткими для соответствующего m) будут свободные разрешимые группы. Жёсткая группа G называется *делимой*, если элементы фактора $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$ или, другими словами, $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ является векторным пространством над телом частных $Q(G/\rho_i(G))$ этого кольца. Жёсткая группа G называется *расщепляемой*, если она распадается в последовательное полупрямое произведение $A_1A_2\dots A_m$ абелевых групп $A_i \cong \rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$, здесь A_i нормализует A_j при $i \le j$. Делимая расщепляемая жёсткая группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма мощностями α_i баз соответствующих векторных пространств A_i, она обозначается через $M(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$. Необходимые конструкции и факты можно найти в [2]. В [3] доказано, что любая делимая жёсткая группа расщепляется, то есть изоморфна какой-то группе $M(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$. Говорят, что одна m-жёсткая группа G вложена в другую H *независимо*, если любая система элементов из $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$, линейно независимая над кольцом $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, остается линейно независимой и над кольцом $\mathbb{Z}[H/\rho_i(H)]$. В [2] установлено, что всякая m-жёсткая группа независимо вкладывается в подходящую группу $M(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$.

Зафиксируем счётную делимую m-жёсткую группу M, она конструктивизируема. Обозначим через $\mathfrak{T}_m$ теорию первой ступени класса делимых m-жёстких групп в стандартной сигнатуре теории групп и через $\mathfrak{T}_m(M)$ теорию класса делимых m-жёстких M-групп (содержащих M в качестве фиксированной независимой подгруппы) в сигнатуре, расширенной константами из M. Сформулируем основные результаты, часть из них получена совместно с А.Г.Мясниковым.

ТЕОРЕМА 1. *Теории $\mathfrak{T}_m$ и $\mathfrak{T}_m(M)$ полны и рекурсивно аксиоматизируемы, значит разрешимы и $\mathfrak{T}_m$ совпадает с элементарной теорией любой делимой m-жёсткой группы, а $\mathfrak{T}_m(M)$ — с элементарной теорией с константами из M любой делимой m-жёсткой группы, в которую M независимо вложена.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $G \leqslant H$ — модели теории $\mathfrak{T}_m$ или $\mathfrak{T}_m(M)$. Тогда вложение G в H является элементарным в том только том случае, если оно независимо.*

ТЕОРЕМА 2. *Теории $\mathfrak{T}_m$ и $\mathfrak{T}_m(M)$ являются ω-стабильными.*

Отметим, что если группа $M(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ несчётна, то её мощность совпадает с максимальным α_i. Напомним также [1], что для m-жёсткой группы G определяется размерность $d(G) = (d_1(G),\dots,d_m(G))$, состоящая из m-ки кардинальных чисел, где $d_i(G)$ обозначает ранг модуля $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$, то есть мощность (любой) максимальной линейно независимой над кольцом $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$ системы элементов этого модуля. В случае, когда m-жёсткая группа G независимо вложена в m-жёсткую группу H, имеют место неравенства $d_i(G) \leqslant d_i(H)$ для всех индексов, и мы можем говорить о коразмерности H над G, она также представляет из себя m-ку кардинальных чисел. Для делимой m-жёсткой группы $G = M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ имеем $d(G) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть λ — бесконечное кардинальное число.*
1) *Группа $M(\beta_1, \dots, \beta_m)$ является λ-насыщенной тогда и только тогда, когда $\lambda \leq \beta_i$ для всех индексов.*
2) *Группа $M(\beta_1, \dots, \beta_m)$ является насыщенной тогда и только тогда, когда $\beta_1 = \ldots = \beta_m$ — бесконечный кардинал.*
3) *Счётная модель теории $\mathfrak{T}_m(M)$ является насыщенной тогда и только тогда, когда ее коразмерность над M равна $(\omega, \dots, \omega) = \omega^m$.*
4) *Пусть $\lambda > \omega$. Модель мощности λ теории $\mathfrak{T}_m(M)$ является насыщенной тогда и только тогда, когда она имеет вид $M(\lambda, \dots, \lambda) = M(\lambda^m)$.*

Важную роль в рассматриваемых задачах играет делимая m-жёсткая группа $M(\omega, \dots, \omega) = M(\omega^m)$, являющаяся счётной насыщенной моделью теории $\mathfrak{T}_m$. Мы утверждаем, что она будет предельной группой системы Fraisse всех конечно порождённых m-жёстких групп. Дадим адаптированные к нашей ситуации определения. Для данной m-жёсткой группы G обозначим через $\mathrm{age}(G)$ множество всех конечно порождённых независимых подгрупп ступени разрешимости m и через $\overline{\mathrm{age}}(G)$ соответствующий класс групп. Пусть также $\mathcal{K}_m$ обозначает класс всех конечно порождённых m-жёстких групп. Мы знаем из [2], что всякая конечно порождённая m-жёсткая группа независимо вкладывается в делимую m-жёсткую группу конечного ранга, а значит и в группу $M(\omega^m)$, поэтому $\overline{\mathrm{age}}(M(\omega^m)) = \mathcal{K}_m$. Назовем m-жёсткую группу G предельной для класса $\mathcal{K}_m$, если она удовлетворяет следующим свойствам:
(i) счётная;
(ii) $\overline{\mathrm{age}}(G) = \mathcal{K}_m$;
(iii) однородность: если $U, V \in \mathrm{age}(G)$ и $\varphi : U \to V$ — изоморфизм, то он расширяется до автоморфизма G.

ТЕОРЕМА 4. *Предельная группа для класса $\mathcal{K}_m$ определяется однозначно и она изоморфна $M(\omega^m)$.*

Мы также изучаем пересечения элементарных подмоделей в моделях теорий $\mathfrak{T}_m$ и $\mathfrak{T}_m(M)$.

ТЕОРЕМА 5. 1) *Пересечение некоторого множества элементарных подмоделей модели теории $\mathfrak{T}_m$ является элементарной под-*

моделью в том и только том случае, если оно имеет ступень разрешимости m.

2) *Пересечение любого множества элементарных подмоделей модели теории* $\mathfrak{T}_m(M)$ *снова является элементарной подмоделью.*

Последняя наша теорема связана с элиминацией кванторов исследуемых теорий.

ТЕОРЕМА 6. *Всякая формула теории* $\mathfrak{T}_m$ *или теории* $\mathfrak{T}_m(M)$ *эквивалентна булевой комбинации* $\forall\exists$*-формул.*

Литература. [1] A. Myasnikov, N. Romanovskiy, Krull dimension of solvable groups, J.Algebra, 324 (10), 2010, pp. 2814-2831. [2] Н. С. Романовский, Делимые жёсткие группы, Алгебра и логика, 47, N 6 (2008), 762-776. [3] Н. С. Романовский, Делимые жёсткие группы. Алгебраическая замкнутость и элементарная теория, Алгебра и логика, 56, N 5 (2017), 593-612. [4] А. Г. Мясников, Н. С. Романовский, Делимые жёсткие группы. II. Стабильность, насыщенность и элементарные подмодели, Алгебра и логика, 57, N 1 (2018), 43-56.

А. Н. Рыбалов (Омск)

Релятивизованные генерические классы P и NP

Бейкер, Гилл и Соловей в [1] году построили такие два оракула A и B, что $\mathrm{P}^A = \mathrm{NP}^A$, но $\mathrm{P}^B \neq \mathrm{NP}^B$. Тем самым, они показали, что неравенство $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не может быть доказано с использованием метода диагонализации. В рамках генерического подхода [2] алгоритмическая проблема рассматривается не на всём множестве входов, а на некотором подмножестве «почти всех» входов. Такие входы образуют так называемое генерическое множество. Понятие «почти все» формализуется введением естественной меры на множестве входных данных. В данной работе определяются генерические аналоги genP и genNP классов вычислительной сложности P и NP, а также их релятивизованные версии. Доказывается генерический аналог теоремы Бейкера-Гилла-Соловея: существуют такие оракулы A и B, что $\mathrm{genP}^A = \mathrm{genNP}^A$, но $\mathrm{genP}^B \neq \mathrm{genNP}^B$. Таким образом, для решения генерического аналога проблемы совпадения классов P и NP метод диагонализации также неприменим.

Для подмножества $S \subseteq \{0,1\}^*$ определим последовательность

$$\rho_n(S) = \frac{|S_n|}{2^n},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где S_n — множество входов из S длины n. *Асимптотической плотностью* S назовем предел (если он существует)

$$\rho(S) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(S).$$

Множество S называется *генерическим*, если $\rho(S) = 1$, и *пренебрежимым*, если $\rho(S) = 0$.

Множество $S \subseteq \{0,1\}^*$ принадлежит *классу* genP, если существует разрешимое за полиномиальное время генерическое множество $G \subseteq \{0,1\}^*$ такое, что $G \cap S$ разрешимо за полиномиальное время. Множество $S \subseteq \{0,1\}^*$ принадлежит *классу* genNP, если существует разрешимое за полиномиальное время генерическое множество $G \subseteq \{0,1\}^*$ такое, что $S \cap G \in \mathrm{NP}$. Аналогично определяются релятивизованные версии этих классов P^A и NP^A для любого оракула $A \subseteq \{0,1\}^*$.

Теорема 1. Существуют такие оракулы A и B, что $\mathrm{genP}^A = \mathrm{genNP}^A$ и $\mathrm{genP}^B \neq \mathrm{genNP}^B$.

Литература. [1] T. Baker, J. Gill, R. Solovay. Relativizations of the P=?NP question. SIAM Journal on Computing, 4 (1975), 431–442. [2] I. Kapovich, A. Myasnikov, P. Schupp, V. Shpilrain. Generic-case complexity, decision problems in group theory and random walks. Journal of Algebra, 264:2 (2003), 665–694.

Омский государственный технический университет

e-mail: alexander.rybalov@gmail.com

А. А. Рябенко (Москва)

Построение гипергеометрических решений разностных и q-разностных неоднородных систем средствами компьютерной алгебры

Для однородной линейной разностной (q-разностной) системы $Ly(x) = 0$ с коэффициентами в виде рациональных функций одной переменной x над некоторым полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 в работах [4] и [5] был предложен алгоритм и его реализация поиска общего гипергеометрического над $\mathbb{K}(x)$ решения. Алгоритм поиска частного гипергеометрического решения неоднородной системы $Ly(x) = b(x)$ с гипергеометрической над $\mathbb{K}(x)$ правой частью позволит найти общее гипергеометрическое решение заданной неоднородной системы. В этой работе предлагается реализация такого алгоритма.

Пусть задана система вида $Ly(x) = b(x)$, где $L \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}(x))[\sigma]$ и $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))^T$ — вектор-столбец неизвестных;

$b(x)$ — вектор-столбец, элементы которого являются конечной суммой гипергеометрических термов, т.е. таких $h(x) \neq 0$, что $\sigma h(x) = r(x)h(x)$ для некоторой рациональной функции $r(x) \in \mathbb{K}(x)$. В разностном случае, $\sigma y(x) = y(x+1)$; в q-разностном, $\sigma y(x) = y(q\,x)$, где $q \in \mathbb{K}$, $x = q^k$, k — переменная, принимающая значения в $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Поиск частного решения системы $Ly(x) = b(x)$ осуществляется точно так же, как поиск частного решения неоднородного скалярного уравнения с гипергеометрической правой частью (см. [3], [7]). Аналогично Prop. 5.1 из [7] формулируется и доказывается

Предложение. Пусть $L \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}(x))[\sigma]$, $h(x)$ — гипергеометрический терм и $F(x) \in \mathbb{K}(x)^m$. Тогда $L(h(x)F(x)) = h(x)R(x)$, где $R(x) \in \mathbb{K}(x)^m$.

На этом предложении основан следующий алгоритм построения частного решения. Правая часть системы представляется в виде конечной суммы $b(x) = h_1(x)\,R_1(x) + \cdots + h_s(x)\,R_s(x)$, где $R_1(x), \ldots, R_s(x) \in \mathbb{K}(x)^m$ и $h_1(x), \ldots, h_s(x)$ — попарно неподобные гипергеометрические термы (т.е. $\dfrac{h_i(x)}{h_j(x)} \notin \mathbb{K}(x)$ для $i \neq j$). Если для всех $i = 1, \ldots, s$ существуют решения систем

$$L(h_i(x)F_i(x)) = h_i(x)\,R_i(x), \tag{1}$$

где $F_i(x)$ — вектор-столбец неизвестных рациональных функций от x, то решение исходной системы будет $y(x) = h_1(x)\,F_1(x) + \cdots + h_s(x)\,F_s(x)$. Разделив коэффициенты и правую часть системы (1) на $h_i(x)$ получим систему $L_iF_i(x) = R_i(x)$, где $L_i \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}(x))[\sigma]$, рациональные решения которой находим с помощью алгоритма из [2], [6] в разностном случае и из [1], [5] в q-разностном.

Реализация выполнена в Maple 2017. Для разностной системы $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Для q-разностной системы $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q)$, где q — трансцендентно над $\mathbb{Q}$ и обозначено некоторым именем. Реализация является расширением возможностей пакетов, представленных в [4], [5], и доступна по адресам [8], [9].

Например, для поиска частных решений следующей заданной в Maple q-разностной системы:

```
>S := <<-(q^3-x)/q^2 | q/x>,
       <(q^6-q^3*x^2-x^2)/(q*x^2) | (q^3-x^2-x)/x>> . y(q*x) +
      <<-x/q| -1>,<-(q^5-q^2*x-x)/x| -(q^3-x)/q>> . y(x) =
       <-x/q^4, q^(k*(k+1)/2)+(q^4-q^3*x-q*x^2+x^2)/(q^4*x)>;
```

$$S := \begin{bmatrix} -\dfrac{q^3 - x}{q^2} & \dfrac{q}{x} \\ \dfrac{q^6 - q^3x^2 - x^2}{q\,x^2} & \dfrac{q^3 - x^2 - x}{x} \end{bmatrix} \cdot y(q\,x) +$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{x}{q} & -1 \\ -\dfrac{q^5 - q^2x - x}{x} & -\dfrac{q^3 - x}{q} \end{bmatrix} \cdot y(x) = \begin{bmatrix} -\dfrac{x}{q^4} \\ q^{\frac{k(k+1)}{2}} + \dfrac{q^4 - q^3x - x^2q + x^2}{q^4x} \end{bmatrix}$$

получаем частное решение с помощью процедуры HypergeometricSolution пакета LqRS:

```
>y(x) = LqRS:-HypergeometricSolution(S, y(x), k,
                                     'output' = 'partsol'):
```

$$y(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{q^k}{q^6} \\ -\dfrac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}q}{q^{2k}} \end{bmatrix}$$

Литература. [1] S. Abramov. A direct algorithm to compute rational solutions of first order linear q-difference systems. Discret. Math., 246 (2002), 3–12. [2] S. Abramov, M. Barkatou. Rational solutions of first order linear difference systems. ISSAC'98 Proceedings (1998), 124–131. [3] S. Abramov, M. Petkovšek, P. Paule. q-Hypergeometric solutions of q-difference equations. Discret. Math., 180 (1998), 3–32. [4] S. Abramov, M. Petkovšek, A. Ryabenko. Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems of arbitrary order. Comput. Math. and Math. Phys., 56 (2016), 894–910. [5] С. А. Абрамов, А. А. Рябенко, Д. Е. Хмельнов. Лорановы, рациональные и гипергеометрические решения линейных q-разностных систем произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами. Программирование, 2 (2018), 60–73. [6] С. А. Абрамов, Д. Е. Хмельнов. Знаменатели рациональных решений линейных разностных систем произвольного порядка. Программирование, 2 (2012), 43–54. [7] M. Petkovšek. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients. J. of Symbolic Computation, 14 (1992), 243–264. [8] http://www.ccas.ru/ca/lrs [9] http://www.ccas.ru/ca/lqrs

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН *e-mail: anna.ryabenko@gmail.com*

А. В. Селиверстов (Москва)

Распознавание вещественных кубических гиперповерхностей без прямой из особых точек

Пусть проективная кубическая гиперповерхность $\mathcal{F}$ определена над полем вещественных чисел. Гладкая точка $P \in \mathcal{F}$ называется эллиптической, если она служит изолированной вещественной точкой пересечения $\mathcal{F}$ с касательной гиперплоскостью $\mathcal{T}_P$ в этой точке, и соответствующая квадратичная форма положительно определена; это свойство эффективно проверяется.

Теорема 1. Достаточным условием отсутствия вещественной прямой L, состоящей из особых точек гиперповерхности $\mathcal{F}$, служит существование эллиптической точки $P \in \mathcal{F}$.

Доказательство от противного. Предположим, что существует вещественная прямая L, состоящая из особых точек гиперповерхности $\mathcal{F}$. Тогда гиперплоское сечение $\mathcal{T}_P \cap \mathcal{F}$ содержит две вещественные особые точки P и $Q \in \mathcal{T}_P \cap L$. Следовательно, сечение содержит вещественную прямую PQ. Но это противоречит изолированности точки P. Теорема доказана.

Пример 1. Если кубическая гиперповерхность имеет две вещественные компоненты связности, то одна из них ориентируемая и ограничивает выпуклую область. Следовательно, ориентируемая компонента содержит эллиптическую точку. Кроме того, свойство содержать эллиптическую точку устойчиво относительно малых деформаций. Многие кубические поверхности содержат эллиптическую точку. Но достаточное условие в теореме 1 не является необходимым. Конус не содержит эллиптической точки. Также существуют особые кубические гиперповерхности, отличные от конуса, у которых гессиан тождественно равен нулю [1]. Диагональная поверхность Клебша гладкая, но она не содержит эллиптической точки. Зонтик Уитни, заданный формой $x_1^2x_3 - x_2^2x_0$, служит примером линейчатой поверхности, содержащей прямую из особых точек. Эта прямая задана уравнениями $x_1 = x_2 = 0$. Зонтик Уитни не содержит эллиптической точки.

Рассмотрим кубическую гиперповерхность $\mathcal{F} \subset \mathbb{RP}^n$ и гиперплоскость $\mathcal{H} \subset \mathbb{RP}^n$, заданные формами $f(x_0, \dots, x_n)$ и $h(x_0, \dots, x_n)$, соответственно. Пусть кубическая гиперповерхность $\mathcal{F}_\mathcal{H} \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ задана формой $h^2x_{n+1} + f$. Эта гиперповерхность $\mathcal{F}_\mathcal{H}$ имеет особую точку с однородными координатами $(0 : \dots : 0 : 1)$.

Теорема 2. Если гиперповерхность $\mathcal{F}$ содержит особую точку $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ с однородными координатами $(p_0 : \dots : p_n)$, то существует прямая из особых точек на гиперповерхности $\mathcal{F}_\mathcal{H}$; эта прямая проходит через точку P. Точки этой прямой имеют координаты $(p_0 : \dots : p_n : x_{n+1})$, где x_{n+1} принимает произвольное значение. Обратно, если особая точка $\check{P} \in \mathcal{F}_\mathcal{H}$ с однородными координатами $(p_0 : \dots : p_{n+1})$ отлична от точки $(0 : \dots : 0 : 1)$, то её проекция $P \in \mathcal{F}$ с однородными координатами $(p_0 : \dots : p_n)$ тоже особая.

Пример 2. Пусть гиперплоскость $\mathcal{H}$ задана формой x_n. Тогда аффинная часть $\mathcal{F}_\mathcal{H}$ служит графиком многочлена $-f(x_0, \dots, x_{n-1}, 1)$. Если этот многочлен достигает локального минимума в точке $P \notin \mathcal{H}$ и матрица вторых производных этого многочлена положительно определена в точке P, то соответствующая точка $\check{P} \in \mathcal{F}_\mathcal{H}$ эллиптическая.

Пусть кубическая гиперповерхность $\mathcal{F}$ содержит две вещественные компоненты связности, причём ориентируемая компонента не пересекает гиперплоскость $\mathcal{H}$. Внутри области, ограниченной ориентируемой компонентой, некоторый многочлен, определяющий аффинную часть гиперповерхности, достигает минимума. (Этот многочлен определён с точностью до ненулевого множителя.) Тогда гиперповерхность $\mathcal{F}_\mathcal{H}$ содержит эллиптическую точку.

Напомним задачу разбиения множества. Дано мультимножество положительных целых чисел $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. Можно ли его разбить на два подмножества с равными суммами элементов? Точки с координатами ± 1 называются $(-1, 1)$-точками. Обозначим формы $g = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1^3 + \dots + \alpha_n x_n^3$ и $\ell = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Обозначим через $\mathcal{G}$ и $\mathcal{L}$ проективные гиперповерхность и гиперплоскость, заданные формами g и ℓ, соответственно. Тогда задача состоит в распознавании принадлежности хотя бы одной $(-1, 1)$-точки гиперплоскости $\mathcal{L}$. Эта задача NP-полна.

Теорема 3. [2, 3] Дано мультимножество положительных целых чисел $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. Существует взаимно однозначное соответствие между особыми точками сечения $\mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ и $(-1, 1)$-точками, принадлежащими гиперплоскости $\mathcal{L}$.

В случае, когда особыми могут быть только $(-1, 1)$-точки, достаточно проверить, содержит ли особую точку одна из двух гиперповерхностей, например, заданных формами $x_0 \pm x_1$. Поэтому следствием теорем 2 и 3 служит такой результат.

Теорема 4. Задача разбиения множества сводится за полиномиальное время к задаче распознавания существования прямой из особых точек на вещественной кубической гиперповерхности.

Иными словами, рассматриваемая задача является NP-трудной, хотя в некоторых случаях отсутствие прямой, состоящей из особых точек, легко проверяется в силу теоремы 1.

Литература. [1] R. Gondim, F. Russo, On cubic hypersurfaces with vanishing hessian, J. Pure App. Algebra, 219:4 (2015), 779–806. [2] И. В. Латкин, А. В. Селиверстов, Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел, Вестник Карагандинского университета. Математика, 1 (77) (2015), 47–55. [3] A. V. Seliverstov, On cubic hypersurfaces with involutions. International Conference Polynomial Computer Algebra '2016, Санкт-Петербург: Издательство ВВМ, 2016, с. 74–77. https://elibrary.ru/item.asp?id=26437524

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук

e-mail: slvstv@iitp.ru

А. И. Созутов (Красноярск)

О группах с конечным энгелевым элементом

Элемент a произвольной группы G называется *энгелевым* [[1], стр. 541], если для любого элемента $b \in G$ существует такое зависящее от него натуральное число $n = n(b)$, что выполняется равенство $[...[[b, a], a]..., a] = [b, {}_n a] = 1$. Группы с энгелевыми элементами изучались многими авторами [[1], стр. 540-544]. Элемент a называется *конечным* в группе G, если в G конечны все подгруппы вида $\langle a, a^b \rangle$. Как доказано в [2], существуют двупорожденные бесконечные финитно-аппроксимируемые p-группы, состоящие из конечных энгелевых элементов. В [3] построены примеры двупорожденных бесконечных простых непримарных групп ограниченного четного периода, в которых каждая диэдральная подгруппа является 2-группой, т.е. каждая инволюция является конечным ограниченным энгелевым элементом. Согласно теореме Бэра [[4], стр. 17-18] энгелев элемент конечной группы G содержится в ее подгруппе Фиттинга $F(G)$, что также следует из результата, более известного в теории конечных групп как теорема Бэра-Сузуки:

Пусть D — класс сопряженности конечной группы G, состоящий из p-элементов. Если $\langle x, y \rangle$ является p-группой для всех $x, y \in D$, то
$D \subseteq O_p(G)$, [5][теорема 226].

Пусть G — группа с инвариантным множеством D (состоящим из p-элементов) и любые два элемента из D порождают в G конечную p-подгруппу. Следуя Фишеру, любую подгруппу $H = \langle D \cap H \rangle$ из G называем D-*подгруппой.* Пусть $\mathfrak{D}_p$ — множество всех D-подгрупп из G, являющихся конечными p-группами. Очевидно, что множество $\mathfrak{D}_p$ частично упорядочено по включению и содержит все подгруппы $\langle a, b \rangle$, где $a, b \in D$.

Теорема 1. Либо в $\mathfrak{D}_p$ есть единственный максимальный элемент $\langle D \rangle$ (и $D \subseteq O_p(G)$), либо в $\mathfrak{D}_p$ нет максимальных элементов и каждая D-подгруппа $P \in \mathfrak{D}_p$ является членом бесконечной возрастающей субнормальной цепи $P = P_1 \lhd P_2 \lhd \ldots$ D-подгрупп $P_i \in \mathfrak{D}_p$, обьединение T членов которой является бесконечной локально конечной p-подгруппой.

Теорема 2. Если в группе G есть конечный энгелев элемент a с артиновым централизатором $C_G(a)$, то $\langle a^G \rangle$ — черниковская π-группа ($\pi = \pi(|a|)$) и G — артинова группа.

Группа G и подгруппа $C_G(a)$ в теореме 2 не обязаны быть локально конечными [[6], гл. 9]. Отметим, что следствиями теоремы 2 являются теоремы из [7] и теорема 2.3 из [8].

Работа была поддержана РФФИ (грант 15-01-04897-а).

Литература. [1] А. Г. Курош. Теория групп. М.: Наука, 1967, 648 с. [2] А. И. Созутов. О ниль-радикалах в группах // Алгебра и логика, Т. 30 (1991), №1.– С. 102-105. [3] В. Д. Мазуров, А. Ю. Ольшанский, А. И. Созутов. О бесконечных группах конечного периода // Алгебра и логика.– Т. 54 (2015), №2.– С. 243-251. [4] Т. М. Гаген. Некоторые вопросы теории конечных групп // Сб. Математика. Новое в зарубежной науке, **16**. К теории конечных групп.– Изд. М: "Мир".– 1979, С. 13-97. [5] Д. Горенстейн. Конечные простые группы.– М.: Мир, 1985, 352 с. [6] А. Ю. Ольшанский. Геометрия определяющих соотношений в группах.– М.: Наука, 1989, 448 с. [7] В. П. Шунков. Об одном классе p-групп// Алгебра и логика.– 1970.– Т. 9, №4.– С. 484-496. [8] В. П. Шунков. Мр-группы.– М.: Наука, 1990.

Сибирский федеральный университет

Институт математики и фундаментальной информатики

e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Е. В. Соколов (Иваново)

Об аппроксимируемости разрешимыми и нильпотентными группами некоторых обобщенных свободных произведений

Пусть π — непустое множество простых чисел. Абелеву группу будем называть *π-ограниченной*, если в произвольной ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества π, конечны. Нильпотентную группу назовем *π-ограниченной*, если она обладает конечным центральным рядом с абелевыми π-ограниченными факторами. Легко видеть, что π-ограниченными при любом выборе множества π являются, например, все конечно порожденные нильпотентные группы.

Интерес к нильпотентным группам, удовлетворяющим условию π-ограниченности, объясняется тем фактом, что для них удается получить простое описание подгрупп, отделимых классом конечных π-групп. Напомним, что подгруппа Y группы X называется *отделимой классом конечных π-групп*, если для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ существует гомоморфизм σ группы X на конечную π-группу такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Напомним также, что подгруппа Y группы X называется *π'-изолированной* в этой группе, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \pi$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Нетрудно показать, что если подгруппа Y отделима в группе X классом конечных π-групп, то она π'-изолирована в X. Для π-ограниченных нильпотентных групп верно и обратное: любая π'-изолированная подгруппа такой группы отделима классом конечных π-групп, а, значит, и классом конечных нильпотентных π-групп [1]. Это обстоятельство оказывается весьма полезным при изучении аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений π-ограниченных нильпотентных групп, позволяя строить пары совместимых подгрупп свободных множителей. Напомним, о чем идет речь.

Пусть $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi\colon H \to B$. Если N — ядро некоторого гомоморфизма группы G на конечную π-группу, $R = N \cap A$ и $S = N \cap B$, то R и S — нормальные подгруппы конечного π-индекса групп A и B соответственно и $(R \cap H)\varphi = S \cap B$ (подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$, удовлетворяющие последнему равенству, называют *(H, K, φ)-совместимыми*). Обратное в общем случае неверно: не каждая пара нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного π-индекса групп A и B служит пересечением с ними ядра некоторого гомоморфизма группы G на конечную π-группу. Тем не менее, при определенных условиях, накладываемых на свободные множители A и B, объединенные подгруппы H и K, изоморфизм φ и (или) множество π, это так и потому доказательство аппроксимируемости группы G в значительной степени сводится к задаче построения по нормальной подгруппе конечного π-индекса группы A совместимой с ней нормальной подгруппы конечного π-индекса группы B и наоборот. Именно здесь и оказывается полезной равносильность π'-изолированности и отделимости классом конечных π-групп.

Ниже приводятся две теоремы, полученные с использованием результатов работ [1–3] и обобщающие ряд утверждений из [4–8].

Теорема 1. Пусть $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$, π — непустое множество простых чисел, A и B — π-ограниченные нильпотентные группы, $H \neq A$ и $K \neq B$. Пусть также подгруппы H и K являются локально циклическими или хотя бы одна из них лежит в центре соответствующего свободного множителя. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Группа G аппроксимируется конечными π-группами.

2. Для любого простого числа $p \in \pi$ группа G аппроксимируется конечными полинильпотентными π-группами, каждая из которых представляет собой расширение конечной p-группы при помощи конечной нильпотентной π-группы.

3. Подгруппы 1 и H π'-изолированы в группе A, подгруппы 1 и K π'-изолированы в группе B.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Группа G аппроксимируется конечными нильпотентными π-группами тогда и только тогда, когда периодические части групп A и B являются π-группами и существует простое число $p \in \pi$ такое, что подгруппа H $\{p\}'$-изолирована в группе A, подгруппа K $\{p\}'$-изолирована в группе B.

Отметим далее, что согласно [9] в группе, аппроксимируемой π-ограниченными нильпотентными группами без кручения, всякая π'-изолированная подгруппа, имеющая конечный ранг Гирша–Зайцева, отделима классом конечных нильпотентных π-групп. Поэтому естественным образом возникает вопрос, что будет, если в формулировках теорем 1 и 2 заменить условие π-ограниченной нильпотентности групп A и B требованием аппроксимируемости последних π-ограниченными нильпотентными группами без кручения. Из основного результата работы [10] следует, что в общем случае утверждения, получающиеся посредством такой замены, оказываются неверны. Тем не менее, при некоторых дополнительных условиях соответствующие аналоги теорем 1 и 2 имеют место. Они дополняют и частично обобщают некоторые результаты статей [4, 11].

Литература. [1] Е. В. Соколов, Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп. Сиб. матем. журн., 55(6) (2014), 1381–1390. [2] А. Е. Куваев, Е. В. Соколов, Необходимые условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп. Изв. вузов. Математика, 9 (2017), 36–47. [3] Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова, К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп. Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика, 2 (1999), 5–7. [4] Д. Н. Азаров, О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением. Матем. заметки, 64(1) (1998), 3–8. [5] G. Kim, C. Y. Tang, On generalized free products of residually finite p-groups. J. Algebra, 201 (1998), 317–327. [6] Е. А. Иванова, Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух абелевых групп. Чебышевский сб., 3(1) (2002), 72–77. [7] G. Kim, Y. Lee, J. McCarron, Residual p-finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups. Kyungpook Math. J., 48 (2008), 495–502. [8] D. Kahrobaei, On the residual solvability of generalized free products of finitely generated nilpotent groups. Comm. Algebra, 39(2) (2011), 647–656. [9] Е. В. Соколов, Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп. Сиб. матем. журн., 58(1) (2017), 219–229. [10] G. Baumslag, On the residual nilpotence of certain one-relator groups. Comm. Pure Appl. Math., 21(5) (1968), 491–506. [11] D. N. Azarov, Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation. Comm. Algebra, 43 (2015), 1464–1471.

Ивановский государственный университет

e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

А. Г. Сокольский (Белгород)

О первичном радикале полугрупповых алгебр

Все определения, используемых ниже понятий, можно найти, например, в [1] и [2].Для групповых алгебр над полем простой характеристики получено исчерпывающее описание первичного радикала (см.[3]). В работе [1] этот результат сформулирован на языке радикалов полугрупп, примененных к группе. С помощью нормальной p-подруппы $O_p(\Delta G)$ строится нижний радикал Θ_p группы G и описание первичного радикала групповой алгебры $F[G]$ свелось к выражению

$$B(F[G]/I(G,\Theta_p,F) \cong N(F[G/\Theta_p]),$$

где N - нильпотентный радикал, причем описание правой части известно. В случае полугрупповых алгебр хорошо известно, что

$$B(F[S]/I(S,\rho,F) \cong B(F[S/\rho])$$

для любой конгруэнции ρ на полугруппе S. Возникает естественный вопрос: для какой конгруэнции ρ будет выполняться условие

$$B(F[S]) \cong I(S,\rho,F)$$

Для В-эквирадикальных и сократимых полугрупп это удалось узнать.

Теорема 1. Если полугрупповая алгебра $F[S]$ является $B-$эквирадикальной, то следующие условия эквивалентны

(1) $B(F[S]) = I(\rho,S,F)$, для некоторой конгруэнции ρ;

(2)$B(F[S]) = I(\sim_{B(F[S])}|_S, S, F)$;

(3) $B(F[S]) = I(\beta,S,F)$.

Теорема 2. Пусть S – сократимая полугруппа, F – поле простой характеристики p. Тогда

(а) $\mathcal{B}(F[S]) \subseteq I(\Omega_p,S,F)$;

(б) $\mathcal{B}(F[S]) = I(\sigma,S,F)$, для некоторой конгруэнции σ, возможно лишь в случае когда $\sigma = \Omega_p$.

Здесь Ω_p – нижний радикал полугрупп, порожденный отношением $\omega_p : \forall a,b \in S, (a,b) \in \omega(\text{см.}[2]), ab = ba, a^{p^m} = b^{p^m}$, для некоторого натурального m.

Следующая теорема дает некоторую информацию об элементах первичного радикала полугрупповой алгебры.

Теорема 3. Пусть S – произвольная полугруппа, F – поле, $F[S]$ – полугрупповая алгебра. Тогда справедливы следующие утверждения

(а) если $charF = 0$, то $I(\beta,S,F) \subseteq \mathcal{B}(F[S]) \subseteq I(C,S,F)$;

(б) если $charF = p$, то $I(\mathcal{L}_p,S,F) \subseteq \mathcal{B}(F[S]) \subseteq I(\mathcal{A}_p,S,F)$;

Литература. [1] А. Г. Сокольский. Радикалы полугрупп и полугрупповых алгебр. Математический сборник, том 201, 5, 2010, С. 135-160.[2] J. Okninski. Prime and semiprime semigroup algebras of cancellateve semigroups. Glasgow Math. J., 35 (1993) P. 1-12. [3] З. З. Дымент, А. Е. Залесский. О нижнем радикале группового кольца. Докл. АН БССР. 19(1975), С.876-879.

Белгородский национальный
исследовательский университет

e-mail: sokolsky@bsu.edu.ru

И. О. Соловьев

Элементарная эквивалентность стабильных линейных групп над полями характеристики 2

Первый результат в области классификации линейных групп с точностью до элементарной эквивалентности был получен А.И. Мальцевым 1961 в (1)г. Им была доказана следующая

Теорема (Мальцев) Группа $\mathcal{G}_m(K_1)$ элементарно эквивалентна группе $\mathcal{G}_n(K_2)$ ($\mathcal{G} = \mathrm{GL}_n$, PGL_n, SL_n, PSL_n, $m, n \geqslant 3$, K_1, K_2 — бесконечные поля) тогда и только тогда, когда $m = n$ и $K_1 \equiv K_2$.

Дальнейшие подобные результаты были получены в 1992 году, когда К.И. Бейдар и А.В. Михалев нашли в (2)общий подход к проблемам элементарной эквивалентности ряда алгебраических структур, использую некоторые результаты теории линейных групп над кольцами.

В статье (3)было доказано, что стабильные линейные группы над кольцами с единицей элементарно эквивалентны при условии элементарной эквивалентности исходных колец. В этой же статье был доказан критерий элементарной эквивалентности стабильных линейных групп над кольцами для случая локальных колец с обратимой двойкой.

В данном докладе будет изложено доказательство аналогичного критерия, для случая полей характеристики 2:

Теорема Пусть K_1 и K_2 — поля характеристики 2. Тогда стабильные линейные группы $\mathrm{GL}(K_1)$ и $\mathrm{GL}(K_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда поля K_1 и K_2 также элементарно эквивалентны.

Литература. [1]Мальцев А.И. *Об элементарных свойствах линейных групп.* Проблемы математики и механики. Новосибирск. — 1961. — 110–132. [2]Beidar C.I., Mikhalev A.V. *On Mal'cev's theorem on elementary equivalence of linear groups.* Contemporary mathematics. — 1992. — 131(1). — 29–35.[3]Бунина Е. И., Михалёв А. В., Соловьёв И. О. *Элементарная эквивалентность стабильных линейных групп над локальными коммутативными кольцами с 1/2.* Фундаментальная и прикладная математика. — 2016. — 21(1). — С. 65–78.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: hayer44@yandex.ru

М. М. Сорокина (Брянск)

О $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгруппах и $\mathfrak{F}^\omega$-проекторах конечных групп

Рассматриваются только конечные группы. Пусть ω и π – непустые множества простых чисел, $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп, $\pi(\mathfrak{F})$ – совокупность всех простых делителей порядков всех групп из $\mathfrak{F}$, $\chi(\mathfrak{F})$ – характеристика класса $\mathfrak{F}$, т.е. множество всех простых чисел p, для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p-группа. Через $O_\omega(G)$ обозначается наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G, $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал группы G. Другие используемые обозначения и определения можно найти в [1, 2].

В работе [3] были введены в рассмотрение понятия $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппы и $\mathfrak{F}^\omega$-проектора группы. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω-подгруппа в U, $U/V \in \mathfrak{F}$, следует, что $U = HV$. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G, если HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G/N для любой нормальной ω-подгруппы N группы G. В [3] установлено, что если класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов, то всякая $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы является ее $\mathfrak{F}^\omega$-проектором. Формация $\mathfrak{F} = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω-локальной формацией, где $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ – функция, называемая ω-спутником формации $\mathfrak{F}$. Для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ получены свойства $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп и $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов в конечных группах.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – ω-группа, $1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G$ – нормальный ряд группы G, все факторы которого нильпотентны. Если H – такая подгруппа группы G, что HG_i/G_i – максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G/G_i для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, то H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – π-разрешимая группа с $\mathfrak{F}$-корадикалом, являющимся ω-группой. Если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то всякая $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа π-холловой подгруппы группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – нильпотентная ω-группа, $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G тогда и только тогда, когда H – π-холлова подгруппа группы G.

Теоремы 1 – 3 обобщают известные результаты о $\mathfrak{F}$-покрывающих подгруппах и $\mathfrak{F}$-проекторах конечных групп для локальной формации $\mathfrak{F}$ (см. теоремы 15.8, 15.11 [1], следствие 2 теоремы 5.23 [2]).

Литература. [1] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. [2] В. С. Монахов. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. [3] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп. Сиб. матем. ж., 57 (2016), N 6, 1224–1239.

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

e-mail: mmsorokina@yandex.ru

И. Л. Сохор (Брест)

О группах с формационно субнормальными или самонормализуемыми примарными циклическими подгруппами

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология и обозначения соответствуют [1], [2].

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-абнормальной, если $L/K_L \notin \mathfrak{F}$ для всех подгрупп K и L таких, что $H \leq K <\cdot\, L \leq G$. Здесь запись $K <\cdot\, L$ означает, что K — максимальная подгруппа группы L, а K_L — ядро подгруппы K в группе L. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует такая цепочка подгрупп

$$H = H_0 <\cdot\, H_1 <\cdot\, \ldots <\cdot\, H_n = G,$$

что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i. В любой группе G каждая собственная подгруппа не может быть одновременно $\mathfrak{F}$-субнормальной и $\mathfrak{F}$-абнормальной.

Напомним, формация $\mathfrak{F}$ называется сверхрадикальной, если она нормально наследственная и любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$. Известно, что формация с условием Шеметкова [3, 6.4.6] и решеточная формация [4, лемма 4] являются сверхрадикальными.

Группы с нетривиальными $\mathfrak{F}$-субнормальными или $\mathfrak{F}$-абнормальными подгруппами исследовались в работах многих авторов, см. литературу в [5].

Для формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы, каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа самонормализуема. В симметрической группе S_4 степени 4 силовская 2-подгруппа одновременно $\mathfrak{U}$-

субнормальна и самонормализуема. Здесь $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Поэтому $\mathfrak{F}$-субнормальность и самонормализуемость не являются взаимоисключающими понятиями, что затрудняет исследования групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными или самонормализуемыми системами подгрупп.

В. С. Монахов [6] описал группы, все примарные подгруппы которых $\mathfrak{U}$-субнормальны или самонормализуемы.

Развивая данную тематику, мы получили описание групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными или санормализуемыми примарными циклическими подгруппами для случая, когда $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация. Доказана

Теорема. Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная сверхрадикальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то для разрешимой группы $G \notin \mathfrak{F}$ следующие утверждения эквивалентны:

(1) каждая примарная циклическая подгруппа в группе G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна;

(2) каждая собственная подгруппа в группе G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна;

(3) $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ — самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathfrak{F}$.

Здесь G' — коммутант группы G; $A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Литература. [1] В. С. Монахов. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. [2] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. [3] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006. [4] А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, В. Н. Семенчук. О решетках подгрупп конечных групп. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Институт математики АН Украины, 1993, 27–54. [5] В. С. Монахов, И. Л. Сохор. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами. Сиб. матем. журн., 58 (2017), 851–863. [6] В. С. Монахов. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами. Сиб. матем. журн. 57 (2016), 447–462.

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

e-mail: irina.sokhor@gmail.com

А. Х. Табаров, **А. А. Давлатбеков** (Таджикистан)

Об изоморфизмах и автоморфизмах линейных слева (справа) квазигрупп

В докладе найден общий вид автотопии (автоморфизма) произвольной линейной слева (справа) квазигруппы, приведены необходимые и достаточные условия изоморфизма двух линейных слева (справа) квазигрупп, обобщающие некоторые утверждения из [1].

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется линейной над группой $(Q,+)$, если она имеет вид $xy=\varphi x+c+\psi y$, где $\varphi,\psi\in Aut(Q,+)$, c - фиксированный элемент множества Q [2].

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется линейной слева (справа) над группой $(Q,+)$, если она имеет вид $xy=\varphi x+c+\beta y$,$(xy=\alpha x+c+\psi y)$, где $(\varphi),\psi\in Aut(Q,+)$, $\beta(\alpha)$ - подстановка множества Q [1]. Упорядоченная тройка $T=(\alpha,\beta,\gamma)$ постановок множества Q называется автотопией квазигруппы $(Q,\cdot)$, если $\gamma(x\cdot y)=\alpha x\cdot\beta y$ для любых $x,y\in Q$. В случае, если $\alpha=\beta=\gamma$, то $T=(\gamma,\gamma,\gamma)$ является автоморфизмом квазигруппы $(Q,\cdot)$.

Все необходимые понятия и определения можно найти в [3].

Теорема 1. Любая автотопия линейной слева (справа) квазигруппы $(Q,\cdot)$ $xy=\varphi x+c+\beta y$, $(xy=\alpha x+c+\psi y)$, имеет вид:

$$P=(\tilde{R}_c\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1}\tilde{R}_{-c},\beta\tilde{R}_b\theta\beta^{-1},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta),$$

$$(P=(\tilde{R}_c\tilde{L}_{\varphi a}\alpha\theta\alpha^{-1}\tilde{R}_{-c},\psi\tilde{R}_b\theta\psi^{-1},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta)),$$

где $\varphi,\psi,\theta\in Aut(Q,+)$, $\tilde{R}_a x=x+a,\tilde{L}_a x=a+x$, α,β - подстановки множества Q, a,b,c - фиксированные элементы из Q.

Следствие. *Любой автоморфизм γ линейной слева (справа) квазигруппы вида $xy=\varphi x+c+\beta y$, $(xy=\alpha x+c+\psi y)$, можно представить в виде:*

$$\gamma=\tilde{R}_c\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1}\tilde{R}_{-c}=\beta\tilde{R}_b\theta\beta^{-1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta,$$

$$(\gamma=\tilde{R}_c\tilde{L}_{\varphi a}\alpha\theta\alpha^{-1}\tilde{R}_{-c}=\psi\tilde{R}_b\theta\psi^{-1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

Теорема 2. Пусть $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$- линейная слева над группой $(Q,+)$ квазигруппы : $xy=\varphi_1x+c_1+\beta_1y$, $x\circ y=\varphi_2x+c_2+\beta_2y$, и $\gamma\in Aut(Q,+)$. Тогда автоморфизм γ группы $(Q,+)$ является изоморфизмом квазигрупп $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$ тогда и только тогда, когда $\gamma\varphi_1\gamma^{-1}=\varphi_2$, $\gamma\beta_1\gamma^{-1}=\beta_2$, $\gamma(c_1)=c_2$.

Симметричное утверждения верно и для случая линейных справа квазигрупп.

Литература. [1] А. Х. Табаров. Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп. Дискрет. матем, 2007. том 19, выпуск 2, С. 67–73. [2] В. Д. Белоусов. Уравновешенные тождества в квазигруппах. - Мат. Сборник. 1966, 70(112):1, С.55-97. [3] В. Д. Белоусов. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.

Кулябский государственный университет им. А.Рудаки

Д. Т. Тапкин

Автоморфизмы колец формальных матриц

В теории алгебр инцидентности хорошо известен результат (см. [4]) о разложимости автоморфизмов алгебр инцидентности над полем в композицию внутреннего, перестановочного и мультипликативного автоморфизмов. Похожий результат имеет место и для двух частных случаев колец формальных матриц порядка 2: верхнетреугольном (см. [1]) и с нулевыми идеалами следа (см. [3]). Для колец формальных матриц порядка n было получено итеративное описание изоморфизмов между ними (см. [2]).

Кольцо K называется полуцентральным приведенным, если для каждого идемпотента $e \in K$ из того что $eK(1-e)=0$ следует, что e либо 0, либо 1. Будем обозначать кольца верхнетреугольных формальных матриц вида $\begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ 0 & R_2 & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_n \end{pmatrix}$ за $T_n(\{R_i\},\{M_{ij}\})$.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $A_1 = T_n(\{R_i\};\{M_{ij}\})$, $A_2 = T_n(\{R'_i\};\{M'_{ij}\})$ и кольца $R_1,...,R_n$ являются полуцентральными приведенными. Пусть также $\Phi : A_1 \to A_2$ – изоморфизм. Тогда найдутся перестановка $\tau \in S_n$ и матрица $U \in U(A_2)$, такие что $\Phi\left([a_{ij}]\right) = U\left[\chi_{ij}(a_{\tau(i)\tau(j)})\right]U^{-1}$, где
1) $\chi_{ii} : R_{\tau(i)} \to R'_i$ – изоморфизм колец, $1 \leq i \leq n$;
2) $\chi_{ij} : M_{\tau(i)\tau(j)} \to M'_{ij}$ – $R_{\tau(i)}$-$R_{\tau(j)}$-бимодульный изоморфизм относительно χ_{ii} и χ_{jj}, $1 \leq i < j \leq n$;
3) для всех $1 \leq i,k,j \leq n$, $a \in M_{\tau(i)\tau(k)}$, $b \in M_{\tau(k)\tau(j)}$,

$$\chi_{ij}\left(a \circ b\right) = \chi_{ik}(a) \circ \chi_{kj}(b).$$

Обратно, если выполняются условия 1–3, то отображение $\Phi\left([a_{ij}]\right) = U\left[\chi_{ij}(a_{\tau(i)\tau(j)})\right]U^{-1}$ будет изоморфизмом колец.

Аналогичный результат выполняется и для колец формальных матриц порядка n с нулевыми идеалами следа над кольцом без нетривиальных идемпотентов.

Пусть R – коммутативное кольцо. Через $Q(R)$ будем обозначать полное кольцо частных $S^{-1}R$, где S – множество неделителей нуля кольца R.

Теорема 2. Пусть R – коммутативное кольцо без нетривиальных идемпотентов, $n \in \mathbb{N}$ и $\{I_{ij}\}_{1 \le i < j \le n}$ – набор идеалов кольца R, каждый из которых содержит хотя бы один элемент неделитель нуля, при этом потребуем, чтобы выполнялось $I_{ij}I_{jk} \subseteq I_{ik}$ для каждой тройки $i < j < k$. Пусть также $A = T_n(R; \{I_{ij}\}) \subseteq T_n(Q(R))$ – кольцо формальных матриц с естественными операциями матричного сложения и умножения. Тогда все R-автоморфизмы кольца A представимы в виде композиции $C_U \circ C_V$, где $U \in U(A)$, $V = \mathrm{diag}(h_1, ..., h_n) \in U(T_n(Q(R)))$, $C_V(A) = A$.

Как видно из теоремы 2, R-автоморфизмы кольца $T_n(R; \{I_{ij}\})$ являются "почти" внутренними. Однако, это все на что можно рассчитывать в общем случае.

Пример 3. Пусть $S = \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ – кольцо целочисленных Лорановских многочленов, и пусть $I = 2\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ – идеал в S. Тогда $R = \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ – подкольцо в S, состоящее из всех Лорановских многочленов, у которых коэффициенты при всех ненулевых степенях x четные. Кольцо R коммутативно и не содержит нетривиальных идемпотентов. Нетрудно видеть, что отображение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & xb \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

будет R-автоморфизмом кольца $A = \begin{pmatrix} R & I \\ 0 & R \end{pmatrix}$, который не является внутренним.

Теорема 4. Пусть в условии теоремы 2 целое замыкание кольца R в $Q(R)$ совпадает с R и идеалы I_{ij} конечно порождены. Тогда все R-автоморфизмы кольца A внутренние.

Хорошо известными примерами целозамкнутых колец являются дедекиндовы и факториальные кольца. В силу нетеровости дедекиндовых колец все их идеалы конечно порождены.

Следствие 5. Пусть R – дедекиндово кольцо, $n \in \mathbb{N}$ и $\{I_{ij} \mid 1 \le i < j \le n\}$ – набор ненулевых идеалов кольца R, таких что $I_{ij}I_{jk} \subseteq I_{ik}$ для каждой тройки $i < j < k$. Пусть также $A = T_n(R; \{I_{ij}\}) \subseteq T_n(Q(R))$ – кольцо формальных матриц с естественными операциями матричного сложения и умножения. Тогда все R-автоморфизмы кольца A являются внутренними.

Предложение 6. Пусть R – факториальное кольцо, $n \in \mathbb{N}$ и $\{I_{ij} \,|\, 1 \le i < j \le n\}$ – набор ненулевых идеалов кольца R, таких что $I_{ij}I_{jk} \subseteq I_{ik}$ для каждой тройки $i<j<k$. Пусть также $A = T_n(R; \{I_{ij}\}) \subseteq T_n(Q(R))$ – кольцо формальных матриц с естественными операциями матричного сложения и умножения. Тогда все R-автоморфизмы кольца A являются внутренними.

Литература. [1] P. N. Anh, L. van Wyk. Automorphism group of generalized triangular matrix rings, Linear Algebra and its Appl., 434 (2011), 1018–1026. [2] P. N. Anh, L. van Wyk. Isomorphisms between strongly triangular matrix rings, Linear Algebra and its Appl., 438 (2013), 4374–4381. [3] C. Boboc, S. Dascalescu, L. van Wyk. Isomorphisms between Morita context rings, Linear and Multilinear Algebra., 60 (2012), 545–563. [4] S. P. Coelho, The automorphism group of structural matrix algebra. Linear Algebra and its Appl., 95 (1993), 35–58.

Казанский (Приволжский) Федеральный Униврерститет

e-mail: danil.tapkin@yandex.ru

К. А. Таранин (Москва)

Оценка границы идущих подряд значений перманента

Пусть $\mathbb{R}$ и M_n обозначают поле действительных чисел и кольцо $n \times n$ матриц над этим полем соответственно. Вслед за [1], через $\mathfrak{A}_n \in M_n$ обозначим множество всех (0,1)-матриц размера $n \times n$, то есть матриц порядка n, содержащих в качестве элементов только нули и единицы. Пусть S_n обозначает группу перестановок на множестве из n элементов.

Определение 1. Перманентом матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где a_{ij} — элементы матрицы A.

Несложно показать, что максимальное значение перманента как функции на $\mathfrak{A}_n$ равно $n!$, и поэтому все его значения на этом множестве суть некоторые целые числа между нулём и $n!$. Не все числа из этого промежутка, однако, являются перманентами: например, значением, ближайшим к $n!$ (и не совпадающим с ним) является $n! - (n-1)!$. Самые быстрые из известных алгоритмов вычисления перманента работают не так быстро, как хотелось бы, — за экспоненциальное время, поэтому имеет смысл попробовать выяснить, как располагаются его значения (при $A \in \mathfrak{A}_n$) на указанном промежутке при фиксированном n. Одним из первых результатов здесь является следующий факт, доказанный в [1]: всякое целое число от 0 до 2^{n-1} (включительно) является перманентом некоторой матрицы $A \in \mathfrak{A}_n$. Для удобства изложения введём следующее определение.

Определение 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Назовём число $B_n \in [0, n!]$ *верхней границей подряд идущих значений перманента* для матриц из $\mathfrak{A}_n$, если B_n — наименьшее натуральное число со свойством, что в $\mathfrak{A}_n$ нет матрицы с перманентом $B_n + 1$.

Таким образом, согласно [1], 2^{n-1} является нижней оценкой для B_n. В работе [2] эта оценка была улучшена более чем в два раза: $B_n \geq \frac{67}{64}2^n$. Доклад будет посвящён дальнейшему улучшению этой оценки.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А.Э. Гутерману за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

Литература. [1] R.A. Brualdi and M. Newman, Some theorems on permanent, J. Res. Natl. Bur. Stand., Sect. B. **69B**, No. 3 (July–September 1965), 159-163. [2] A.E. Guterman, K.A. Taranin, On the values of the permanent of (0,1)-matrices, Linear Algebra Appl. (2018) (accepted).

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: cataranin@gmail.com

Д. А. Тимашев (Москва)

Вещественные орбиты на сферических однородных пространствах

Доклад основан на результатах совместной работы с С. Кюпит-Футу (Бохум, Германия).

Как известно, все невырожденные квадратичные формы от n переменных эквивалентны друг другу над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в то время как над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ они распадаются на $n+1$ классов эквивалентности, в соответствии с индексами инерции. Этот базовый факт линейной алгебры — частный случай общего явления: для однородного алгебраического многообразия X относительно алгебраической группы G, определённой над полем $\mathbb{R}$, группа комплексных точек $G(\mathbb{C})$ действует на множестве комплексных точек $X(\mathbb{C})$ транзитивно, а группа вещественных точек $G(\mathbb{R})$ может иметь несколько (но всегда конечное число) орбит на множестве вещественных точек $X(\mathbb{R})$. Нас интересует проблема классификации этих орбит. К этой проблеме сводятся многие классификационные задачи алгебры и геометрии.

В докладе мы рассмотрим данную проблему для специального класса однородных многообразий, называемых *сферическими*. В этом случае G — связная редуктивная алгебраическая группа. Свойство сферичности означает, что борелевская подгруппа $B \subset G$ действует на X с плотной открытой орбитой. Сферические многообразия составляют важный класс однородных пространств алгебраических групп, включающий симметрические пространства, многообразия флагов и др. Будем считать, что G *расщепима* над $\mathbb{R}$ (т.е. содержит расщепимый максимальный тор). К этому случаю относится, в частности, пространство $X = GL_n/O_n$ квадратичных форм.

Наш подход к описанию орбит группы $G(\mathbb{R})$ на множестве $X(\mathbb{R})$ носит геометрический характер. Отправной точкой служит то обстоятельство, что открытая борелевская орбита $Bx_0 \subset X$ пересекает каждую $G(\mathbb{R})$-орбиту в $X(\mathbb{R})$ (поскольку последние плотны по Зарисскому в X), причём пересечение распадается на несколько $B(\mathbb{R})$-орбит, открытых в $X(\mathbb{R})$ (в классической топологии).

Открытые $B(\mathbb{R})$-орбиты в $X(\mathbb{R})$ легко описать. Пусть $T \subset B$ — расщепимый максимальный тор, $U \subset B$ — унипотентный радикал. Имеет место полупрямое разложение $B = U \rtimes T$.

Теорема 1. При подходящем выборе вещественной базисной точки x_0, её T-орбита $Z = Tx_0 \subset Bx_0$ трансверсально пересекает все U-орбиты в Bx_0. Открытые $B(\mathbb{R})$-орбиты в $X(\mathbb{R})$ содержатся в Bx_0 и находятся во взаимно-однозначном соответствии с $T(\mathbb{R})$-орбитами в $Z(\mathbb{R})$.

Последние легко описать в комбинаторных терминах, с помощью некоторых наборов знаков «$\pm$». Многообразие Z называется слайсом Бриона–Луны–Вюста [1], [2].

Остаётся понять, какие из открытых $B(\mathbb{R})$-орбит склеиваются вместе, т.е. лежат в одной и той же $G(\mathbb{R})$-орбите. С этой целью вводится действие группы Вейля $W = W(G,T)$ на множестве $B(\mathbb{R})$-орбит, согласованное с действием W на множестве B-орбит в X, определённым в работе Кнопа [3]. Эта конструкция основана на рассмотрении действий минимальных параболических подгрупп $P_\alpha \supset B$ и симплектической геометрии кокасательного расслоения T^*X.

Стабилизатор открытой орбиты Bx_0 относительно этого действия есть полупрямое произведение $W_X \leftthreetimes W_L$, где W_X — некоторая кристаллографическая линейная группа, порождённая отражениями (*малая группа Вейля* многообразия X), а W_L — параболическая подгруппа в W, действующая тривиально на множестве открытых $B(\mathbb{R})$-орбит. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. Множество орбит $X(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})$ находится в биективном соответствии с множеством орбит группы W_X на конечном множестве $Z(\mathbb{R})/T(\mathbb{R})$.

Последнее множество и действие на нём группы W_X могут быть описаны в комбинаторных терминах.

Ранее аналогичный результат был получен для симметрических пространств без предположения о расщепимости группы G [4]. Это позволяет надеяться на обобщение теоремы 2 на нерасщепимый случай.

Литература. [1] M. Brion, D. Luna, Th. Vust. Espaces homogènes sphériques. Invent. Math., 84 (1986), 617–632. [2] F. Knop. The asymptotic behavior of invariant collective motion. Invent. Math., 116 (1994), 309–328. [3] F. Knop. On the set of orbits for a Borel subgroup. Comment. Math. Helv., 70 (1995), 285–309. [4] S. Cupit-Foutou, D. A. Timashev. Orbits of real semisimple Lie groups on real loci of complex symmetric spaces. Acta Math. Sinica, Eng. Ser., 34 (2018), 439–453.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

e-mail: timashev@mech.math.msu.su

Е. И. Тимошенко[1]

Алгебраические и логические свойства частично коммутативных разрешимых групп и алгебр Ли

Будут приведены результаты, полученные докладчиком и его соавторами, в том числе Ч.К.Гупта и Е.Н.Порошенко, о строении, универсальных и элементарных теориях частично коммутативных метабелевых, нильпотентных групп и алгебр Ли.

Литература. [1] В. Я. Блощицын, Е. И. Тимошенко, “Сравнение универсальных теорий частично коммутативных метабелевых групп”, Сибирский математический журнал,58:3(2017),497–509. [2] Е. И. Тимошенко, “Централизаторные размерности и универсальные теории частично коммутативных метабелевых групп”, Алгебра и логика, 56:2 (2017), 226–255. [3] E. I. Timoshenko, “On embedding of partially commutative metabelian groups to matrix groups”, International Journal of Group Theory, 6:4 (2017), 55-64. [4] Е. И. Тимошенко, “Об одном представлении группы автоморфизмов частично коммутативной метабелевой группы”, Матем. заметки,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00100)

97:2 (2015), 286–295. [5] E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko, “Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras”, Journal of Algebra, 384 (2013), 143–168. [6] Е. И. Тимошенко, “Квазимногообразия, порожденные частично коммутативными группами”, Сибирский математический журнал, 54:4 (2013), 902–913. [7] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “Свойства и универсальные теории частично коммутативных метабелевых нильпотентных групп”, Алгебра и логика, 51:4 (2012), 429–457. [8] Е. И. Тимошенко, “Мальцевская база частично коммутативной нильпотентной, метабелевой группы”, Алгебра и логика, 50:5 (2011), 647–658. [9] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп”, Алгебра и логика, 50:1 (2011), 3–25. [10] А. А. Мищенко, Е. И. Тимошенко, “Универсальная эквивалентность частично коммутативных нильпотентных групп”, Сиб. матем. журн., 52:5 (2011), 1113–1122. [11] Е. И. Тимошенко, “Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп”, Алгебра и логика, 49:2 (2010), 263–290. [12] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность”, Алгебра и логика, 48:3 (2009), 309–341.

А. В. Тищенко (Москва)

О мощности решеток сплетений атомов полугрупповых многообразий и многообразия, порожденные малыми полугруппами[1]

Вопрос 1. Какова мощность решеток $L(\mathbf{UwV})$, где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ - атомы решетки $L(\mathbf{S})$ всех полугрупповых многообразий?

Вопрос возник в связи с результатами работы [1], в которой в большинстве случаев решетка $L(\mathbf{UwV})$ вычислена полностью, если она конечна. Исключение представляет конечная решетка $L(\mathbf{SlwN_2})$ и случаи бесконечных решеток $L(\mathbf{SlwR_1})$, $L(\mathbf{SlwSl})$, $L(\mathbf{SlwA_p})$, $L(\mathbf{A_pwA_p})$, где p - любое простое число. При этом реально остаются неясными ответы для двух случаев, а именно, для $L(\mathbf{SlwN_2})$ и $L(\mathbf{SlwSl})$.

Теорема 1. (см. [1, 2]) Решетка $L(\mathbf{SlwN_2})$ подмногообразий сплетения является конечной и содержит не менее 39 подмногообразий.

Вопрос 1а. Какова мощность решетки $L(\mathbf{SlwN_2})$?

Вопрос 1б. Какова мощность решетки $L(\mathbf{SlwSl})$?

Теорема 2. Решетки $L(\mathbf{SlwR_1}), L(\mathbf{A_pwA_p})$, где p - любое простое число, являются счетными бесконечными. Решетка $L(\mathbf{SlwA_p})$, где p - простое число, имеет мощность континуума.

---

[1]Работа была поддержана РФФИ, грант 16-01-00756

Теорема 3. ([3]) Полугруппа E_n всех экстенсивных преобразований отрезка $[1, n] = \{1, ..., n\}$ натуральных чисел наследственно конечно базируема тогда и только тогда, когда $n \leq 3$. Следовательно, решетка $L(varE_n)$ не более, чем счетна при $n \leq 3$ и имеет мощность континуум при $n \geq 4$.

Определение. Пусть $P_2^1 = D^1 = \langle a, b, 1 | a^2 = ab = a, b^2a = b^2 \rangle$ - пятиэлементный моноид.

Теорема 4. ([4]) Любая полугруппа порядка пять или менее, отличная от P_2^1, является наследственно конечно базируемой. Следовательно, в этих случаях решетка $L(varS)$ всех подмногообразий многообразия, порожденного полугруппой S, является не более, чем счетной.

Вопрос 2. ([4, 5]). Является ли многообразие $varP_2^1$ наследственно конечно базируемым? Или, эквивалентно, является ли решетка $L(varP_2^1)$ всех подмногообразий многообразия, порожденного полугруппой P_2^1, не более, чем счетной?

Оказывается вопросы 1б и 2 отчасти связаны между собой.

Предложение 1. а) $varE_3 = var(U_2 w_1 U_2) \subseteq var(U_2 w_1 U_3) = \mathbf{SlwSl}$; б) $varP_2^1 \subseteq \mathbf{SlwSl}$.

Литература. [1] А. В. Тищенко, Сплетение атомов решетки полугрупповых многообразий. Труды ММО, 2007, **68**, 107–132. [2] А. В. Тищенко, Еще раз о решетке подмногообразий сплетения многообразия полурешеток и многоообразия полугрупп с нулевым умножением // Фундам. и прикл. матем. - 2016. - Т.21, вып. 1. - С.193–210. [3] Edmond W. H. Lee. Hereditarily finitely based monoids of extensive transformations. Algebra Universalis, 2009, **61**, 31–58. [4] Edmond W. H. Lee. Finite basis problem for semigroups of order five or less: generalization and revisitation. Studia Logica, 2013, **101**, 95–115. [5] C. C. Edmunds, Edmond W. H. Lee, Ken W. K. Lee, Small semigroups generating varieties with continuum many subvarieties. Order, 2010, **27**, 83–100.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

e-mail: alextish@bk.ru

А. А. Трофимук (Гомель)

Сверхразрешимость группы с нормально вложенными подгруппами из $O_{p',p}(G)$

Рассматриваются только конечные группы.

Srinivasan [1] установил сверхразрешимость группы, в которой все максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы нормальны в группе. Wall [2] предложил называть такие группы MNPгруппами. В работах многих авторов (см. литературу в [3]) изучались группы с ограничениями на максимальные подгруппы из силовских подгрупп.

Подгруппа H группы G называется *нормально вложенной* в G, если для каждой силовской подгруппы P из H существует нормальная подгруппа K группы G такая, что P — силовская подгруппа в K, см. [4, I.7.1].

Если p-подгруппа P группы G нормально вложена в G, то P — силовская p-подгруппа в P^G. Здесь P^G — нормальное замыкание подгруппы P в группе G, т. е. наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая P. Изучению строения групп, у которых некоторые подгруппы являются холловыми подгруппами в своих нормальных замыканиях, посвящены работы [5–8].

Пример диэдральной группы порядка 12 показывает, что класс групп, у которых каждая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы нормально вложена в группу, шире чем класс MNP-групп.

В настоящей работе установлена p-сверхразрешимость группы G при условии, что каждая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы из $O_{p',p}(G)$ нормально вложена в G.

Доказана следующая

Теорема. Пусть H — нормальная подгруппа p-разрешимой группы G и фактор-группа G/H p-сверхразрешима. Если все максимальные подгруппы из силовской p-подгруппы из $O_{p',p}(H)$ нормально вложены в G, то G p-сверхразрешима.

При $G = H$ получаем

Следствие. Пусть G — p-разрешимая группа. Если каждая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы из $O_{p',p}(G)$ нормально вложена в G, то G p-сверхразрешима.

Литература. [1] S. Srinivasan, Two sufficient conditions for supersolvability of finite group, Israel J. Math., 35 (1980), 210–214. [2] G. L. Wall, Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal, Israel J. Math., 43 (1982), 166–168. [3] V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk, Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups, J. Group Theory, 17 (5) (2014), 889-895. [4] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. [5] S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou, On Hall normally embedded subgroups of finite groups, Comm. Algebra., 37 (2009), 3360–3367. [6] S. Li, J. Liu, On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups, J. Algebra, 388 (2013) 1–9. [7] A. Ballester–Bolinches, S. Qiao, On a problem posed by S. Li and J. Liu, Arch. Math., 102 (2014), 109–111. [8] V. S. Monakhov,

V. N. Kniahina, On Hall embedded subgroups of finite groups, J. Group Theory, 18 (2015), 565–568.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Беларусь

e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

В. Л. Усольцев (Волгоград)

Конгруэнц-алгебры Риса в классах унаров и алгебр с операторами

В [1] Р. Тичи обобщил понятие конгруэнции Риса, первоначально возникшее в теории полугрупп, на произвольные универсальные алгебры. Обозначим через $ConA$ решетку конгруэнций алгебры A, а через $\triangle_A$ — отношение равенства на A. Конгруэнция θ универсальной алгебры A называется конгруэнцией Риса, если найдется такая подалгебра B алгебры A, что $\theta = B^2 \cup \triangle_A$. При условии, что пустое множество считается подалгеброй любой алгебры A, совокупность всех конгруэнций Риса алгебры A образует решетку $Con_R A$ относительно включения. Естественный интерес вызывают условия, при которых решетки $ConA$ и $Con_R A$ совпадают, а также противоположная ситуация, когда решетка $Con_R A$ является двухэлементной цепью. Конгруэнц-алгеброй Риса [2] называется алгебра, в которой любая конгруэнция является конгруэнцией Риса. Неодноэлементная алгебра называется рисовски простой [2], если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной.

Унаром называется алгебра $\langle A, f\rangle$ с одной унарной операцией f. Через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; также полагаем $f^0(x) = x$. Через C_n^t, где $n > 0$, $t \geqslant 0$, обозначается унар $\langle a | f^t(a) = f^{t+n}(a)\rangle$. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots (t_i \geqslant 0)$, $t_1 < t_2 < \ldots$. Объединение непересекающихся унаров называется их суммой. Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$. Элемент a унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем. Корнем без нетривиальных узлов называется корень с неподвижным элементом a, не содержащий узловых элементов, кроме, может быть, элемента a.

Теорема 1. Унар является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда он изоморфен либо C_p^0, где p — простое число, либо

$C_p^0+C_1^0$, либо C_1^t, где $t\in N\cup\{0,\infty\}$, либо $C_1^t+C_1^0$, либо $C_1^0+C_1^0+C_1^0$.

Теорема 2. Унар является рисовски простым тогда и только тогда, когда он изоморфен либо C_1^1, либо $C_1^0+C_1^0$, либо C_n^0 для некоторого $n>1$.

Алгеброй с операторами (см., например, [3], §13) называется универсальная алгебра $\langle A,\Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, где Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из операторов — унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1.

Теорема 3. Пусть $\langle A,\Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f\in\Omega$, то есть, операция f перестановочна с любой операцией из Ω. Если $\langle A,\Omega\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса, то либо операция f инъективна, либо унар $\langle A,f\rangle$ изоморфен неодноэлементному корню без нетривиальных узлов, либо $\langle A,f\rangle$ изоморфен сумме неодноэлементного корня без нетривиальных узлов и произвольного унара с инъективной операцией.

Замечание. Необходимые условия конгруэнц-рисовости, приведенные в теореме 3, в общем случае не являются достаточными.

Предложение. Пусть $\langle A,\Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f\in\Omega$, то есть, операция f перестановочна с любой операцией из Ω. Если унар $\langle A,f\rangle$ изоморфен C_1^t, где $t\in N\cup\{0,\infty\}$, то алгебра $\langle A,\Omega\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса.

Замечание. Пусть $\langle A,\Omega\cup\{f\}\rangle$ — алгебра с оператором f и основной сигнатурой Ω. Если Ω содержит только нульарные операции и унарные операции, удовлетворяющие тождеству $g(x)=x$ для любой унарной операции $g\in\Omega$, то $Con\langle A,\Omega\cup\{f\}\rangle=Con\langle A,f\rangle$ и, как следствие, для алгебры $\langle A,\Omega\cup\{f\}\rangle$ верны необходимые и достаточные условия конгруэнц-рисовости и рисовской простоты, приведенные в теоремах 1 и 2 соответственно.

В [4] на произвольном унаре $\langle A,f\rangle$ задается тернарная операция $p(x,y,z)$, перестановочная с операцией f. Пусть $x,y\in A$. Положим $M_{x,y}=\{n\in \mathrm{N}\cup\{0\}\mid f^n(x)=f^n(y)\}$, а также $k(x,y)=\min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y}\neq\emptyset$, и $k(x,y)=\infty$, если $M_{x,y}=\emptyset$. Положим далее

$$p(x,y,z)\overset{def}{=}\begin{cases} z, & \text{если } k(x,y)\leqslant k(y,z)\\ x, & \text{если } k(x,y)>k(y,z).\end{cases}\qquad(1)$$

Из (1) следует, что операция $p(x,y,z)$ удовлетворяет тождествам Пиксли $p(y,y,x) = p(x,y,y) = p(x,y,x) = x$ и, следовательно, является мальцевской.

На основе подхода, предложенного в [4], в [5] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ определяется тернарная операция $s(x,y,z)$, перестановочная с операцией f:

$$s(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) < k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \qquad (2)$$

Из (2) вытекает, что операция s удовлетворяет тождествам $s(y,y,x) = s(x,y,y) = s(y,x,y) = x$. Как следствие, она также является мальцевской операцией, и, кроме того, операцией меньшинства.

Теорема 4. Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1), (2). Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, либо $\langle A, f\rangle$ изоморфен сумме неодноэлементного корня без нетривиальных узлов и произвольного унара с инъективной операцией.

Литература. [1] R. F. Tichy. The Rees congruences in universal algebras. Publ. Inst. Math. (Beograd), 29 (1981), 229–239. [2] В. Л. Усольцев. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия. Чебышевский сборник, 17, N4 (2016), 157–166. [3] А. Г. Курош. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. М.: Наука, 1974. [4] В. К. Карташов. Об унарах с мальцевской операцией. Унив. алгебра и ее приложения: Тез. докл. междунар. сем., посв. памяти проф. МГУ Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32. [5] В. Л. Усольцев. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x,y,x) = y$. Чебышевский сборник, 12, N2 (2011), 127–134.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

e-mail: usl2004@mail.ru

В. Х. Фарукшин (Москва)

О категории R–разложимых p–локальных групп без кручения конечного ранга

Обозначим через $\mathbb{Z}_p$ локализацию кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно простого числа p, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел,$\langle X\rangle = \mathbb{Z}_pX$ — свободный $\mathbb{Z}_p$–модуль, порожденный множеством X.

Группу A назовем R–разложимой, если кольцо R является минимальным кольцом расщепления для группы A.

Рассмотрим категорию$\mathcal{L}_p(W)$ — p–локальных R–разложимых групп без кручения конечного ранга с отмеченными $\mathbb{Q}$–базисами групп $W = X\cup Y$, где X — p-базис группы, Y — дополнение p–базиса X до $\mathbb{Q}$ –базиса группы. Морфизмы — это групповые гомоморфизмы. Вторая категория $\mathrm{H}_R(W)$ — это категория гомоморфизмов свободных R–модулей с отмеченными базисами. Морфизмы в $\mathrm{H}_R(W)$ определяются следующим образом. Если $\Phi\colon M \to N$ и $\Psi\colon M_1 \to N_1$ — два объекта $\mathrm{H}_R(W)$ и $W = Y\cup X, W_1 = Y_1\cup X_1$ — отмеченные базисы модулей M, N, M_1, N_1 соответственно, то морфизмом из Φ в Ψ назовем пару гомоморфизмов R–модулей (f, ϕ), $f\colon M \to M_1, \phi\colon N \to N_1$ таких, что $f(\langle Y\rangle) \subset \langle Y_1\rangle, \phi(\langle X\rangle) \subset \langle X_1\rangle$ и $\phi\Phi = \Psi f$, то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & N \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ M_1 & \xrightarrow[\Psi]{} & N_1 \end{array}$$

Теорема. Категории $\mathcal{L}_p(W)$ и $\mathrm{H}_R(W)$ изоморфны.

e-mail: fvkh@mail.ru

А. С. Федосенко, **К. А. Филиппов**, **А. К. Шлёпкин** (Красноярск)

О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями циклических групп нечетного порядка и унитарных групп степени 3

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [2].

Напомним, что группа G называется группой Шункова, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу [1]. Данный класс групп был введен В.П. Шунковым в 70-е годы, и первоначально, сам В.П. Шунков называл такие группы сопряженно бипримитивно конечными.

Группы Шункова отличны от периодических групп. Кроме того, построены примеры групп Шункова содержащих элементы бесконечного порядка и не обладающих периодической частью. Напомним, что под периодической частью группы понимается множество всех элементов конечного порядка группы, при условии, что они образуют подгруппу.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех конечных циклических групп нечётного порядка, $\mathfrak{B} = \{U_3(q) \mid q = 2^k, k = 1, 2, \cdots\}$ — множество всех унитарных групп степени 3 над конечными полями четной характеристики.

Теорема 1. Группа Шункова G, насыщенная группами из множества

$$\mathfrak{R} = \{B \times A | A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\},$$

обладает периодической частью, которая локально конечна и изоморфна $U_3(Q) \times I$, где I — локально циклическая группа без инволюций, Q — локально конечное поле четной характеристики.

Литература. [1]Сенашов В. И., Шунков В. П., Группы с условиями конечности. *Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН,* (2001) 326 с. [2]Шлёпкин А. К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. *III межд. конф. по алгебре, тезиы докладов, Красноярск,* (1993).

Красноярский государственный аграрный университет, Сибирский федеральный университет

e-mail: filippov_kostya@mail.ru

e-mail: ak_kgau@mail.ru

А. А. Фомин (Москва)

Теоремы Куроша и Мальцева об абелевых группах

В работе [1] А.Г. Курош описал p-примитивные абелевы группы без кручения конечного ранга при помощи матриц с p-адическими элементами. Эта работа сыграла значительную роль в развитии теории абелевых групп. Используя теорему Куроша, Д. Дерри [2] получил описание всех абелевых групп без кручения конечного ранга. А.И. Мальцев независимо получил аналогичный результат [3]. Мы предлагаем следующую современную трактовку этих классических результатов.

Рассматриваются две категории абелевых групп. Объектами категории $\mathcal{F}$ являются абелевы группы без кручения конечного ранга с отмеченными базисами. Под базисом здесь понимается любая максимальная линейно независимая система элементов. Объектами категории $\mathcal{D}$ являются смешанные факторно делимые группы с отмеченными базисами. Морфизмами в обеих категориях являются гомоморфизмы групп с целочисленными матрицами относительно отмеченных базисов.

Третья категория $\mathcal{S}$ представляет собой категорию терминов, в которых одновременно описываются объекты категорий $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$. А именно, объектами категории $\mathcal{S}$ являются конечные последовательности $a_1, \dots, a_n$ элементов конечно представимых модулей над кольцом полиадических чисел $\widehat{\mathbf{Z}}$. Кольцо полиадических чисел $\widehat{\mathbf{Z}} = \prod\limits_p \widehat{\mathbf{Z}}_p$ - это произведение колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Элементы $a_1, \dots, a_n$ порождают $\widehat{\mathbf{Z}}$-подмодуль A, который также является конечно представимым $\widehat{\mathbf{Z}}$-модулем. Мы обозначаем $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\widehat{\mathbf{Z}}}$. Пусть $B = \langle b_1, \dots, b_k \rangle_{\widehat{\mathbf{Z}}}$ - модуль, соответствующий объекту $b_1, \dots, b_k$. Морфизмами из объекта $a_1, \dots, a_n$ в объект $b_1, \dots, b_k$ являются все возможные пары (φ, M), где $\varphi : A \to B$ - гомоморфизм $\widehat{\mathbf{Z}}$-модулей, а M - целочисленная матрица размера $k \times n$, для которых выполнено матричное равенство

$$(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n) = (b_1, \dots, b_k) M.$$

Доказывается, что категория $\mathcal{S}$ эквивалентна категории $\mathcal{D}$ и двойственна категории $\mathcal{F}$. Композиция этой эквивалентности и двойственности является двойственностью между категориями $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}$, которую можно рассматривать как модификацию двойственности, полученной в [4].

Заметим, что p-примитивные группы Куроша являются факторно делимыми. Эквивалентность категорий $\mathcal{S}$ и $\mathcal{D}$, построенная в [5], может рассматриваться как обобщение теоремы Куроша [1], в то время как двойственность категорий $\mathcal{S}$ и $\mathcal{F}$ является модификацией описания Мальцева [3].

Литература. [1] A. G. Kurosh, Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen von endlichen Range. Ann. of Math., 38 (1937), 175-203. [2] D. Derry, Über eine Klasse von abelschen Gruppen. Proc. London Math. Soc., s2-43 (1938), 490-506. [3] А. И. Мальцев, Абелевы группы конечного ранга без кручения. Матем. сб., 4 (1938), 45-68. [4] A. A. Fomin, W. J. Wickless, Quotient divisible

Abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 45-52. [5] А. А. Фомин, К теории факторно делимых групп. 2. Фундамент. и прикл. матем., 20 (2015), 157-196.

Московский педагогический государственный университет

e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Д. А. Ходанович (Гомель)

О разрешимости конечной группы с парой несопряженных подгрупп примарных индексов

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология и обозначения соответствуют [1]. Натуральное число, являющееся степенью некоторого простого числа, называется примарным.

Разрешимость группы с двумя несопряженными сверхразрешимыми максимальными подгруппами примарных индексов установлена в [2, теорема 4.1]. Строение разрешимой группы с двумя несопряженными сверхразрешимыми максимальными подгруппами описано в [3]. В [4, теорема 3.5] получена разрешимость группы со сверхразрешимой подгруппой нечетного примарного индекса и установлено [4, теорема 4.5] достаточное условие разрешимости группы G, при условии, что все собственные подгруппы в некоторой максимальной подгруппе A сверхразрешимы и индекс подгруппы A в G примарен.

Без использования классификации конечных простых групп доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть A и B — несопряженные максимальные подгруппы в группе G. Предположим, что выполняются следующие требования:*

(1) *A и B имеют примарные индексы в G;*

(2) *все собственные подгруппы в A и в B сверхразрешимы.*

Тогда группа G разрешима.

В простой группе $PSL(2,7)$ есть две максимальные подгруппы примарных индексов: симметрическая группа S_4 степени 4 и подгруппа порядка 21. В S_4 имеется знакопеременная группа степени 4, которая не сверхразрешима. Поэтому в теореме требование сверхразрешимости собственных подгрупп даже в одной из подгрупп A или B отбросить нельзя.

В простой группе $PSL(2,31)$ есть сверхразрешимые максимальные подгруппы порядков 2^3 и $31 \cdot 5 \cdot 3$. Их индексы равны $31 \cdot 5 \cdot 3$ и

2^3 соответственно. Поэтому в теореме требование примарности индексов даже одной из подгрупп A или B отбросить нельзя.

Литература. [1] В. С. Монахов. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. [2] K. Corradi, P. Z. Hermann, L. Hethelyi, E. Nortvath. Miscellaneous rezults on supersolvable groups. London Mathematical Society. Lecture Note Series, 387. Groups St Andrews 2009 in Bath: 1, 198–212. [3] Л. С. Казарин, Ю. А. Корзюков. Конечные разрешимые группы со сверхразрешимыми максимальными подгруппами. Известия вузов. Математика, 1980, 5, 22–27. [4] В. С. Монахов. Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп. В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1978, 50–63.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

e-mail: hodanovich@gsu.by

А. В. Царев (Москва)

Об обобщении факторно делимых групп

Факторно делимые группы впервые были введены и рассмотрены Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в 1961 г. в [1] для случая групп без кручения конечного ранга при изучении аддитивных групп колец без кручения.

Определение (Бьюмонт—Пирс). Группа без кручения A конечного ранга называется *факторно делимой*, если в ней найдется такая свободная подгруппа F, что A/F — делимая периодическая группа.

Для этих групп Бьюмон и Пирс постоили систему инвариантов, задающих их (внутри класса) с точностью до квазиизоморфизма. Кроме того, они доказали, что аддитивная группа любого полупервичного кольца без кручения конечного ранга является факторно делимой группой.

Почти сразу появился интерес к обобщениям факторно делимых групп без кручения на случай бесконечного ранга. Уже в 1962 г. Дж. Рейд [2] получил следующий результат.

Теорема 1. Если A — группа без кручения бесконечного ранга, то найдется свободная подгруппа F группы A, такая что A/F — делимая периодическая группа.

Таким образом, обобщение факторно делимых групп на случай бесконечного ранга в случае групп без кручения не является содержательным. В конце 90-х годов появились идеи о расширении понятия факторно делимой группы на смешанный случай. Наиболее содержательно это было сделано У. Уиклессом и А.А. Фоминым в 1998 г. [3].

Определение (Уиклесс—Фомин). Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую что A/F — делимая периодическая группа.

Уиклесс и Фомин доказали, что построенная ими категория факторно делимых групп с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов двойственна категории групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов.

В докладе мы рассмотрим класс групп, являющийся наиболее широким обобщением факторно делимых групп.

Определение. Группу A будем называть *обобщенной факторно делимой* или *gqd-группой*, если она содержит свободную подгруппу F, такую что A/F — делимая периодическая группа.

Основным результатам является следующая

Теорема 2. Группа A бесконечного ранга является обобщенной факторно делимой тогда и только тогда, когда $r_p(A) \leqslant r_0(A)$ при всех простых p.

Здесь $r_0(A)$ — ранг без кручения группы A, а $r_p(A)$ — p-ранг группы A.

Литература. [1] R. Beaumont, R. Pierce, Torsion Free Rings, Ill. J. Math., 5 (1961), 6–98. [2] J. D. Reid, A Note on Torsion Free Abelian Groups of Infinite Rank, Proc. AMS, 13:2 (1962), 222–225. [3] A. A. Fomin, W. Wickless, Quotient divisible abelian groups, Proc. AMS, 126 (1998), 45–52.

Московский педагогический государственный

e-mail: an-tsarev@yandex.ru

Л. М. Цыбуля (Москва)

Основные T-пространства относительно свободной алгебры Грассмана без 1

В работах [1], [2] довольно хорошо была изучена структура унитарно замкнутых T-пространств в *относительно свободной алгебре Грассмана* $F^{(3)} = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle / T^{(3)}$ *с* 1 над бесконечным полем k простой характеристики p, где $T^{(3)}$ — унитарно замкнутый T-идеал, порождённый тождеством $[[x_1, x_2], x_3] = 0$. Интерес к этой алгебре возник в связи с решением аналога проблемы Шпехта в характеристике p: в ней по существу были даны все основные известные контрпримеры к этой проблеме. При этом весьма важную роль в алгебре $F^{(3)}$ играло T-пространство W_n, порожденное всеми одночленами, содержащими каждую переменную с кратностью n, так называемыми *n-словами.* Именно это T-пространство послужило в некотором смысле основой для построения контрпримеров: из бесконечно базируемых T-подпространств, найденных в W_n, потом были сконструированы бесконечно базируемые T-идеалы [3], [4], [5]. Отметим, что содержательная структурная теория в алгебре $F^{(3)}$ возникает, если n делится на p^l, $l \in N$. В случае же, когда n взаимно просто с характеристикой p, и в случае характеристики нуль T-пространство W_n просто совпадает с $F^{(3)}$.

Естественной представляется задача о построении аналогичной теории в этой же алгебре, но без 1, решение которой начато в [6]. В продолжение этой работы в настоящей заметке рассматриваются не унитарно замкнутые T-пространства в *относительно свободной алгебре Грассмана* $\mathbb{F}^{(3)} = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle / T^{(3)}$ *без* 1 над бесконечным полем не только простой характеристики, но и нулевой. Образы переменных в $\mathbb{F}^{(3)}$ обозначаются теми же буквами. Ясно, что любое T-пространство $\mathbb{S}$ в $\mathbb{F}^{(3)}$, порожденное теми же многочленами, что и T-пространство S в алгебре $F^{(3)}$, вообще говоря, меньше.

При отсутствии единицы строение T-пространств в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ в некоторой степени отличается. Если в $F^{(3)}$ практически основные структурные вопросы, как уже отмечалось выше, сводятся к T-пространствам W_{p^l}, в частности, при $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, выполнено $W_n = W_{p^l}$ и

$$F^{(3)} = W_1 = W_n \supset W_p \supset W_{p^2} \supset \ldots \supset W_{p^l} \supset \ldots,$$

то в $\mathbb{F}^{(3)}$ в этом случае $\mathbb{W}_n \subset \mathbb{W}_{p^l}$ (символы '$\supset$' и '$\subset$' означают строгие включения). Ввиду этого возник вопрос о связи между T-пространствами $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ при различных r и n, изучение которого начато в работе [6]. В продолжение этого исследования представленная ниже теорема дает следующий ответ на этот вопрос.

Теорема. Пусть $r, n \in N$, тогда в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ при $r > n$ справедливы следующие утверждения.

(1) Если r и n делятся на p, то

(a) в случае, когда степень вхождения числа p в r и n *одинакова* и r делится на n, то выполнено включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$;

(b) в случае, когда степень вхождения числа p в r *больше* степени вхождения числа p в n и r делится на n, то $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$;

(c) в случае, когда степень вхождения числа p в r *меньше*, чем степень вхождения этого числа в n, то $\mathbb{W}_r \not\subset \mathbb{W}_n$, $\mathbb{W}_r \not\supset \mathbb{W}_n$ и $\mathbb{W}_r \cap \mathbb{W}_n \neq \{0\}$.

(2) Если r и n не делятся на характеристику p, то $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.

(3) Над полем нулевой характеристики $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.

(4) Если r делится на p и на n, а n и p взаимно просты, то $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.

(5) Если r и p взаимно просты, а n делится на p, то $\mathbb{W}_r \not\subset \mathbb{W}_n$, $\mathbb{W}_r \not\supset \mathbb{W}_n$ и $\mathbb{W}_r \cap \mathbb{W}_n \neq \{0\}$.

Открытым пока остается вопрос о взаимосвязи $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ в случаях, когда r по сравнению с n имеет одинаковую или большую степень вхождения по p и не делится на n. Может показаться, что делимость r на n важна и в случае, когда степень вхождения числа p в r меньше, чем в n. На самом деле, для этого случая, как следует из теоремы, отношение делимости между r и n не играет никакой роли.

Как показывает приведенная теорема, структура рассматриваемых T-подпространств в относительно свободной алгебре Грассмана без 1 устроена несколько сложнее. В характеристике p она выражается следующей диаграммой строгих включений.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{F}^{(3)} = & \mathbb{W}_1 & \supset & \mathbb{W}_{n_1} & \supset & \mathbb{W}_{n_2} & \supset & \mathbb{W}_{n_3} & \supset & \dots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_p & \supset & \mathbb{W}_{pn_1} & \supset & \mathbb{W}_{pn_2} & \supset & \mathbb{W}_{pn_3} & \supset & \dots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \mathbb{W}_{p^2} & \supset & \mathbb{W}_{p^2n_1} & \supset & \mathbb{W}_{p^2n_2} & \supset & \mathbb{W}_{p^2n_3} & \supset & \dots \\
& \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
& \dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
\end{array}$$

где $n_1 > 1$, $(n_i, p) = 1$, $n_i < n_j$ при $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots$. А в нулевой характеристике

$$\mathbb{F}^{(3)} = \mathbb{W}_1 \supset \mathbb{W}_2 \supset \mathbb{W}_3 \supset \mathbb{W}_4 \supset \ldots.$$

Как видим, основные T-подпространства образуют бесконечные строго убывающие цепочки включений в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$.

В связи с построенными бесконечными строго убывающими цепочками T-подпространств в $\mathbb{F}^{(3)}$ в дальнейшем представляется интересным изучение строения фактор-T-пространств по соответствующим T-подпространствам и других конструкций.

Литература. [1] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля. О (p, n)-проблеме // Вестник Самарского государственного университета. – 2007. – Т. 57. – №7. –

С. 35–55. [2] А.В. Гришин, Л. М. Цыбуля. О T-пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана // Математический сборник. – 2009. – Т. 200. – №9. – С. 41–80. [3] А. В. Гришин. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 101–118. [4] В. В. Щиголев. Примеры бесконечно базируемых T-идеалов // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 307–312. [5] А. Я. Белов. О нешпехтовых многообразиях // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 47–66. [6] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля. О структуре относительно свободной алгебры Грассмана. // Фундам. прикл. мат., 2009, том 15, №8, с. 3–93.

Московский педагогический государственный университет

e-mail: liliya-kinder@mail.ru

О. В. Чермных (Киров)

О представлениях решеточно упорядоченного полукольца сечениями

В статье [1] получено представление решеточно упорядоченного кольца R сечениями пучка на булевом пространстве дополняемых l-идеалов из R, и анонсировано представление l-полупервичного l-кольца на первичном спектре. Нами получены обобщения этих результатов в классе drl-полуколец. О drl-полукольцах и их пучковых представлениях см. [2],[3].

Под *полукольцом* мы понимаем алгебру, отличающуюся от ассоциативного кольца, возможно, необратимостью аддитивной операции; не предполагается наличие единицы.

Алгебра $(S, +, \cdot, \vee, \wedge, -, 0)$ называется *drl-полукольцом*, если выполняются условия:

(1) $(S, +, \cdot, 0)$ — полукольцо;
(2) $(S, \vee, \wedge)$ — решетка (с порядком $\leq$);
(3) сложение $+$ дистрибутивно относительно $\vee$ и $\wedge$;
(4) $a - b$ — наименьший элемент z такой, что $b + z \geq a$;
(5) $(a - b) \vee 0 + b \leq a \vee b$ для любых $a, b \in S$;
(6) $a(b - c) = ab - ac$ и $(a - b)c = ac - bc$ для любых $a, b, c \in S$;
(7) $ab \geq 0$ для любых $a, b \geq 0$ из S.

Первичный l-идеал и первичный спектр $\operatorname{Spec} S$ (со стоуновской топологией) определяются как и для колец. Слоями пучка $(\Lambda(S), \operatorname{Spec} S)$ являются фактор-drl-полукольца S/O_P, где

$$O_P = \cup\{O_U : U \text{ — открытая окрестность точки } P \in \operatorname{Spec} S\}$$

для всех

$$O_U = \cap\{P \in \operatorname{Spec} S : P \in U,\, U \text{ открыто в } \operatorname{Spec} S\}.$$

drl-Полукольцо с нулевым пересечением всех первичных l-идеалов называется *l-полупервичным.* l-Полупервичность drl-полукольца S равносильна как отсутствию в S ненулевых нильпотентных l-идеалов, так и отсутствию ненулевых сильно нильпотентных элементов. *Формальной единицей* drl-полукольца S называется элемент, не лежащий ни в каком собственном l-идеале из S.

Теорема 1. Произвольное l-полупервичное drl-полукольцо S с формальной единицей изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(\Lambda(S), \operatorname{Spec} S)$.

l-Идеал A drl-полукольца S называется *дополняемым*, если $A + B = S$ и $A \cap B = 0$ для некоторого l-идеала B. Множество $\beta\, S$ всех дополняемых l-идеалов является булевой решеткой, а $\operatorname{Max} \beta\, S$ — пространство максимальных идеалов этой решетки. Для $M \in \operatorname{Max} \beta S$ положим $0_M = \cup\{A \in \beta S : A \in M\}$. Тогда $\Psi(S) = \dot{\cup} 0_M$ —пучок drl-полуколец над $\operatorname{Max} \beta S$.

Теорема 2. Произвольное drl-полукольцо S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(\Psi(S), \operatorname{Max} \beta S)$ неприводимых drl-полуколец.

Литература. [1] K. Keimel, The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves. Lect. Notes Math., 248 (1971), 1–98. [2] О. В. Чермных, О drl-полугруппах и drl-полукольцах. Чебышев. сб., 14:4 (2016), 167–179. [3] В. В. Чермных, О. В. Чермных. Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец. Сиб. электрон. матем. изв., 14 (2017), 946–971.

Вятский государственный университет

e-mail: vv146146@mail.ru

И. А. Чубаров (Москва)

О групповом детерминанте (по Фробениусу)

Пусть $G = \{g_1, ..., g_n\}$ – группа, $\{x_g | g \in G\}$ – независимые коммутирующие переменные. (Также будет использоваться обозначение $x_i = x_{g_i}, i = 1, ..., n$.) Групповая матрица X_G – матрица порядка n с элементами $x_{ij} = x_{g_i g_j{}^{-1}}$. Групповым детерминантом называется $\Theta = \Theta_G = det X_G$.Он является однородным многочленом от

$\{x_1, ..., x_n\}$ с целочисленными коэффициентами. Групповые детерминанты впервые рассматривали Дедекинд и Фробениус в 90-е годы XIX века. В процессе разработки теории характеров Фробениус [1] доказал, что групповой детерминант разлагается на множители, неприводимые над полем C , так, что количество различных множителей равно числу классов сопряженности группы G , множитель ϕ степени k входит в ϕ с кратностью k, причем количество линейных множителей равно индексу коммутанта группы G. Различные ϕ взаимно однозначно соответствуют неприводимым характерам χ группы G (так что можно записывать $\chi = \chi_\phi$ или $\phi = \phi_\chi$),$\chi_\phi(e) = k = deg\phi$, $\chi_\phi(g)$ равен коэффициенту при ${x_e}^{k-1}x_g$ в многочлене ϕ. Помимо обычных характеров, Фробениус ввел так называемые k-характеры $\chi^{(k)}$, значение $\chi^{(k)}(h_1, ..., h_k)$ равно коэффициенту при $x_{h_1}...x_{h_k}$ в соответствующем множителе ϕ_χ (обычные характеры отвечают $k = 1$) . В [3], в ответ на вопрос, поставленный в [2], было доказано, что групповой детерминант определяет группу, с точностью до изоморфизма. На самом деле достаточно k-характеров с $k \leq 3$, см. [4]. В докладе будет рассказано об этих и связанных с ними результатах.

Литература. [1] F. G. Frobenius, Ueber die Primfaktoren der Gruppendeterminante. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1896, 1343-1382. (Gesammelte Abh., Springer, 1968, 38–77). [2] K.W.Johnson, On the group determinant. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1991, 109, 299–311. [3] E. Formanek ,D. Sibley, The group determinant determines the group. Proc. Amer. Math. Soc., 1991, 112, No. 3, 649–656. [4] H.-J. Hoenke, K. W. Johnson The 1-, 2- and 3-characters determine a group. Bull. Amer. Math. Soc., 1992, v. 27, 243-245.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: igor.chubaroff@gmail.com

Н. Е. Шавгулидзе (Москва)

Различные примеры решеточно упорядоченных колец

В докладе будут приведены примеры решеточно упорядоченных колец и линейно упорядоченных колец. В частности, будут рассмотрены примеры, подтверждающие различие некоторых классов колец.

Также будет перечислен ряд колец, в которых нельзя ввести отношение порядка так, чтобы получить решеточно упорядоченные кольца.

Литература. [1] Л. Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Наука, 1965. [2] М. А. Шаталова, К теории радикалов в структурно упорядоченных кольцах. Математические заметки, 4:6 (1968), 639–648. [3] A. Bigard, K. Keimel, S. Wolfenstein, Groups et anneaux reticulés. Berlin, Heidelberg, N.Y. Springer-Verlag, 1977. [4] G. Birkhoff, R. S. Pierce. Lattice-ordered rings. An. Acad. Brasil. Ci., 28 (1956), 41–69. [5] S. A. Steinberg, Lattice-ordered rings and modules. Springer, 2010.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: nathalia_s@mail.ru

И. К. Шаранхаев (Улан-Удэ, Россия)

О простых функциях алгебры логики

В данной работе рассматриваются функции, которые являются наиболее «простыми» в смысле сложности представлений функций алгебры логики формулами. Как известно, они играют ключевую роль в задаче сравнения произвольных базисов [1].

Функция f называется *бесповторной* в базисе B, если ее можно представить в этом базисе формулой, в которой каждая переменная встречается не более одного раза. В противном случае f называется *повторной* в B.

Функция f называется *слабоповторной* в базисе B, если любая остаточная подфункция функции f (т.е. получаемая из f подстановкой констант вместо некоторых переменных) является бесповторной, а сама f повторна в базисе B.

Функция f называется *простой* в базисе B, если любая остаточная подфункция функции f является бесповторной в базисе B.

Таким образом, класс простых функций объединяет классы бесповторных и слабоповторных функций.

Базис $\{0, 1, \cdot, \vee, -\}$ называется *элементарным* и обозначается B_0.

Всякий базис $B_0 \cup \{g\}$, где g – слабоповторная в B_0, называется *предэлементарным.*

Следующий результат дает описание простых функций в одной счетной последовательности предэлементарных базисов и, тем самым, завершает описание классов простых функций во всех предэлементарных базисах. Все понятия, которые здесь не определяются, можно найти, например, в [2].

Функцию f будем называть *n-неплотной*, где $n \geq 3$, если либо $\operatorname{rank} f < 2$, либо для любой $x \in \rho(f)$ выполняется одно из условий:

(1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^1)$;

(2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^0)$;

(3) $\delta(f) = \delta(f_x^0) = \delta(f_x^1)$ и существуют $y_1, \ldots, y_{n-1} \in \rho(f'_x)$ такие, что $\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\dfrac{\partial f'_x}{\partial y_1 \ldots \partial y_{n-1}}\right)$;

и кроме этого:

— если для любой переменной из $\rho(f)$ выполняется третье условие, то неверно, что $f \in M_x$ для любой $x \in \rho(f)$;

— существует $x_1 \in \rho(f)$ такая, что $f \in M_{x_1}$;

— если $\operatorname{rank} f = n+1$ и существует переменная из $\rho(f)$, для которой верно третье условие, то это условие выполняется для всех переменных из $\rho(f)$;

— если $\operatorname{rank} f = n+2$ и существует переменная из $\rho(f)$, для которой выполняется третье условие, то для любой $y \in \rho(f)$ такой, что $\delta(f) \subsetneq \delta(f_y^\alpha)$, где $\alpha \in \{0,1\}$, верно $|\delta(f_y^\alpha)| = |\delta(f)|+1$ или $\delta(f_y^\alpha) = \chi(f_y^\alpha)$.

Функцию f будем называть *наследственно n-неплотной*, если сама f и все ее остаточные подфункции являются n-неплотными.

Теорема 1. Функция f является простой в базисе $B_n = \{-, \vee, \cdot, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \vee x_2\bar{x}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n$, где $n \geq 4$, тогда и только тогда, когда она либо наследственно $(n-1)$-неплотна, либо слабоповторна в этом базисе.

Отметим, что описание всех слабоповторных функций в базисе B_n, где $n \geq 4$, было получено в работе [3].

Литература. [1] Д. Ю. Черухин, Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов. Математические вопросы кибернетики, 8 (1999), 77–122. [2] Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев, Критерии бесповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3. Дискретная математика, 17 (2) (2005), 127–138. [3] И. К. Шаранхаев, О классификации базисов булевых функций. Вестник Бурятского гос. университета. Сер. 13, 3 (2006), 61–67.

Бурятский государственный университет

e-mail: goran5@mail.ru

А. А. Шлепкин (Красноярск)

О периодической части группы Шункова, насыщенной сплетенными группами

Пусть X — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества X, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [1]. В [2] устанвлена структура периодической группы Шункова насыщенной сплетенными группами. В приводимой ниже теореме установлена структура произвольной группы Шункова (не обязательно периодической), насыщенной сплетенными группами.

Теорема 1. Пусть G — группа Шункова, насыщенная сплетенными группами. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$ и

$$T(G) = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle,$$

где $A^v = B$, A — локально циклическая группа и $|v^2| = 2$.

Литература. [1]А.К. Шлепкин, Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993. С. 363. [2] А. А. Шлепкин, Периодические группы, насыщенные сплетенными ми группами. Сиб. электрон. матем. изв. 2013, том 10, С. 56–64

Сибирский федеральный университет

e-mail: shlyopkin@gmail.com

П. М. Штейнер (Москва)

Линейные отображения, меняющие тип мажоризации

Пусть $M_{n,m}$ — пространство действительных матриц размера $n \times m$ (пишем M_n при $m = n$). Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $x_{[j]}$ его j-ю по невозрастанию координату.

Определение 1. Пусть x, v — вектора из $\mathbb{R}^n$. Говорим, что v *мажорирует* x, $x \preceq v$ (или $v \succeq x$), если $\sum_{j=1}^{k} x_{[j]} \leq \sum_{j=1}^{k} v_{[j]}$ для $k = 1, \ldots, n$, и при $k = n$ достигается равенство.

Определение 2. Различные типы мажоризаций матриц определяются следующим образом (см. [1], [2]):

- Слабая мажоризация: $A \preceq^w B$, если существует такая строчно-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.
- Мажоризация по направлению: $A \preceq^d B$, если $Ax \preceq Bx$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$.
- Сильная мажоризация: $A \preceq^s B$, если существует такая двояко-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.

Теорема 1. Пусть T — линейный оператор на $M_{n,m}$. Следующие утверждеиня эквивалентны:

1. $A \preceq^d B \Rightarrow T(A) \preceq^s T(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$
2. Выполнено одно из следующих условий:

(a) Существуют $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$, такие, что $T(X) = \sum\limits_{j=1}^{m} (trx^j)S_j$.

(b) Существуют $S \in M_m$, $P \in S_n$ и $R \in M_m$ ранга 1, такие, что $T(X) = PXR + JXS$.

.

Теорема 2. Пусть T — линейный оператор на $M_{n,m}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $A \preceq^w B \Rightarrow T(A) \preceq^s T(B)$, для любых $A, B \in M_{n,m}$
2. $A \preceq^w B \Rightarrow T(A) \preceq^d T(B)$, для любых $A, B \in M_{n,m}$
3. Выполнено одно из следующих условий:

   (a) $T(X) = 0$.

   (b) $n = 2$ и существует $L \in M_m$, такое, что $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} XL$.

Автор доклада благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и ценные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ-16-11-10075.

Литература. [1] A. W. Marshall, I.Olkin, B.C. Arnold. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Second Edition. Springer, New York, 2011. [2] F. D. Martínez Pería, Pedro G.Massey and Luis E.Silvestre. Weak matrix majorization. Linear Algebra Appl. 2005. No. 403. pp. 343–368.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: pashteiner@ya.ru

Н. А. Щучкин

Инварианты конечно порожденной абелевой n-группы

Коммутативность в теории n-групп имеет несколько обобщений групповой коммутативности. Одним из таких обобщений будет следующее определение. Если в n-группе верны тождества $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то ее называют абелевой.

На любой абелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ можно определить абелеву группу $ret_c\langle G, f\rangle$, которую называют ретрактом n-группы, с бинарной операцией $+$ по правилу $a + b = f(a, c, \ldots, c, \bar{c}, b)$, где $c \in G$, $\bar{c}$ — решение уравнения $f(c, \ldots, c, x) = c$ (смотри, например, [1]). Тогда

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n + d, \tag{1}$$

где $d = f(c, \ldots, c)$. Элемент c будет нулем в $ret_c\langle G, f\rangle$. Если ретракт абелевой n-группы является циклической группой, то ее называют полуциклической [1]. Верно и обратно: в любой абелевой группе G для произвольно выбранного элемента d задается абелева n-группа $\langle G, f\rangle = der_d G$, где f действует по правилу (1).

Теорема 1. Конечно порожденная абелева n-группа изоморфна прямому произведению конечного числа неразложимых абелевых полуциклических n-групп, частью конечных примарных, частью бесконечных.

Любая бесконечная абелева полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна n-группе $der_l Z$, где $0 \leq l \leq \frac{n-1}{2}$, Z — аддитивная группа целых чисел (теорема 3, [2]), будем говорить в этом случае, что $\langle G, f\rangle$ имеет тип (∞, l).

Теорема 2. Прямое произведение $\prod_{i=1}^{r}\langle G_i, f_i\rangle$ абелевых полуциклических n-групп $\langle G_i, f_i\rangle$ типов (∞, l_i) является свободной n-группой в классе абелевых n-групп тогда и только тогда, когда $l_1 = 1$ при $r = 1$ либо НОД $(l_1, \ldots, l_r, n-1) = 1$ при $r \geq 2$.

Любая конечная абелева полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка k изоморфна n-группе $der_l Z_k$, где $l \mid$ НОД$(n-1, k)$, Z_k – аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k (теорема 2, [2]). Любая конечная абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка p^m (p – простое число) изоморфна прямому произведению

$$der_{l_1} Z_{p^{m_1}} \times \ldots \times der_{l_r} Z_{p^{m_r}}, \tag{2}$$

где $m = m_1 + \ldots + m_r$. Множители с равными порядками в разложении (2) расположим рядом и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей, входящих в эти подпрямые произведения. Получим

$$\prod_{w_1=1}^{r_1} der_{l_{w_1}} Z_{p^{m_1}} \times \prod_{w_2=1}^{r_2} der_{l_{r_1+w_2}} Z_{p^{m_2}} \times \ldots \times \prod_{w_t=1}^{r_t} der_{l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i + w_t}} Z_{p^{m_t}}, \tag{3}$$

где $m_1 > m_2 > \ldots > m_t$. Для разложения (3) назовем определяющим набор $D_1, \ldots, D_t$ наибольших общих делителей, заданных по правилу

$$\begin{cases} D_1 = \text{НОД}(d_1, p^{m_1-m_2}d_2, \ldots, p^{m_1-m_t}d_t, p^{m_1}, n-1), \\ D_2 = \text{НОД}(d_1, d_2, p^{m_2-m_3}d_3, \ldots, p^{m_2-m_t}d_t, p^{m_2}, n-1), \\ \ldots \\ D_{t-1} = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t}d_t, p^{m_{t-1}}, n-1), \\ D_t = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_{t-1}, d_t, p^{m_t}, n-1), \end{cases}$$

где $d_j = \text{НОД}\ (l_{\sum_{i=0}^{j-1} r_i+1}, \ldots, l_{\sum_{i=0}^{j-1} r_i+r_j})$ для всех $j = 1, \ldots, t$ (здесь $r_0 = 0$).

По теореме 1 любая конечно порожденная абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению

$$\prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{l_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \times \prod_{i=1}^{k} der_{l_i} Z \tag{4}$$

$u_1 + \ldots + u_s$ конечных n-групп $der_{l_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, где $l_{\epsilon j} \mid \text{НОД}(n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$, p_ϵ — различные простые числа, и k бесконечных n-групп $der_{l_i} Z$, где $0 \le l_i \le \frac{n-1}{2}$.

Полную систему инвариантов для конечно порожденной абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, изоморфной разложению (4), будем искать отдельно для $k = 0$, $k = 1$ и $k > 1$. Для конечной абелевой n-группы (случай $k = 0$) полная система инвариантов уже найдена в [3], это порядки примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (4) вместе с определяющими наборами наибольших общих делителей произведений примарных множителей по каждому простому делителю порядка этой n-группы.

Пусть $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению (4), где $k = 1$. Число l_1 и совокупность порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (4) вместе с набором наибольших общих делителей $\text{НОД}(l_1, D_{\epsilon i})$, где $D_{\epsilon i}$ — компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{l_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ для каждого $\epsilon = 1, \ldots, s$, назовем инвариантами n-группы $\langle G, f\rangle$. Доказано, что своими инвариантами конечно порожденная абелева n-группа, в разложение которой входит одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Пусть $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению (4), где $k > 1$. Количество бесконечных абелевых полуциклических n-групп k в разложении (4) вместе с L = НОД $(l_1, \ldots, l_k, n-1)$ и совокупность порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (4) вместе с набором наибольших общих делителей НОД$(L, D_{\epsilon i})$, где $D_{\epsilon i}$ – компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{l_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ для каждого $\epsilon = 1, \ldots, s$, назовем инвариантами n-группы $\langle G, f\rangle$. Доказано, что своими инвариантами конечно порожденная абелева n-группа, в разложение которой входит больше чем одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Литература. [1] А. М. Гальмак. n-Арные группы, Часть I. ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, 2003. [2] Н. А. Щучкин, Полуциклические n-арные группы, Известия ГГУ им. Ф. Скорины, 3(54) (2009), 186-194. [3] Н. А. Щучкин, Строение конечных абелевых n-арных групп, Дискрет. матем., 26:3 (2014), 144-159.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

e-mail: Nikolaj_shchuchkin@mail.ru

А. А. Ядченко (Гомель)

Автоморфизмы неприводимых линейных групп с абелевыми силовскими подгруппами

Пусть G — конечная группа, A — такая группа ее автоморфизмов, что $(|A|, |G|) = 1$. Тогда A называется группой *копростых* автоморфизмов группы G. Если $C_G(a) = C_G(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$, то A называется *сильноцентрализуемой группой копростых автоморфизмов* группы G.

Заметим, что для $|A| = p$ — простое число, условие сильноцентрализуемости выполняется. Для случая, когда группа A имеет нечетный порядок в [1] сформулирована гипотеза о том, что для неприводимых комплексных неприводимых линейных групп произвольной степени n справедливо утверждение, что n делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv -1$ или $1 (\mathrm{mod}\ |A|)$. В [2] эта задача решена положительно. При $|A| = p$ она совпадает с проблемой Айзекса [3].

Пусть $\pi(n^*)$ — множество таких простых делителей числа n, хотя бы одна степень $f > 1$ которых делит n и для нее выполняется условие: $f \equiv -1 (\mathrm{mod} |A|)$. Предположим, что подгруппа A непримарна нечетного порядка, и для $q \in \pi(n^*)$ силовская q-подгруппа G_q группы G абелева. Тогда для числа n укажем более сильное утверждение.

Условие Б. Скажем, что для Γ, A, G, C, χ и n выполнено условие Б, если $\Gamma = AG$, $G \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |G|) = 1$, A – непримарная группа нечетного порядка, которая не является нормальной в группе Γ, $C_G(a) = C_G(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, для каждого $q \in \pi(n^*)$ подгруппа G_q абелева и группа G имеет точный неприводимый комплексный характер χ степени n, который является a-инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^{\#}$.

Теорема. *Если для* Γ, A, G, C, χ *и* n *выполнено условие Б, то* n *делится на такую степень* $f > 1$ *некоторого простого числа, что* $f \equiv 1(mod|A|)$.

Теорема развивает результаты, полученные в [4] и [5].

Литература. [1] А. А. Ядченко. О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой $TI-$подгруппой нечетного порядка . III // Труды Института математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 99-114. [2] А. А. Ядченко. К проблеме Айзекса // Матем. сборник. 2013. Т. 204, No 12. С. 147-156. [3] I. M. Isaacs. Characters of solvable groups, in: The Santa Cruz Conference on Finite Groups. Proc. Symp. Pure Math. 1980. V. 37. P. 377-384. [4] А. А. Ядченко, А. В. Романовский. К проблеме Айзекса о конечных p-разрешимых линейных группах // Матем. заметки. 2001. Т. 69. В. 1. С. 144-152. [5] А. А. Ядченко. Об автоморфизмах неприводимых линейных групп с абелевой силовской 2-подгруппой // Матем. заметки. 2016. Т. 99. В. 1. С. 121-139.

Институт математики НАН Беларуси

e-mail: yadchenko_56@mail.ru

В. А. Ярошевич (Москва)

О количестве полугрупп многозначных отображений, сохраняющих заданное бинарное отношение

Пусть X — произвольное множество. Обозначим через $T(X)$ полугруппу преобразований множества X, то есть отображений $\alpha : X \to X$ с операцией умножения, определённой равенством $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in X$, $\alpha, \beta \in T(X)$. Хорошо известно, что $T(X)$ — регулярная полугруппа.

Наряду с преобразованиями множества X рассмотрим частичные и многозначные отображения из X в X. Обозначим их соответственно через $PT(X)$ и $B(X)$. Несложно показать, что $PT(X)$ и $B(X)$ — это полугруппы, и $T(X)$ является подполугруппой $PT(X)$, а

$PT(X)$ — подполугруппой $B(X)$. Отметим, что всякому многозначному отображению α взаимно однозначно соответствует некоторое бинарное отношение σ, так как

$$y \in x\alpha \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \sigma.$$

Если множество X наделено некоторой структурой, то естественно рассматривать такие преобразования $X \to X$, которые сохраняют эту структуру. Будем говорить, что преобразование $\alpha \in T(X)$ *сохраняет* σ, если из того, что $(a, b) \in \sigma$ следует, что $(a\alpha, b\alpha) \in \sigma$. Множество таких α образует подполугруппу (обозначение $T_\sigma(X)$) полугруппы $T(X)$. Несложно проверить, что условие «α сохраняет σ» эквивалентно условию $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$ (рассматриваем α и σ как бинарные отношения).

Для многозначных отображений понятие «α сохраняет σ» можно трактовать различно. Отметим, что для многозначных отображений условие $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$ даёт лишь одно из возможных определений. Приведём три определения.

Определение 1 [1]. Элемент $\alpha \in B(X)$ *сохраняет σ в узком смысле*, если

$$\forall x, y \in X \ \forall u, v \in X \ (u \in x\alpha \ \& \ v \in y\alpha \ \& \ (x, y) \in \sigma \Rightarrow (u, v) \in \sigma).$$

Определение 2 [1]. Элемент $\alpha \in B(X)$ *сохраняет σ в широком смысле*, если

$$\forall x, y \in X \ (x, y) \in \sigma \Rightarrow (\exists u \in x\alpha \quad \exists v \in y\alpha : (u, v) \in \sigma).$$

Определение 3 [2]. Бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ *согласуется с σ*, если

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma.$$

Положим $B_\sigma(X) = \{\alpha \in B(X) \,|\, \alpha$ сохраняет σ в узком смысле$\}$, $B'_\sigma(X) = \{\alpha \in B(X) \,|\, \alpha$ сохраняет σ в широком смысле$\}$ и $B''_\sigma(X) = \{\alpha \in B(X) \,|\, \alpha$ согласуется с $\sigma\}$.

В [1] показано, что $\alpha \in B_\sigma(X) \Leftrightarrow \alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$ и $\alpha \in B'_\sigma(X) \Leftrightarrow \alpha\sigma\alpha^{-1} \supseteq \sigma$. Кроме этого по определению $\alpha \in B''_\sigma(X) \Leftrightarrow \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$.

Отсюда очевидно вытекает, что $B_\sigma(X)$, $B'_\sigma(X)$ и $B''_\sigma(X)$ — подполугруппы полугруппы $B(X)$. Можно показать, что в общем случае ни одна из этих трёх полугрупп не содержится ни в одной другой.

Глядя на последние три соотношения между σ и α, можно очевидным образом продолжить их список до 8:

$$\begin{array}{llll}\alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma, & \alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \sigma, & \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma, & \sigma\alpha^{-1} \subseteq \alpha^{-1}\sigma, \\ \alpha^{-1}\sigma\alpha \supseteq \sigma, & \alpha\sigma\alpha^{-1} \supseteq \sigma, & \sigma\alpha \supseteq \alpha\sigma, & \sigma\alpha^{-1} \supseteq \alpha^{-1}\sigma.\end{array}$$

Множество многозначных отображений α, удовлетворяющих любому из этих соотношений, образует полугруппу. Рассмотрим далее все возможные пересечения этих полугрупп. Все они тоже будут полугруппами, которые сохраняют σ в некотором смысле. Таких пересечений (не считая пустого) будет не более $2^8 - 1 = 255$. Оказывается, что для $|X| \geqslant 3$ число пересечений равно 150 (результат подтверждён проверкой на компьютере). Другими словами, существует 150 различных определений того, что значит «многозначное отображение α сохраняет бинарное отношение σ».

Литература. [1] И. Б. Кожухов, В. А. Ярошевич, Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение. Фундамент. и прикл. матем., 14:7 (2008), 129–135; J. Math. Sci., 164:2 (2010), 240—244. [2] А. В. Творогов, В. А. Ярошевич, О регулярности полугруппы многозначных преобразований, сохраняющих заданной бинарное отношение. Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Междунар. конф., Тула, 2015, 135–137.

НИУ «Московский институт электронной техники»

e-mail: v-yaroshevich@ya.ru

А. Д. Яшунский (Москва)

О подалгебрах вероятностных распределений над конечным ассоциативным кольцом

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и X — случайная величина со значениями в множестве E_k. Распределение вероятностей величины X — *стохастический вектор* $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{k-1})$, компоненты которого удовлетворяют $\sum p_i = 1$ и $p_i \geqslant 0, i = 0, \ldots, k-1$. Будем обозначать через $\mathbf{S}^{(k)}$ множество k-мерных стохастических векторов, а через $\mathbf{e}^i$ — стохастический вектор, i-я компонента которого равна единице.

Пусть $\langle E_k, B\rangle$ — некоторая конечная алгебра. Рассмотрим операцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in B$ и набор независимых в совокупности случайных величин $X_1, \dots, X_n$ с распределениями $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^n \in \mathbf{S}^{(k)}$ соответственно. Тогда $f(X_1, \dots, X_n)$ есть также случайная величина с распределением $\mathbf{q} = (q_0, \dots, q_{k-1}) \in \mathbf{S}^{(k)}$, удовлетворяющим следующим соотношениям:

$$q_i = \sum_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = i}} p^1_{\sigma_1} \cdots p^n_{\sigma_n}.$$

Таким образом, каждая n-арная операция $f \in B$ индуцирует полилинейное отображение $\hat{f} \colon (\mathbf{S}^{(k)})^n \to \mathbf{S}^{(k)}$. Положим $\hat{B} = \{\hat{f} \mid f \in B\}$, тогда $\langle \mathbf{S}^{(k)}, \hat{B} \rangle$ — алгебра, которую будем называть *алгеброй вероятностных распределений, индуцированной алгеброй* $\langle E_k, B \rangle$.

Данная работа продолжает исследования в области алгебр вероятностных распределений, индуцированных различными конечными алгебраическими структурами. В работах [1, 2] рассматривались конечные поля и близкие к ним структуры.

Пусть $G \subseteq \mathbf{S}^{(k)}$, тогда через $Conv(G)$ будем обозначать выпуклую оболочку множества G. Из работы [2] вытекает следующее утверждение.

Теорема [2]. Пусть $\mathcal{F} = \langle E_k; +, \times \rangle$ — конечное поле, $0 \in E_k$ — его нулевой элемент, и $\mathcal{A} = \langle \mathbf{S}^{(k)}; \oplus, \otimes \rangle$ — индуцированная полем $\mathcal{F}$ алгебра вероятностных распределений. Пусть задано $\mathbf{g} \in \mathbf{S}^{(k)}$. Положим $K = \{\mathbf{e}^i \otimes (\mathbf{g} \oplus \mathbf{e}^j) \mid i \in E_k \setminus \{0\}, j \in E_k\} \cup \{\mathbf{e}^0\}$, тогда $\langle Conv(K); \oplus, \otimes \rangle$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$.

В данной работе этот результат обобщается на конечные кольца.

Теорема. Пусть $\mathcal{R} = \langle E_k; +, \times \rangle$ — конечное ассоциативное кольцо, $0 \in E_k$ — его нулевой элемент, и $\mathcal{A} = \langle \mathbf{S}^{(k)}; \oplus, \otimes \rangle$ — индуцированная кольцом $\mathcal{R}$ алгебра вероятностных распределений. Пусть задано конечное множество $G = \{\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^t\} \subset \mathbf{S}^{(k)}$, положим

$$K_{is} = \{\mathbf{e}^i \otimes (\mathbf{g}^s \oplus \mathbf{e}^j) \mid j \in E_k, \} \cup \{\mathbf{e}^0\}, \quad i \neq 0, s = 1, \dots, t,$$
$$K_s = \{\mathbf{h}^{1s} \oplus \dots \oplus \mathbf{h}^{k-1\,s} \mid \mathbf{h}^{1s} \in K_{1s}, \dots, \mathbf{h}^{k-1\,s} \in K_{k-1\,s}\}, \quad s = 1, \dots, t,$$
$$K = \{\mathbf{j}^1 \oplus \dots \oplus \mathbf{j}^t \mid \mathbf{j}^1 \in K_1, \dots, \mathbf{j}^t \in K_t\}.$$

Тогда $\langle Conv(K); \oplus, \otimes \rangle$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$.

Литература. [1] А. Д. Яшунский. О бесповторных преобразованиях случайных величин над конечными полями. Дискрет. матем. 27:3 (2015), 145–157. [2] А. Д. Яшунский. Выпуклые многогранники распределений, сохраняемые операциями конечного поля. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 4 (2017), 54–58.

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
e-mail: yashunsky@keldysh.ru

K. Aghigh (Tehran, Iran)

On quasifields and semifields

The investigations of problems of construction and classification of quasifields from 1960 (Kleinfeld E., 1960; Knuth D.E.,1963) usually use computer calculations. The development to 2007 is reflected by N.L. Johnson, V. Jha, M. Biliotti. In 2014, V.M. Levchuk, S.V. Panov, P.K. Shtukkert gave the structure of finite quasifields. In this paper we discuss on finite quasifields and semifields.

Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
e-mail: aghigh@kntu.ac.ir

D. V. Artamonov (Moscow)

A problem of restriction $g_n \downarrow g_{n-1}$ for Lie algebras of series A, B, C, D.

In the book [1] Zhelobenko used realizations of a representation of a simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ in the space of all functions on a corresponding Lie group and in the space of functions on a subgroup of unipotent upper-triangular matrices. In [1] conditions that define a representation of a given highest weight in these realization are presented. These realization are very convenient for an investigation of restriction problems. A problem of a restriction $\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{k}$, where $\mathfrak{g}$ is a Lie algebra and $\mathfrak{k}$ is it's subalgebra is a problem of a description of $\mathfrak{k}$-highest vectors in an irreducible representation of $\mathfrak{g}$. A solution of such a problem is a key step in a construction of a Gelfand-Tsetlin type base in a representation of a Lie algebra.

Later A.I. Molev (see [2]) obtained a solution of a problem of construction of a Gelfand-Tsetlin type base for a finite dimensional representation of a Lie algebra $g_n = \mathfrak{o}_{2n+1}$, $\mathfrak{sp}_{2n}$ or $\mathfrak{o}_{2n}$. Molev gave a construction of base vectors and obtained formulas for the action of generators of the algebra in this base. But he used another technique. To obtain a solution of the problem $g_n \downarrow g_{n-1}$ an action of a Yangian on the space of g_{n-1}-highest vectors with a fixed highest weight was constructed. For all series of algebras Gelfand-Tsetlin type tableaux constructed by Molev have the following property. There right part has a structure that depends on a series of the algebra. But as n increases a tableau grows to the left and the structure of the extension of the tableau does not depend on the type of the algebra.

This fact is a starting point of the present talk. The main result is a new construction of a solution of the problem $g_n \downarrow g_{n-1}$ establishing a relation between solutions for different series. More precise we give a procedure of a construction of a Gelfand-Tsetlin type base in space of g_{n-1}-highest vectors.

Firstly separately for the series A, B, C, D it is done for $n = 2$, and then for all these series simultaneously we describe a passage from the problem $g_2 \downarrow g_1$ to $g_n \downarrow g_{n-1}$. This procedure is interpreted as an extension of a Gelfand-Tsetlin tableau to the left. We call this procedure an extension of a problem of restriction $g_n \downarrow g_{n-1} \supset g_2 \downarrow g_1$.

References. [1] D. P. Zhelobenko, Compact Lie groups and their representations. – American Mathematical Soc., 1973. [2] A. Molev. Yangians and classical Lie algebras, 2007, AMS, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 143.

M.V. Lomonosov Moscow State University

The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration

e-mail: artamonov.dmitri@gmail.com

D. S. Bazhenov, **A. L. Kanunnikov** (Moscow)

Graded rings with finiteness conditions

Let $R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma$ be an associative ring graded by a group G, $S(R)$ a set of its homogenous regular elements, $Q^{gr}_{cl}(R) = RS(R)^{-1}$, $Q^{gr}(R)$ its classical and complete right graded quotient rings (Q^{gr}_{cl} exists iff Ore conditions hold for homogeneous elements). A ring R is called *right graded Goldie ring* if it satisfies the ascending chain condition for graded right annihilators and does not contain infinite direct sums of graded right ideals. Other standard graded analogs will be denoted with the prefix gr-. Standard graded versions of Goldie's theorems are true only under additional restrictions for the group or the ring. The counterexamples were constructed for gr-semiprime rings (C. Năstăsescu, F. van Oystæyen, 1979), and then for gr-prime rings too (D. Bazhenov [2], 2017). In [1] it was proved that a ring $Q^{gr}(R)$ is gr-semisimple for any gr-semiprime graded right Goldie ring R but the equality $Q^{gr}(R) = Q^{gr}_{cl}(R)$ can be incorrect in contrast with the ungraded case.

Theorem 1 ([3]). (1) $Q^{gr}_{cl}(R) = Q^{gr}(R)$ for any G-graded gr-semiprime ring R iff the group G is periodic.

(2) $Q^{gr}_{cl}(R) = Q^{gr}(R)$ for any G-graded gr-prime ring R iff

$$\forall g, h \in G \; \exists n \in \mathbb{N} \; gh^n = h^n g. \qquad (*)$$

We notice that the class of groups satisfying condition (*) strongly includes the class of groups with a periodic factor by the center.

Let $P^{gr}(R) = \ln^{gr} R$ be lower graded nilradical of R i.e. the intersection of all the gr-prime ideals of R, $\overline{R} = R/P^{gr}(R)$. We say that a ring R satisfies *the graded regularity condition* if $\forall c$ $(\overline{c} \in S(\overline{R}) \Rightarrow c \in S(R))$, and *the complete graded regularity condition* if $\forall c$ $(\overline{c} \in S(\overline{R}) \Leftrightarrow c \in S(R))$. Let R be a right graded Goldie ring and $T_k^{gr}(R) = P^{gr}(R) \cap l_R\left(P^{gr}(R)^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Then R is called *right T-gr-Goldie ring* if R/T_k^{gr} is a right graded Goldie ring for all $k \in \mathbb{N}$.

The following result is a graded analogue of Small's theorem.

Theorem 2 (D. Bazhenov). If G is periodic group then the following conditions on G-graded ring R are equivalent:

(1) $Q_{cl}^{gr}(R) = Q^{gr}(R)$ is a right gr-Artinian ring;

(2) R is a non-nilpotent right T-gr-Goldie ring satisfying graded regularity condition;

(3) R is a non-nilpotent right T-gr-Goldie ring satisfying complete graded regularity condition.

The specifity of graded rings is essential in the proof of the implication (2) $\Rightarrow$ (1) in which the graded version of Goldie's theorem is used. The implication (1) $\Rightarrow$ (3) is proved similarly to the ungraded case, and the implication (3) $\Rightarrow$ (2) is obvious.

References. [1] A. L. Kanunnikov. Graded versions of Goldie's theorem. Moscow University Mathematics Bulletin. 2011, No. volume 66, issue 3, p. 119–122. [2] D. S. Bazhenov, Graded prime Goldie rings, 2017, Moscow University Mathematics Bulletin, No. 2, p. 70–72. [3] A. L. Kanunnikov. Criteria for Goldie's theorems to be true for group graded rings. Algebra and logic. 2018 (in print). [4] Y. N. Maltsev, E. V. Zhuravlev. Lectures on associative rings theory. // Barnaul, 2014.

e-mail: trongsund@yandex.ru

e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

V. A. Bovdi (Al-Ain, UAE), **O. Yu. Dashkova** (Sevastopol), **M. A. Salim** (Al-Ain, UAE)

On the subgroups of a finitary linear group with some finiteness conditions

Let K be an associate ring with unity and let ν be a linearly ordered set with an order $\leq$. Let $A = (m_{ij}(A))$ be a matrix of degree ν over the ring K in which $1 \leq i, j$ and $i, j \in \nu$. Consider all possible subsets $\nu' \subseteq \nu$

such that outside $\nu' \times \nu'$ the matrix A coincides with the identity matrix. The intersection of all sets ν' with the given property itself has this property and therefore it is the smallest set with such property which is called the support of matrix A and denoted by $supp(A)$. Matrices with finite supports are called the *finitary* matrices. Finitary matrices are multiplied by the natural way $m_{ij}(AB) = \sum_k m_{ik}(A)m_{kj}(B)$ where the sum on the right side contains only a finite numbers of nonzero element. It is obviously that $supp(AB) \subseteq supp(A) \cup supp(B)$. For all invertible matrixes A we have $supp(A^{-1}) = supp(A)$. Hence the set $FL_\nu(K)$ of all invertible finitary matrices of degree ν over K forms a group under multiplication, which is called a *finitary linear group* of degree ν over K.

The subgroup $UT_\nu(K)$ of $FL_\nu(K)$ consisting all $A \in FL_\nu(K)$ with the additional unitriangularity condition that $m_{ij}(A) = \delta_{ij}$ for $i \geq j$ is called the *finitary unitriangular group*. Finitary linear groups of degree ν over a ring K was introduced by Yu.I. Merzlyakov in [1] and in the same paper was established that $UT_\nu(K)$ does not satisfy the normalizer condition for any ring K with unity and for any infinite linearly ordered set ν.

The investigation of $FL_\nu(K)$ was started in [2] and actively continued in [1, 3-6].

In this paper we continue to study the finitary linear group. The main results of this paper are the theorems.

Theorem 1. If K is an integral domain or a commutative Noetherian ring and G is a finitely generated subgroup of $FL_\nu(K)$ with the maximal condition on its subgroups then either G is a polycyclic-by-finite group or G contains a non-cyclic free subgroup.

Theorem 2. Let K be either an integral domain or a commutative Noetherian ring. Each subgroup of $FL_\nu(K)$ with the minimal condition on its subgroups is locally finite.

References. [1] Yu. I. Merzlyakov. Equisubgroups of unitriangular groups: a criterion for self-normalizability. Dokl. Akad. Nauk, 339 (1994), 732-735. [2] V. M. Levchuk. Some locally nilpotent rings and their associated groups. Mat. Zametki. 42 (1987), 631-641. [3] V. M. Levchuk, O. V. Radchenko. Derivations of the locally nilpotent matrix rings. J. Algebra Appl. 9 (2010), 717-724. [4] F. Kuzucuoglu and F. V. M. Levchuk. Jordan isomorphisms of radical finitary matrix rings. J. Algebra Appl. 9 (2010), 659-667. [5] F. Kuzucuoglu and F. V. M. Levchuk. Isomorphisms of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings. Acta Appl. Math. 82 (2004), 169–181. [6] O. Yu. Dashkova, M. A. Salim, O. A. Shpyrko. On the structure of a finitary linear group.

Proceedings of the Institute of mathematics and mechanics UrB RAS. 23 (2017), 98-104.

The Branch of Moscow State University in Sevastopol
UAE University, Al-Ain, UAE

e-mail: odashkova@yandex.ru

A. D. Bruno (Moscow)

New generalization of continued fraction, giving the best Diophantine approximations and fundamental units of the number rings

Let in the real n-dimensional space $\mathbb{R}^n = \{X\}$ be given m real homogeneous forms $f_i(X)$, $i = 1, \ldots, m$, $2 \leqslant m \leqslant n$. The convex hull of the set of points $G(X) = (|f_1(X)|, \ldots, |f_m(X)|) \in \mathbb{R}^m_+$ for integer $X \in \mathbb{Z}^n$ in many cases is a convex polyhedral set. Its boundary for $||X|| <$ const can be computed by means of the standard program. Boundary points X, for which $G(X)$ are lying on the boundary, correspond to the best Diophantine approximations X for the given forms. Their computation gives the global generalization of the continued fraction. For $n = 3$ Euler, Jacobi, Dirichlet, Hermite, Poincaré, Hurwitz, Klein, Minkowski, Brun, Arnold and a lot of others tried to generalize the continued fraction, but without a success.

Let $p(\xi)$ be an integer real irreducible in $\mathbb{Q}$ polynomial of the order n and λ be its root. The set of fundamental units of the ring $\mathbb{Z}[\lambda]$ can be computed using boundary points of some set of linear and quadratic forms, constructed by means of the roots of the polynomial $p(\xi)$. Up today such sets of fundamental units were computed only for $n = 2$ (using usual continued fraction) and for $n = 3$ (using the Voronoi algorithms). Each unit defines two automorphisms: (1) automorphism of boundary points in $\mathbb{R}^n$ and (2) automorphisms of their images in $\mathbb{R}^m_+$. In the logarithmic projection of $\mathbb{R}^m_+$ on $\mathbb{R}^{m-1}$ one can find the fundamental domain for the group of the automorphisms (2) [1].

Using these constructions, one can find integer solutions of Diophantine equations of a special form [2].

Our approach generalizes the continued fraction, gives the best Diophantine approximations, fundamental units of algebraic rings and solutions of some Diophantine equations for any n. Examples will be considered.

References. [1] A. D. Bruno, Computation of the best Diophantine approximations and the fundamental units of the algebraic fields, Doklady Mathematics, 93:3, 243-247 (2016) DOI: 10.1134/S1064562416030017

[2] A. D. Bruno, Calculation of fundamental units of number rings by means of the generalized continued fractions, Keldysh Institute Preprints, No. 46. Moscow (2017) (in Russian) DOI:10.20948/prepr-2017-46
http://keldysh.ru/papers/2016/prep2017_46.pdf

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

e-mail: abruno@keldysh.ru

N. G. Chebochko , **A. V. Kondrateva** , **M. I. Kuznetsov** (Nizhny Novgorod)

Generalized Hamiltonian Lie algebras in characteristic two

In 1993 L.Lin [1] constructed a new series of simple finite-dimensional Lie algebras $P(n : \mathbf{m})$ of characteristic two which can be realised on the quotient of divided polynomial algebra $A(n : \mathbf{m})$ over constants with the symmetric Poisson bracket $\{f,\ g\} = \partial_1 f \partial_1 g + \ldots + \partial_n f \partial_n g$. Later on, in [2] the symmetric Hamiltonian forms in divided powers was introduced and the symmetric Poisson bracket of L.Lin was obtained by classical Hamiltonian formalism. But only classical forms analogous to those which correspond to Hamiltonian Lie superalgebras were considered [3]-[4]. In [5] the invariant construction of the complex of symmetric differential forms in characteristic 2 was given and some program of investigation was proposed. We will use the Kostrikin-Shafarevich notation $\mathcal{O}_n(\mathcal{F})$ instead of $A(n : \mathbf{m})$(see [6]). Recall that in this notation $\mathcal{F}$ is a flag of n-dimensional vector space V. The authors have obtained all invariants of symmetric Hamiltonian differential forms with constant coefficients with respect to parabolic subgroup of $GL(V)$ corresponding to flag $\mathcal{F}$. In particular, it was shown that there exists a basis of V coordinated with flag $\mathcal{F}$ such that a symmetric Hamiltonian form has a matrix $diag(M_0, \ldots, M_0,\ M_1, \ldots, M_1,\ E_s)$ where

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

It was proved that simple Lie algebras $P(\mathcal{F}, \omega_i)$, $i = 1,\ 2$ corresponding to symmetric Hamiltonian forms ω_i with constant coefficients in case when all variables have the hight greater then 1, are isomorphic if and only if ω_i have the same invariants. Note that invariants of skew-symmetric forms were found in [7]. The case when the hight of variables may be equal to 1 is more complicated. In [8] were found isomorphisms between known simple 14-dimensional Lie algebras of characteristic 2. In particular, an isomorphism between $P(4 : \mathbf{1})$ and Hamiltonian Lie algebra $H(4,\ \mathbf{1},\ \omega)$ was constructed.

The investigation was supported by Russian Foundation of Basic Research grant 18-01-00900/a.

References. [1] L. Lin, Non-alternating Hamiltonian algebra P(n, m) of characteristic 2. Comm. Alg., 21 (1993), 399-411. [2] S. Bouarrouj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, Divided power (co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan Matrix. Homology, Homotopy Appl., 12(1) (2010), 237-248. [3] S. Bouarroudj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, I. Shchepochkina, New simple Lie algebras in characteristic 2. Math. Research Notices, 2015 (2009), 1-16. [4] U. Yier, D. Leites, M. Messaoudene, I. Shchepochkina, Examples of simple vectorial Lie algebras in characteristic 2. J. Nonlin. Math. Phys., 17, Suppl. 1. (2010), 311-374. [5] M. I. Kuznetsov, A. V. Kondrateva, N. G. Chebochko, On Hamiltonian Lie algebras of characteristic 2. Matem. J. (NAS of Kazakhstan), 16(2) (2016), 54-65. (Russian). [6] A. I. Kostrikin, I. R Shafarevich, Graded Lie algebras of finite characteristic. Izv. AN SSSR. Ser. Matem., 33(2) (1969), 251-322. (Russian). [7] S. Skryabin, Classification of Hamiltonian forms over divided power algebras. Matem. Sb., 181(1)(1990), 114-133. (Russian). [8] M. I. Kuznetsov, A. V. Kondrateva, N. G. Chebochko, Simple 14-dimensional Lie algebras in characteristic 2. Zapiski Nauch. Sem. POMI., 460 (2017), 158-167. (Russian).

Higher School of Economics
Nizhny Novgorod State University
Nizny Novgorod State University

e-mail: chebochko@mail.ru
alisakondr@mail.ru
kuznets-1349@yandex.ru

E. Yu. Daniyarova (Omsk)

Universal Geometrical Equivalence

This talk directly adjoins and picks up the talk of V. N. Remeslennikov “What is the universal algebraic geometry?” and is based primarily on the monograph [1].

The concept of geometrical equivalence of the algebraic structures $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ of one language $\mathtt{L}$ was proposed by B. I. Plotkin [2] as a formalization of the answer to the following question: when two algebraic structures $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ have the same algebraic geometries? Algebraic structures $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are called *geometrically equivalent* if for any set of variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ and any system of equations S of $\mathtt{L}$ with variables in X the sets of corollaries of the system S over $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ coincide, that is, $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$. The question about the relation between geometrical equivalence and quasi-equational equivalence is known as the Plotkin problem. The theme of geometrical equivalence in general and the Plotkin problem in particular for various classical varieties of algebras turned out to be quite popular, becoming the content of a large number of scientific articles.

The idea is in itself that when studying the algebraic geometry of a given algebraic structure $\mathcal{A}$ we can, if necessary, go over to its geometric copies, is certainly interesting and useful. However, it turns out that with more in-depth studies in a given algebraic structure $\mathcal{A}$, not all results are carried over to its geometric counterparts. For this reason, we introduced the notion of universal geometrical equivalence, which is a strengthening of the notion of geometrical equivalence, formalizing an even larger algebraic-geometric relationship of the algebraic structures $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$. That way the geometrically equivalent algebraic structures $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are called *universally geometrically equivalent* if any system of equations S defines an irreducible algebraic set over $\mathcal{A}$ if and only if it defines an irreducible algebraic set over $\mathcal{B}$.

A long list of criteria for the universal geometrical equivalence of algebraic structures has been compiled in the monograph [1] and each one can be especially useful in individual cases. It is proved that for equationally Noetherian algebraic structures the universal geometrical equivalence coincides with the universal equivalence (in the sense of the equality of universal theories). In an arbitrary Diophantine case (if all the elements of the algebraic structure $\mathcal{A}$ can act as the coefficients of the equations) we can solve the problem of classifying irreducible coordinate algebras over $\mathcal{A}$ by means of universal geometrical equivalence: a finitely generated algebraic structure $\mathcal{C}$ in the language $\mathtt{L}$ is the coordinate algebra of an irreducible algebraic set over $\mathcal{A}$ if and only if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{C}$ are universally geometrically equivalent.

We distinguish several special classes when constructing the general theory of universal algebraic geometry, namely, the class of equationally Noetherian algebraic structures, the class of equational domains, the class of equational co-domains, the classes of q_ω- and u_ω-compact algebraic structures, etc. All these classes are invariant under universal geometrical equivalence. This means that for any algebraic structures $\mathcal{A}$ from a special class, all its universally geometrically equivalent copies belong to the same class. It should be noted that for ordinary geometrical equivalence such a result is false for most special classes.

In classical algebraic geometry over a field, there is no difference between geometrical and universal geometrical equivalences. It is not surprising that this fact is also true for any algebraic structures from the class of equational domains (and, similarly, co-domains). It is interesting to note here that the classes of equational domains and co-domains themselves, being invariant under universal geometrical equivalence, are not invariant with respect to geometrical equivalence.

In general, it is possible to set several tasks for comparing the following equivalences with each other: geometrical, quasi-equational, universal geometrical, universal. By this way we get some sort of generalizations over the Plotkin problem, that are formulated both for arbitrary algebraic structures, and for special algebraic-geometric classes or for classical varieties. A detailed survey of the solutions of these problems is given in the monograph [1]. In this talk, we will consider how the equivalences that appear above are arranged in the variety of Abelian groups.

References. [1] E. Yu. Daniyarova, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov. Algebraic geometry over algebraic structures. Novosibirsk: Publ. SB RAS, 2016, 243 p. (in Russian). [2] B. Plotkin. Algebras with the same (algebraic) geometry. Proc. Steklov Inst. Math., 242 (2003), 165–196.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

e-mail: evelina.omsk@list.ru

A. Dosi (Northern Cyprus)

A multi-operator functional calculus on schemes

In the present talk we discuss a scheme-theoretic version of holomorphic multi-operator functional calculus. A functional calculus with sections of a quasi-coherent sheaf on a noetherian scheme is constructed, and we prove analogs of the known results from multivariable holomorphic functional calculus over Fréchet modules. A spectrum of an algebraic variety over an algebraically closed field is considered. This concept reflects Taylor joint spectrum from operator theory. Every algebraic variety turns out to be a joint spectrum of the coordinate multiplication operators over its coordinate ring.

G. P. Egorychev, **S. G. Kolesnikov**, **V. M. Leontiev** (Krasnoyarsk, Russia)

Two collection formulas

In 1932 P. Hall obtained the formula, which expresses the product $(xy)^n$ in terms of x^n, y^n and commutators of x and y. Namely, let G be a group, $x, y \in G$, and let $R_1 = x, R_2 = y, R_3, \ldots$ be complex commutators of x, y, arranged in order of increasing weights (the order among the commutators of the same weight is arbitrary). Then there exists a series of integer-valued polynomials $f_1(n)$, $f_2(n), \ldots$, vanishing for $n = 0$, such that

$$(xy)^n = R_1^{f_1(n)} R_2^{f_2(n)} \ldots R_i^{f_i(n)} \ldots, \tag{1}$$

$f_1(n) = f_2(n) = n$, and the degree of $f_i(n)$ does not depend on n.

It is a difficult problem to find an explicit form of the polynomial $f_i(n)$ in general case. Suppose $[y, {}_0x] = y$ and $[y, {}_ix] = [[y, {}_{i-1}x], x]$ for $i > 0$. In a number of investigations, devoted to different issues, expressions for exponents of some commutators from (1) were found. Thus, it was noted in [2,p. 326] that the formula (1) includes the commutator $[y, {}_ix]$ to the power of the binomial coefficient $\binom{n}{i+1}$. In the article [3], devoted to the investigation of Burnside problem for exponent 8, it was shown that the expressions

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{i}\binom{k}{j}; \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{j} \left[\binom{k}{2}\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1}\right];$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} k \left[2\binom{k}{2} + (k+2)\binom{k}{3}\right]$$

are the exponents of the commutators $[y, {}_ix, {}_jy]$ ($i \geqslant 1$, $j \geqslant 0$); $[[y, {}_ix, {}_jy], [y, x]]$ ($i \geqslant 2$, $j = 0$ or $i, j \geqslant 1$); $[[y, x, y], [y, x, x]]$, respectively, from (1). On the other hand, it is possible to get an explicit form of the right-hand side of (1), imposing reasonable restrictions on the group G. It is well known that if $[y, x] \in Z(\langle x, y\rangle)$, then $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$ for any $n \in \mathbb{N}$; if the subgroup $\langle y, \langle x, y\rangle'\rangle$ is abelian, then

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}} [y, {}_2x]^{\binom{n}{3}} \ldots [y, {}_{n-1}x]^{\binom{n}{n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Making the restrictions in (2) weaker, A.I. Skopin got the following result in [4]. If G is a group, $x \in G$, $y \in G'$ and $[G', G', G'] = 1$, then

$$(xy)^n = x^n y^n \left(\prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_ix]^{\binom{n}{i+1}}\right) \prod_{i=0}^{n-2} \prod_{j=i+1}^{n-1} [[y, {}_ix], [y, {}_jx]^{c_{ij}^n},$$

where the powers c_{ij}^n are determined by recurrence relations. Here and below all the sums and products are respectively 0 and 1 if the upper index is less than the lower.

In this paper we introduce two collection formulas. The first one (theorem 1) is a result of collecting the product $(xy)^n$ in the following order: $(xy)^2$, $(xy)^2(xy)$, $((xy)^2(xy))(xy),\ldots$, with such restriction that any commutator is equal to 1 if it includes more than two y's. The second formula (theorem 2) is obtained as a result of counting the number of commutators in traditional collecting process (when commutators are collected in order of increasing weights). In the final theorem, we give the combinatorial identities, which simplify the expressions for exponents, and their generalizations. We also investigated the problem of divisibility of the arisen sums.

Theorem 1. Suppose G is a group, $x, y \in G$, any commutator of x and y equals 1 if it includes more than two y's. Then for any natural $n \geqslant 1$ we have

$$(xy)^n = x^n y^n \left(\prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_i x]^{\binom{n}{i+1}}\right) \left(\prod_{i=0}^{n-2} [y, x, y, {}_i x]^{\binom{n}{i+3}+\binom{n+1}{i+3}}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{i>1, j\geqslant 0}^{i+j<n} [y, {}_i x, y, {}_j x]^{\binom{n+1}{i+j+2}}\right) \prod_{i>0, k\geqslant 0} [\,[y, {}_{i+1}x], [y, {}_i x], {}_k x]^{\mu_n(i,k)},$$

where $\alpha_s(i) = \binom{s}{i+1}$, $\mu_n(i, 0) = \sum_{s=1}^{n-1} \binom{\alpha_s(i)}{2}$,

$$\mu_n(i,k) = \sum_{s_k=1}^{n-k-1} \sum_{s_{k-1}=1}^{s_k} \ldots \sum_{s_1=1}^{s_2} \sum_{s=1}^{s_1} \binom{\alpha_s(i)}{2}, \ k \geqslant 1.$$

Theorem 2. Suppose G is a group and $x, y \in G$; H is a normal clouser of the subgroup, generated by all commutators of x, y that includes more than two y's. Then for any natural $n \geqslant 1$ we have

$$(xy)^n = x^n y^n \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_i x]^{\binom{n}{i+1}}\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_i x, y]^{n\binom{n}{i+1}-\binom{n+1}{i+2}}\right) \times$$

$$\prod_{j=1}^{n-2} \prod_{i=j+1}^{n-1} [[y, {}_i x], [y, {}_j x]]^{f_n(i,j)} (\mathrm{mod}\, H),$$

where

$$f_n(i,j) = \sum_{k=1}^{j} \sum_{m=j-k}^{n-1} \binom{n-m-1}{k} \binom{m}{i-k+1} \binom{m}{j-k} +$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=k+1}^{n-1} \binom{k}{j} \binom{m}{i}.$$

Theorem 3. Let $r, m, n, i \in \mathbb{N}$, $s_1(m, r)$ be the Stirling numbers of the second kind, and $m, n > 1$. The following identeties hold:

$$\mu_n(i,k) = \frac{1}{2}\left[\binom{n}{i+k+2} - \sum_{s=0}^{n-k-i-2}\binom{n-i-s-2}{l}\binom{i+s+1}{i+1}^2\right],$$

$$\sum_{s_{r-1}=1}^{n}\sum_{s_{r-2}=1}^{s_{r-1}}\cdots\sum_{s_1=1}^{s_2}\sum_{s_0=1}^{s_1}\binom{s_0}{i+1}^m = \sum_{s=0}^{n-i-1}\binom{r+n-i-s-2}{r-1}\binom{i+s+1}{s}^m,$$

$$\sum_{s_{r-1}=1}^{n}\cdots\sum_{s_0=1}^{s_1}\binom{\alpha_{s_0}(i)}{m} = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-i-1}s_1(m,j)\binom{r+n-i-s-2}{r-1}\binom{i+s+1}{s}^j.$$

This research is partially supported by RFBR according to the grant No. 16-01-00707.

References. [1] P. Hall. A cotribution to the theory of groups of prime-power order. Proc. London Math. Soc., 36(1932), в„– 1, 29–95. [2] M. Jr. Hall. The theory of group. Macmillian. New York. 1959. [3] E. F. Krause. On the collection process. Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 497–504. [4] A. I. Skopin. Jacobi identity and P. Hall's collection formula in two types of transmetabelian groups. Zapiski Nauch. Sem. LOMI, 175 (1989), 106–112.

Siberian Federal University

e-mail: sklsnkv@mail.ru

Wenbin Guo

Recent some progress on finite groups

In this talk, we will introduce some recent developments of the theory of finite groups, which include: 1) F-hypercenter and its generalizations; 2) The theory of quasi-F-groups; 3) The generalization of Schur-Zassenhaus theorem, Hall theorem and Chunihin theorem; 4) The confirmation for Wielandt's conjecture; 5) The answer to an open problem of Wielandt; 6) A generalized Thompson conjecture.

University of Science and Technology of China

e-mail: wbguo@ustc.edu.cn

Maria Gerasimova (Germany), **Dominik Gruber** (Switzerland), **Nicolas Monod** (Switzerland), **Andreas Thom** (Germany)

Asymptotics of Cheeger constants and unitarisability of groups

Let Γ be a discrete group. A linear representation π of a group Γ on a Hilbert space is called **unitarisable** if π is conjugated to a unitary representation by a bounded operator. This implies that π is uniformly bounded, that is, $\sup_{g\in\Gamma} \|\pi(g)\|$ is finite. It was shown soon that **amenable groups are unitarisable**. It has been open ever since whether this characterises the unitarisability of a group.

Dixmier: Are all unitarisable groups amenable?

The first example of a non-unitarisable group was found by Ehrenpreis–Mautner, who showed in 1951 that $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ is not unitarisable. In the 1980s, simple and explicit constructions of non-unitarisable representations of free groups were provided. Since unitarisability passes to subgroups, Dixmier's question thus concerns non-amenable groups without free subgroups.

One of the approaches to study unitarisability is related to the space of all functions $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ admitting a decomposition

$$f(x^{-1}y) = f_1(x,y) + f_2(x,y) \qquad \forall x, y \in \Gamma$$

with $f_i\colon \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{C}$ such that both of the following are finite:

$$\sup_x \sum_y |f_1(x,y)| \quad \text{and} \quad \sup_y \sum_x |f_2(x,y)|.$$

The connection is as follows. First, Γ is amenable if and only if $T_1(\Gamma) \subseteq \ell^1(\Gamma)$. Secondly, if Γ is unitarisable, then $T_1(\Gamma) \subseteq \ell^2(\Gamma)$. Thirdly, if Γ contains a non-abelian free subgroup, then $T_1(\Gamma) \nsubseteq \ell^p(\Gamma)$ for all $p < \infty$. These results prompted us to define the **Littlewood exponent** $Lit(\Gamma) \in [0,\infty]$ of a group Γ as follows:

$$Lit(\Gamma) = \inf\left\{p : T_1(\Gamma) \subseteq \ell^p(\Gamma)\right\}.$$

It is straightforward that $Lit(\Gamma) = 0$ characterises finite groups and that amenable groups satisfy $Lit(\Gamma) \leq 1$. Our first result is the converse of the latter statement:

Theorem 1. For every non-amenable group Γ there exists $p > 1$ such that

$$T_1(\Gamma) \not\subseteq \ell^p(\Gamma).$$

The situation can therefore be summarised as follows (taking into account a further connection that we shall establish with the rapid decay property of Jolissaint).

Corollary 1.

- $Lit(\Gamma) = 0$ if and only if Γ is finite.
- $Lit(\Gamma) = 1$ if and only if Γ is infinite amenable.
- $Lit(\Gamma) \leq 2$ if Γ is unitarisable.
- $Lit(\Gamma)$ is outside the interval $(1, 2)$ if Γ has the rapid decay property.
- $Lit(\Gamma) = \infty$ if Γ contains a non-abelian free subgroup.

A major question is to exhibit groups with $1 < Lit(\Gamma) < \infty$, and particularly with $1 < Lit(\Gamma) \leq 2$. Using groups constructed by D. Osin, we know that the last item is not a characterisation.

Theorem 2. There exist finitely generated torsion groups Γ with $Lit(\Gamma) = \infty$.

Our next result relates $Lit(\Gamma)$ to the asymptotics of isoperimetric quantities attached to Γ as follows. Recall that the **Cheeger constant** $h(\Gamma, S)$ is defined by

$$h(\Gamma, S) = \inf_F \frac{|\partial_S(F)|}{|F|},$$

where the infimum runs over all non-empty finite subsets $F \subset \Gamma$. Define the **relative maximal average degree** $e(\Gamma, S)$ by

$$e(\Gamma, S) = 1 - \frac{h(\Gamma, S)}{|S|}.$$

Finally, our asymptotic invariant is

$$\eta(\Gamma) = -\liminf_{S} \frac{\ln e(\Gamma, S)}{\ln |S|},$$

where the limes inferior is taken over all symmetric finite subsets S of Γ. Our main result is the following

Theorem 3. For any group Γ we have $\eta(\Gamma) = 1 - \frac{1}{Lit(\Gamma)}$.

The following result — a consequence of graphical small cancellation theory for hyperbolic groups — shows that the invariant is indeed non-trivial in the sense that there exist groups with $Lit \notin \{0, 1, \infty\}$.

Theorem 4 There exists a group Λ with $1 < Lit(\Lambda) < \infty$.

Using the connection between the spectral radius and the Littlewood exponent together with Adyan's results, we can then estimate $Lit(\Gamma)$ for Burnside groups of large exponent.

Theorem 5 Let $B(m, p)$ be a free Burnside group on m generators, where $m \geq 2$, $p \geq 665$ and p is odd. Then $Lit(B(m, p)) \geq 3/2$.

References. [1] M. Gerasimova, D. Gruber, N. Monod, A. Thom, Asymptotics of Cheeger constants and unitarisability of groups, https://arxiv.org/pdf/1801.09600.pdf. [2] D. V. Osin L^2-Betti numbers and non-unitarizable groups without free subgroups, International Mathematics Research Notices,(2009), 22, 4220–4231 [3] S. I. Adyan, Random walks on free periodic groups, Mathematics of the USSR-Izvestiya (21), 3, 425

TU Dresden, ETH Zurich, EPFL

e-mail: mari9gerasimova@mail.ru

N. D. Hodyunya (Krasnoyarsk)

Enumerations of ideals in niltriangular subalgebra of Chevalley algebra

The subalgebra $N\Phi(K)$ of Chevalley algebra L_K over field K [1; § 4.2] with the basis $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ is called *niltriangular*. An algebra $A = (A, +, \cdot)$ (possibly, non-associative) is called *an enveloping algebra* of a Lie algebra L if L is isomorphic to the algebra $A^{(-)} := (A, +, [\ ,\ ])$, $[a, b] := ab - ba$. The well-known enveloping algebra R of Lie algebra $N\Phi(K)$ [3; Proposition 1] has also base $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ and its choice depends on signs of structural constants of Chevalley basis.

Let Φ be a root system associated with a Chevalley algebra L_K. We distinguish the following ideals in a Lie algebra $N\Phi(K)$ putting on

$r \leq s \ \ (r, s \in \Phi^+)$ if $s - r$ is a linear combination of simple roots with nonnegative coefficients:

$$T(r) := \sum_{r \leq s} K e_s, \qquad Q(r) := \sum_{r < s} K e_s.$$

Roots r and s are called *incident* ones if $s \leq r$ or $r \leq s$. Any set $\mathcal{L}$ of pairwise non-incident roots in Φ^+ is called *a set of corners in* Φ^+. If $H \subseteq \sum_{r \in \mathcal{L}} T(r)$ and the inclusion fails under every substitution of $T(r)$ by $Q(r)$, then $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ is said to be *a set of corners in* H. An ideal H of a Lie ring $N\Phi(K)$ is said to be *standard* if $\sum_{r \in \mathcal{L}(H)} Q(r) \subset H$. An enveloping algebra R of Lie algebra $N\Phi(K)$ is called *standard* if all ideals in R are standard. V. M. Levchuk and the author are finding all standard enveloping algebras R; for Lie type D_n $(n \geq 4)$ and E_n $(n = 6, 7, 8)$ it doesn't exist and for Lie type F_4 the existence of standard enveloping algebra R had been shown in [4].

The algebra $NT(n, K)$ of niltriangular $n \times n$ matrices over field K represents an associative standard enveloping algebra R for Lie algebra $N\Phi(K)$ of type A_{n-1}. Denote by $NT'(n, K)$ an algebra obtained from algebra $NT(n, K)$ by replacing the relations $e_{nj}e_{j1} = e_{n1}$ and $e_{j1}e_{nj} = 0$ with the new relations $e_{nj}e_{j1} = 0, \ e_{j1}e_{nj} = e_{n1}$ $(j = 2, 3, ..., n-1)$.

Theorem 1. Any standard enveloping algebra R of Lie algebra $N\Phi(K)$ of type A_{n-1} $(n > 3)$ is isomorphic either to $NT(n, K)$ or to $NT'(n, K)$.

In connection with Problem 2 in [2] of enumeration of all ideals for Lie algebra $N\Phi(q) := N\Phi(GF(q))$ of classical Lie types the so-called canonical bases of Lie ideals in $NT(n, K)$ had been considered in [5; § 4].

Similar bases of subalgebras in Lie alberas $N\Phi(K)$ are distinguished in

Lemma 1. Let H be a nonzero subalgebra of a Lie algebra $N\Phi(K)$ over field K and $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$. Then any base of the intersection $Q(\mathcal{L}) \cap H$ can be extended to a base of H by the elements

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_{r_j} + \alpha'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, t, \quad t = \dim_K \ H/H \cap Q(\mathcal{L}),$$

where $||a_{ij}||$ is $t \times m$-matrix of rank t over K $(t \leq m)$ and $\alpha'_i \in Q(\mathcal{L})$. Moreover, with a fixed ordering of $\mathcal{L}$ for uniquely determined numbers $j_1 = 1 < j_2 < \cdots < j_t \leq m$ it can be assumed that

$$a_{i,j_i} = 1 \ (1 \leq i \leq t), \quad a_{ik} = 0 \ (k < j_i), \quad a_{i,j_k} = 0, \ 1 \leq i < k \leq t.$$

The fixed choice of signs of structural constants N_{rs} of Chevalley basis for classical types in [6] uniquely determines the enveloping algebra R_Φ of Lie algebra $N\Phi(K)$. Lemma 1 admits to distinguish canonical bases of nonstandard ideals in algebra R_Φ of type D_n $(n \geq 4)$ [3; § 4] and to find the combinatorial expression of their number.

The following problem has arisen as Problem 1 for classical Lie types in [2]:

(A) *Find the number of standard ideals of Lie algebra $N\Phi(q)$.*

Problem 1 from [2] had been solved by the theorem of G. P. Egorychev, V. M. Levchuk and the author and the solution had been announced in [3]. For exceptional Lie types Problem **(A)** had been solved in [4].

The author was supported by RFBR (project no. 16-01-007-07).

References. [1] R. Carter. Simple Groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972. [2] G. P. Egorychev, V. M. Levchuk. Enumeration in the Chevalley algebras. ACM SIGSAM Bulletin, 35 (2001), No. 2, p. 20–34. [3] V. M. Levchuk. Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: the enveloping algebra, ideals and automorphisms. Dokl. Math. (97) 2018, No. 1, 23–27. [4] N.D. Hodyunya. Enumerations of ideals in niltriangular subalgebra of Chevalley algebras. J. SFU Math. and Phys., 11 (2018), No. 3. [5] V. M. Levchuk, A. V. Litavrin, N. D. Hodyunya, V. V. Tsigankov. Niltriangular subalgebras of Chevalley algebras and their generalizations. Vladikavkazskii Math. J., (17) 2015, No. 2, 37–46 (in Russian). [6] V. M. Levchuk. Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups. Algebra and Logic, (29) 1990, No. 3, 211–224.

Siberian Federal University

e-mail: nkhodyunya@gmail.com

S. N. Il'in (Kasan)

On injective envelopes of semimodules and additively regular semirings

It is well-known that every module over a ring possesses an injective envelope. The statement does not hold for semimodules over semirings in general, however, as was shown by Katsov in [1, Corollary 12], it is true for semimodules over additively regular semirings. Quite recently in [2] there was proposed a conjecture that the converse statement for Katsov's result is true as well, that is, every semiring all of whose semimodules possess injective envelopes is additively regular. The following result confirms completely that conjecture; moreover, it shows the converse statement holds even for much more weak assupmtions:

Theorem 1. For a semiring S the following conditions are equivalent:

i) every right (left) S-semimodule possesses an injective envelope;

ii) every right (left) finitely generated S-semimodule possesses an injective envelope;

iii) every right (left) S-semimodule having a two-elemented set of generators possesses an injective envelope;

iv) S is additively regular.

References. [1] Y. Katsov, Tensor products and injective envelopes of semimodules over additive regular semirings // Algebra Colloq. V. 4. N 2. 1997. P. 121–131. [2] S. N. Il'in, On injective envelopes of semimodules over semirings // J. Algebra Appl. V. 15. N 7. 2016. Article ID:1650122 (13 pages).

Kasan Federal University

e-mail: Sergey.Ilyin@kpfu.ru

Jabbarov I. Sh., **Hasanova G. K.** (Ganja)

On the Fundamental Theorem of Algebra and its equivalence to the Frobenius Theorem on division Algebras

Formulation of the Fundamental Theorem of Algebra (FTA) was given by A. Girard (in 1617) as a conjecture: an algebraic equation of degree n has n complex roots. But first complete and strict proof was given by J. Argand in 1814. In 1816 C. Gauss had published a new complete proof. After of these events, which were great development of algebraic and analytic methods, The Fundamental Theorem of Algebra has been proved by many other mathematicians. Nowadays the number of known proofs of FTA is very large ([1-2]). Some of these proofs based on the properties of analytic functions. In [2] is given several proofs using projective spaces.

In [3] the fundamental theorem of algebra was established for ordered fields. In this proof essential role plays fact that the main field is infinite. In this paper we give a new proof for which this assumption wasn't made.

One of the interesting questions on this direction is a construction of algebraic proof doesn't using topological or geometric ideas. To present days none of the methods for proving FTA is purely algebraic (see [4-6]). Our proof is also algebraic in which we use, as many other proofs, fact that the algebraic equation of odd degree with real coefficients has a real root. The question is connected with the fact that the field of real numbers is a complete field with strict linear order. This is a unique argument connected with the topology of real axes. Consideration of a special construction allows us to avoid assumption on infiniteness of the field. By this reason this method can be used in the case of finite fields. Another basic argument consisted in the existence of a square root of negative real numbers in the field of complex numbers.

In the work [7] G. Frobenius had proved the theorem on division associative algebras. He proved that there exists only 3 associative division algebras over the field of real numbers. Proof of this deep result based on FTA (see [6]). There is close connection between these two results, which was not observed in the literature. In this paper we show that the Frobenius theorem on division algebras is equivalent to the Fundamental Theorem of Algebra.

Theorem 1(FTA). Every polynomial of positive degree with complex coefficients has complex roots only.

Let we are given with some field P, and V denotes an associative linear algebra over this field. If for any elements $a, b \in V$ of the algebra the equations $ax = b$ and $xa = b$ have solutions when $a \neq 0$ then this algebra is called to be *division algebra*. The dimension of the linear space V is called as a *rank* of the algebra. The field of complex numbers is a division algebra of a rank 2.

Now we recall the Frobenius theorem.

Theorem(Frobenius). There are only three associative division algebras over the field of real numbers: the fields of real and complex numbers, and the quaternion's algebra.

Theorem 2. FTA is equivalent to the Frobenius theorem.

Proof. It is best known that Frobenius Theorem is possible to deduce from FTA. To complete the proof of the theorem 2, we must prove an implication Frobenius theorem $\Rightarrow$ FTA. Assume Frobenius Theorem, i. e. there is only three associative division algebras over the field of real numbers. It is best known that for every polynomial $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ there exists a polynomial $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ such that every root of given polynomial or its conjugate is a root of $g(x)$. On other hand there exist an extension L of the field of real numbers containing all roots of the polynomial $g(x)$. It is is clear that the field L is a commutative division algebra of finite rank over the field of real numbers. By the theorem of Frobenius this algebra can be isomorphic, in consent with commutativity, to the algebras $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ only, because the quaternion's algebra is not commutative. So, all of roots of given polynomial belong to the field L being isomorphic to $\mathbb{C}$. Theorem 2 is proven.

References. [1] Derksen, Harm. The fundamental theorem of algebra and linear algebra, American Mathematical Monthly, 110 (7) (2003), 620-623. [2] Tikhomirov V. M., Uspenskii V. V. Ten proofs of the Fundamental Theorem of Algebra. Math. Prosv., 1997, issue 1, pp. 50–70. [3] Bourbaki N. Algebra. Polynomials and Fields. Ordered groups. M.: Nauka, 1965. [4] Leng S. Algebra. M.: Mir. 1968. [5] Kostrikin A. I. Introduction to the Algebra. M.: Nauka, 1977. [6] Kurosh A. G. Lectures on general algebra. M.: Nauka, 1971. [7] Frobenius G. Ueber lineare Substitutionen and bilineare Formen. J. Reine Angew. Math., **84**, (1878) pp. 1–63. [8] Nechayev V. I. Number Systems. M.: Prosveshenie, 1975.

Ganja State University

e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Olga Kharlampovich (New York, USA)

What does a group algebra of a free group "know" about the group?

We describe solutions to the problem of elementary classification in the class of group algebras of free groups. We will show that unlike free groups, two group algebras of free groups over infinite fields are elementarily equivalent if and only if the groups are isomorphic and the fields are equivalent in the weak second order logic. We will show that the set of all free bases of a free group F is 0-definable in the group algebra $K(F)$ when K is an infinite field, the set of geodesics is definable, and many geometric properties of F are definable in $K(F)$. In addition, subgroups of F are definable in $K(F)$. In contrast to this, proper non-cyclic subgroups are not definable in F (this was our solution of Malcev's problem). Therefore $K(F)$ "knows"some very important information about F. We will show that similar results hold for group algebras of limit groups.

These are joint results with Alexei Myasnikov.

Hunter College, CUNY

J. V. Kochetova (Moscow)

On radicals of associative $\mathcal{K}$-ordered algebras

Our primary interest in this paper is a description of some relationships between classical radicals of $\mathcal{K}$-ordered associative algebras. Namely, in this paper we consider properties of the prime radical, the

Baer's radical and the quasi–regular radical (the Jacobson radical) for associative algebras (see [1], chapter 1). Also, following [2], this paper goes on to consider properties of the l-prime radical and the lower weakly solvable l-radical for $\mathcal{K}$-ordered associative algebras over partially ordered fields (see [2]).

Let us recall, that an associative algebra A with the $\mathcal{K}$-order $\leqslant$ over a partially ordered field P is called a *lattice $\mathcal{K}$-ordered algebra* or an *l-algebra* if the following conditions hold:

1) A is a lattice ordered vector space over P with respect to the order $\leqslant$ (see [3], chapter 15);

2) from $a \geqslant 0$ it follows that $a \geqslant ab$ and $a \geqslant ba$ for any elements $a, b \in A$ (see [4], [5]).

The basic properties of $\mathcal{K}$-ordered algebras over ordered fields are developed in the works [2], [5], [6].

It is known (see [1], § 1.1) that the prime radical $\mathrm{rad}(A)$ of an arbitrary associative algebra A is equal to its Baer's radical $\mathfrak{B}(A)$. Moreover, $\mathrm{rad}(A)$ is equal to the set of all elements $a \in A$ such that for each m-system σ with the condition $a \in \sigma$, we obtain that σ contains zero. Recall, that a nonempty subset σ of an associative algebra A is called an *m-system* if for any $a, b \in \sigma$ there exists an element $c \in A$ such that $acb \in \sigma$ (see [1], § 1.1, Definition 5).

To study the properties of l-prime radicals, the notion of an m-system was extended from associative algebras to $\mathcal{K}$-ordered algebras over ordered fields by the author and by E.E. Shirshova in [2]. Namely, a nonempty subset σ of a lattice $\mathcal{K}$-ordered algebra A over a partially ordered field is said to be a *saturated system* if for any $a, b \in \sigma$ there exists an element $c \in I_a I_b$ such that $c \in \sigma$ (by I_a and I_b we denote the least l-ideals of A such that $a \in I_a$ and $b \in I_b$) (see [2], Definition 3.2.2).

Using the notion and properties of saturated systems to describe the structure of the l-prime radical of a lattice $\mathcal{K}$-ordered algebra A over a partially ordered field, we obtain that $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$ is equal to the set of all elements $a \in A$ such that any saturated system σ with the condition $a \in \sigma$ contains zero. It is necessary to note that this theorem is stated similarly to the theorem for prime radicals of associative algebras.

If we combine this characterization of the l-prime radical for an associative l-algebra A over a partially ordered field with the description of the prime radical of A, then we conclude that the following relationships between the l-prime radical $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$, the prime radical $\mathrm{rad}(A)$ and the quasi–regular radical $\mathfrak{J}(A)$ of A hold:

$$l - \mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A) \subseteq \mathrm{rad}(A) \subseteq \mathfrak{J}(A). \tag{1}$$

Moreover, the application of conditions (1) to a finite–dimensional linearly $\mathcal{K}$-ordered associative algebra A over a linearly ordered field yields

$$l - \mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A) = \mathrm{rad}(A) = \mathfrak{J}(A) = A. \qquad (2)$$

It is worth stressing that the properties (2) are true for any finite-dimentional nilpotent associative algebra over a linearly ordered field. Indeed, in [6] it was proved that a finite–dimensional nilpotent associative algebra is a linearly $\mathcal{K}$-orderable algebra (see [6], Corollary 1).

In [2] we investigate the generalization for the concept of a lower nilradical of associative algebras to lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras over partially ordered fields. Namely, we introduce the notion of a lower weakly solvable l-radical $\mathfrak{B}_l(A)$ of an l-algebra A. In addition, it was proved that if A is an l-algebra over a directed field then $\mathfrak{B}_l(A) = l$-$\mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A)$.

In this paper, following [1] and [2], we say that an associative algebra A is a $\mathfrak{B}$-semisimple if $\mathfrak{B}(A) = \{0\}$ and A is a $\mathfrak{B}_l$-semisimple if $\mathfrak{B}_l(A) = \{0\}$. Also, A is said to be a $\mathfrak{J}$-semisimple if $\mathfrak{J}(A) = \{0\}$.

Suppose A is an associative lattice $\mathcal{K}$-ordered algebra over a directed field. Then the property (1) shows that any $\mathfrak{B}$-semisimple associative algebra A is a $\mathfrak{B}_l$-semisimple algebra. Besides, if A is a $\mathfrak{J}$-semisimple algebra then A is a $\mathfrak{B}$-semisimple algebra and A is a $\mathfrak{B}_l$-semisimple algebra.

References. [1] V. A. Andrunakievich, Yu. M. Ryabuhin. Radicals of algebras and the structural theory. Moscow: Nauka, 1979. [2] J. V. Kochetova and E. E. Shirshova, Prime radicals of lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras. Journal of Mathematical Sciences, vol. 201, no. 4 (2014), 465–518. [3] G. Birkhoff. Lattice theory. Providence. Rhode Island. 1967. [4] V. M. Kopytov, The ordering of Lie algebras. Algebra and Logic, vol. 11, no. 3 (1972), 295–325. [5] J. V. Kochetova, On l-prime radicals of lattice ordered algebras. Journal of Mathematical Sciences, vol. 193, no. 4 (2013), 516–525. [6] J. V. Kochetova and E. E. Shirshova, On linearly ordered linear algebras. Journal of Mathematical Sciences, vol. 166, no. 6 (2010), 725–732.

Moscow Pedagogical State University

e-mail: jkochetova@mail.ru

A. Krasilnikov, **C. Pereira** (Brasília, Brasil)

On strongly Lie nilpotent associative algebras

Let F be a field. A unital associative F-algebra A is called *strongly Lie nilpotent* if there is a chain

$$A = R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_n$$

of two-sided ideals R_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ of A such that, for each k, the ideal R_{k-1}/R_k is contained in the center of A/R_k. One can check that

$$[a_1^{(1)}, \ldots, a_{\ell_1}^{(1)}]\,[a_1^{(2)}, \ldots, a_{\ell_2}^{(2)}] \ldots [a_1^{(m)}, \ldots, a_{\ell_m}^{(m)}] \in R_k \qquad (a_i^{(j)} \in A)$$

if $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_m - m \geq k$. In particular,

$$[a_1, \ldots, a_{k+1}] \in R_k \qquad \text{and} \qquad [a_1, a_2] \ldots [a_{2k-1}, a_{2k}] \in R_k \qquad (a_i \in A).$$

Let E be the infinite-dimensional Grassmann algebra over F and let E_n be the n-generated Grassmann F-algebra. Then E is not strongly Lie nilpotent but the tensor products $E_{n_1} \otimes E_{n_2} \otimes \cdots \otimes E_{n_k}$ are strongly Lie nilpotent.

Our main result is as follows.

Theorem. Let F be a field. Let A be a unital strongly Lie nilpotent associative F-algebra. Then the T-subspace $C(A)$ of the central polynomials of A is finitely generated (as a T-subspace in $F\langle x_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$).

Note that, by Shchigolev's result [1], if F is of characteristic 0 then each T-subspace in $F\langle x_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ is finitely generated. Thus, in the proof of the Theorem we may assume that the field F is of a prime characteristic $p > 0$. To prove the Theorem we use the techniques developed in [2,3].

Note also that the T-subspace $C(E)$ of the central polynomials of the infinite-dimensional Grassmann algebra E over a field F of characteristic $p > 2$ is not finitely generated [4-6].

References. [1] V. V. Shchigolev, Finite basis property of T-spaces over fields of characteristic zero. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 65 (2001), 191–224 (Russian); English translation in Izv. Math., 65 (2001), 1041–1071. [2] A. N. Krasil'nikov, On identities of triangulable matrix representations of groups, Trudy Moskov. Matem. Obshchestva 52 (1989), 229–245 (Russian). English translation: Trans. Moscow Math. Soc. 1990, 233–249 (1991). [3] A. N. Krasil'nikov, The identities of a group with nilpotent commutator subgroup are finitely based, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 54 (1990), 1181–1195 (Russian). English translation: Math. USSR – Izv., 37 (1991), 539–553. [4] C. Bekh-Ochir, S. A. Rankin, Examples of associative algebras for which the T-space of central polynomials is not finitely based. Israel J. Math. 186 (2011), 333–347. [5] A. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E. A. Silva, The central polynomials for the Grassmann algebra, Israel J. Math. 179 (2010), 127–144. [6] A. V. Grishin, On the structure of the centre of a relatively free Grassmann algebra. Usp. Mat. Nauk, 65 (2010), 191–192 (Russian). English translation in: Russ. Math. Surveys, 65 (2010), 781–782.

Universidade de Brasília
e-mail: alexeikras@gmail.com, alexei@unb.br

S. K. Kuklina (Krasnoyarsk)

On irreducible carpets of additive subgroups of type G_2

Below, Φ is a reduced indecomposable root system and $E(\Phi, K)$ is an elementary Chevalley group of type Φ over the field K. The group $E(\Phi, K)$ is generated by its root subgroups

$$x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}, \quad r \in \Phi.$$

The subgroups $x_r(K)$ are Abelian and for every $r \in \Phi$ and any $t, u \in K$ the following relations hold

$$x_r(t)\, x_r(u) = x_r(t + u).$$

By a carpet of type Φ over K we mean an arbitrary family of additive subgroups
$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ of ring K with the condition

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir + js \in \Phi,\ i, j > 0,$$

where $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, and constants $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ are defined by the Chevalley commutator formula

$$\big[x_s(u), x_r(t)\big] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-t)^i u^j\big), \quad r, s, ir + js \in \Phi.$$

Every carpet $\mathfrak{A}$ of type Φ over the ring K defines the *carpet* subgroup

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \big\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\big\rangle$$

of the Chevalley group $E(\Phi, K)$, where $\langle M\rangle$ is subgroup, generated by the subset M of the group $E(\Phi, K)$. A carpet $\mathfrak{A}$ of the type Φ over the ring K is said to be *closed*, if its carpet subgroup $E(\Phi, \mathfrak{A})$ has no new root elements, that is

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi.$$

We call a carpet $\mathfrak{A}$ *irreducible*, if all $\mathfrak{A}_r$ are nonzero.

Theorem 1. Let $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ be an irreducible carpet of type G_2 over the field K of characteristics $p > 0$. Suppose that all $\mathfrak{A}_r$ are R -

modules over the field R, where K is an algebraic extension of the field R. Then, up to conjugation by the diagonal element of $G_2(K)$

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{if } r \textit{ is a} \text{ short root}, \\ Q, & \text{if } r \textit{ is a} \text{ long root} \end{cases}$$

for some intermediate subfields P and Q of the field K ($R \subseteq P, Q \subseteq K$),and $P^3 \subseteq Q \subseteq P$.

For $p > 3$ the statement of the theorem was established by V.M Levchuk [1, Corollary 3.2], even under weaker restrictions on the additive subgroups $\mathfrak{A}_r$, and in this case the carpet $\mathfrak{A}$ is parametrized by only one field, namely, $Q = P$.

References. [1] V. M. Levchuk, On generating sets of root elements of Chevalley groups over a field. Algebra and Logics, 22—5 (1983),504—517.[2] Ya. N. Nuzhin , About subgroups of Chevalley groups of type B_l, C_l, F_4 and G_2 parametrized by two imperfect fields of characteristic 2 and 3. Mathematics in the modern world, (2017), C. 90. [3] V. A. Koybayev,Elementary networks in linear groups.Tr. IMM UrB RAS, 17—4 (2011),134-141.[4] S. K. Kuklina, A. O. Likhacheva, Ya. N. Nuzhin,On the closedness of carpets of Lie type over commutative rings.Tr. IMM UrB RAS, 21—3 (2015), 192—196.

Institute of mathematics and computer science, Siberian Federal University

e-mail: svetlya4ok-03@mail.ru

A. N. Lata (Moscow)

Unary Algebras without proper Subalgebras

By a *unary algebra* one means an algebra whose signature consists of unary symbols.

Any unary algebra can be interpreted as an automaton without outputs, as an act over semigroups and as a directed pseudograph.

A subalgebra of a universal algebra is *proper* if it does not coincide with the whole algebra.

A unary algebra is said to be *strongly connected* if it is generated by each of its elements.

Definitions and statements of graph theory can be found in [1].

Theorem 1. Let $\langle A, \Omega\rangle$ be an arbitrary unary algebra. Algebra $\langle A, \Omega\rangle$ has no proper subalgebras if and only if after interpretation of some unary operations from Ω, we obtain a strongly connected directed pseudograph.

Corollary 1. Let $\langle A, \Omega\rangle$ be an arbitrary unary algebra. Algebra $\langle A, \Omega\rangle$ has no proper subalgebras if and only if it is a strongly connected algebra.

Corollary 2. Let the signature of a universal algebra A contain unary operations. If, after interpreting some unary operations from signature, we obtain a strongly connected directed pseudograph, then the algebra A has no proper subalgebras

Corollary 3. Let A be an (infinite) automaton without outputs. Automaton A has no proper subautomaton if and only if its Moore diagram is strongly connected a directed pseudograph.

Corollary 4. Let A be an arbitrary unary algebra. The atoms of $SubA$ are exactly the strongly connected subalgebras of A.

Corollaries 3 and 4 are generalizations of the result of V. N. Salii [2] to the case of an infinite automaton without outputs.

References. [1] G. P. Gavrilov, A. A. Sapozhenko. Problems and exercises on discrete mathematics. Moscow: Fizmatlit, 2009. (in Russian) [2] V. N. Salii, Universal Algebra and Automata. Saratov: Saratov Univ., 1988. (in Russian)

M.V. Lomonosov Moscow State University

e-mail: alex.lata@yandex.ru

O. Lezama (Bogotá, COLOMBIA)

Zariski cancellation problem for noncommutative algebras

The Zariski cancellation problem arises in commutative algebra and can be formulated in the following way: Let K be a field, $A := K[t_1, \ldots, t_n]$ be the commutative algebra of usual polynomials and B be a commutative K-algebra,

$$\text{if } A[t] \cong B[t], \text{ then } A \cong B?$$

Recently the problem has been considered for noncommutative algebras that are domains (**Bell, J., and Zhang, J. J.**, *Zariski cancellation problem for noncommutative algebras*, Selecta Math. (N.S.), 23 (3), 2017, 1709–1737).

In this talk we will discuss the Zariski cancellation problem for arbitrary algebras.

Seminario de Álgebra Constructiva - SAC^2, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, COLOMBIA

e-mail: jolezamas@unal.edu.co

A. O. Likhacheva (Krasnoyarsk)

On irreducible carpets of additive subgroups of type F_4

Let Φ is a reduced indecomposable root system and $E(\Phi, K)$ is an elementary Chevalley group of type Φ over the field K. The group $E(\Phi, K)$ is generated by its root subgroups

$$x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}, \quad r \in \Phi.$$

The subgroups $x_r(K)$ are Abelian and for each $r \in \Phi$ and any $t, u \in K$ the following relations hold

$$x_r(t)\, x_r(u) = x_r(t+u).$$

By a carpet of type Φ over K we mean an arbitrary family of additive subgroups
$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ of ring K with the condition

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir+js \in \Phi,\ i, j > 0,$$

where $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, and constants $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ are determined by the Chevalley commutator formula

$$\big[x_s(u), x_r(t)\big] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-t)^i u^j\big), \quad r, s, ir+js \in \Phi.$$

Every carpet $\mathfrak{A}$ of type Φ over the ring K defines the *carpet* subgroup

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \big\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \big\rangle$$

of the Chevalley group $E(\Phi, K)$, where $\langle M \rangle$ is subgroup, generated by the subset M of the group $E(\Phi, K)$. The carpet $\mathfrak{A}$ of the type Φ over the ring K is said to be *closed*, if its carpet subgroup $E(\Phi, \mathfrak{A})$ has no new root elements, that is

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi.$$

We call a carpet $\mathfrak{A}$ *irreducible*, if all $\mathfrak{A}_r$ are nonzero.

Theorem 1. Let $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ be an irreducible carpet of F_4 type over the field K of characteristics $p > 0$. Suppose that all $\mathfrak{A}_r$ are R - modules over the field R, where K is an algebraic extension of the field R. Then, up to conjugation by the diagonal element of $F_4(K)$

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, \text{ if } r \ is \ a \text{ short root,} \\ Q, \text{ if } r \ is \ a \text{ long root} \end{cases}$$

for some intermediate subfields P and Q of the field K ($R \subseteq P, Q \subseteq K$),and $P^2 \subseteq Q \subseteq P$.

For $p > 2$ the assertion of the theorem is established in [1], and in this case the carpet $\mathfrak{A}$ is parameterized by only one field, that is $Q = P$. For carpet $\mathfrak{A}$ from the above theorem, its carpet subgroup $F_4(K)$ is an intermediate between $F_4(Q)$ and $F_4(P)$ and by the theorem of [2] is closed. Examples of unclosed carpets above the rings are indicated in [3] and [4]

This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant 16-01-00707.

References. [1] V. M. Levchuk, On generating sets of root elements of Chevalley groups over a field. Algebra and Logics, 22—5 (1983),504—517.[2] Ya. N. Nuzhin , About subgroups of Chevalley groups of type B_l, C_l, F_4 and G_2 parametrized by two imperfect fields of characteristic 2 and 3. Mathematics in the modern world, (2017), C. 90. [3] V. A. Koybayev, Elementary networks in linear groups.Tr. IMM UrB RAS, 17—4 (2011),134-141.[4] S. K. Kuklina, A. O. Likhacheva, Ya. N. Nuzhin,On the closedness of carpets of Lie type over commutative rings.Tr. IMM UrB RAS, 21—3 (2015), 192—196.

Institute of mathematics and computer science, Siberian Federal University

e-mail: likhacheva.alyona@mail.ru

A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova (Moscow)

Radicals of ordered algebraic systems

An ideal P of an algebra A over a field F is said to be *a prime ideal* whenever the product $IJ \neq 0$ for any nontrivial ideals I and J of the quotient-algebra A/P. The set-theoretic intersection of the set of all prime ideals for an algebra A is called *the prime radical* of the algebra A.

Prime radicals were investigated in different partially ordered algebraic systems. The idea of prime radicals was first considered by G. Birkhoff and R.S. Pierce in the class of lattice-ordered rings (see [1]). A.V. Mikhalev and M.A. Shatalova obtained the description of the prime radical element-wise in the classes of associative lattice-ordered rings [2].

A ring R is called *a partially pseudo-ordered ring* whenever $< R, +, \leq >$ is a partially ordered group and the following condition holds: if $0 \leq a$, then $ab \leq a$ and $ba \leq a$ for all $b \in R$.

An algebra $A =< A, +, \{\alpha| \ \alpha \in F\}, \cdot, \leq >$ over a partially ordered field (see [1]) F is called *a partially pseudo-ordered algebra* whenever the following conditions hold: 1) if $0 \leq a$, then $0 \leq \alpha a$ for all elements $a \in A$ and all $\alpha > 0$ from the field F; 2) $< A, +, \cdot, \leq >$ is a partially pseudo-ordered ring.

Partially ordered Lie algebras (see [3]) form a subclass of pseudo-ordered algebras.

One can find the description of the prime radical element-wise for a lattice pseudo-ordered algebra over a partially ordered field in the paper [4].

An algebra A is said to be *a directed pseudo-ordered algebra* if the group $< A, +, \leqslant >$ is a directed group.

In this report we survey a variation of the concept of the prime radical for directed pseudo-ordered algebras over directed fields.

References. [1] G. Birkhoff. Lattice theory. Moscow: Nauka, 1984. [2] A. V. Mikhalev, M. A. Shatalova, The prime radical of lattice-ordered rings, Collection of works in algebra, Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1989, 178–184. [3] V. M. Kopytov. Lattice-Ordered groups. Moscow: Nauka, 1984. [4] J. V. Kochetova, E. E. Shirshova, Prime radicals of lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, 18:1 (2013), 85–158.

M.V.Lomonosov Moscow State University
Moscow Pedagogical State University

e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Dmitry V. Millionshchikov

Narrow positively graded Lie algebras

A nilpotent Lie algebra $\mathfrak{g}$ is said to be naturally graded if it is isomorphic to its associated graded Lie algebra $\mathrm{gr}\mathfrak{g}$ with respect to filtration by ideals of the lower central series. This concept is equivalent to the concept of the Carnot algebra arising in sub-Riemannian geometry and the geometric control theory [1]. Recall that a Carnot algebra is a positive-graded Lie algebra $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i$ such that

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \ i = 1, \dots, n-1, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = 0, i > n.$$

Zelmanov and Shalev introduced the concept of narrow Lie algebras in [4], the class of positively graded Lie algebras of small width d. A positively graded Lie algebra $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ is called a Lie algebra of width d if there is a d (minimal with such a property) such that $\dim \mathfrak{g}_i \le d, \forall i \in \mathbb{N}$. The problem of classifying graded Lie algebras of finite width was outlined by Zel'manov and Shalev as an important and difficult problem (even "a formidable challenge"[4]).

Naturally graded Lie algebras can not have width one. The minimum possible value for their width $d(\mathfrak{g})$ is two. But also the classification of naturally graded Lie algebras of width two seems at the moment an immense task. One can distinguish among them a subclass of Lie algebras of "width $\frac{3}{2}$ that is, Lie algebras satisfying the following condition of narrowness:

$$\dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1} \le 3, \ i \ge 1.$$

The talk based on [2],[3] will focus the classification of naturally graded Lie algebras of this class.

The research was made under the support of the RSF grant № 14-11-00414.

References. [1] A.A. Agrachev. Topics in sub-Riemannian geometry. Russian Math. Surveys. 71:6 (2016), 989–1019. [2] D.V. Millionshchikov. Naturally graded Lie algebras (Carnot algebras) of slow growth. ArXiv: 1705.07494. [3] D.V. Millionshchikov. Graded filiform Lie algebras and symplectic nilmanifolds. in: "Geometry, topology, and mathematical physics AMS Transl. Ser. 2, 212, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 2004, 259–279. [4] A. Shalev, E.I. Zelmanov. Narrow algebras and groups. J. of Math. Sciences. 93:6 (1999). 951–963.

M.V. Lomonosov Moscow State University
Steklov Institute of Mathematics of RAS

e-mail: mitia_m@hotmail.com

A. A. Mishchenko

Universal classes of abelian groups

The isomorphism problem for arbitrary abelian groups is extremely difficult, it has a satisfactory solution only for certain classes of abelian groups, see [1] for details. On the other hand, the elementary equivalence problem found a very good solution in the famous article by W. Szmielew [2]. In this article, she introduced the invariants, which are now called Szmielew's invariants, and showed that two abelian groups A and B are elementarily equivalent if and only if the values of the elementary invariants of the group A coincide with the values of the elementary invariants for the group B.

In this talk we discuss the problem of universal equivalence for abelian groups and for classes of abelian groups. By definition, two abelian groups A and B are universally equivalent, if and only if their universal theories coincide. Define the basic notions associated with the universal classes used in this report. We denote the class of abelian groups in the signature $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$ by $\mathfrak{A}$. The subclass of abelian groups A which periodic part $T(A)$ is a p-group, where p is a fixed prime number denote by $\mathfrak{A}_p$. The class of all torsion-free abelian groups denote by $\mathfrak{A}_0$. It is shown in [3] that for any $p \in \mathcal{P} \cup \{0\}$ the class $\mathfrak{A}_p$ is the universal class. A universal class of abelian groups $\mathcal{K}$ is called *principal universal class* if there exists an abelian group A such that $\mathcal{K}$ is generated by A as the universal closure of A i.e. $\mathcal{K} = ucl(A)$.

In [3] we introduced primary universal invariants UI_p, where p is a prime number or 0. This is a finite vector whose elements are natural numbers or the symbol ∞. Using primary universal invariants, we define the universal invariant $\mathrm{UI}(A)$ for a group A as a sequence:

$$\mathrm{UI}(A) = (\mathrm{UI}_0(A), \mathrm{UI}_2(A), \mathrm{UI}_3(A), \mathrm{UI}_5(A), \ldots, \mathrm{UI}_{p_n}(A), \ldots),$$

where p_n are prime numbers for $n \geq 1$. This made it possible to prove an analogue of Szmielew's theorem about the universal equivalence of abelian groups:

Theorem 1.

1. Let A and B be groups from $\mathfrak{A}_p$. Then A and B are universally equivalent if and only if $\mathrm{UI}_p(A) = \mathrm{UI}_p(B)$.

2. Two abelian groups A and B are universally equivalent if and only if $\mathrm{UI}(A) = \mathrm{UI}(B)$.

This theorem allowed us to begin a detailed process of studying universal classes of abelian groups. In this direction the author together with V. N. Remeslennikov and A. V. Treier wrote the series of articles [3, 4, 5]. The main results of this series of works are the following:

1. Universal invariants UI are defined not only for abelian groups, but also for universal classes of abelian groups;

2. For the principal universal class of abelian groups, a unique canonical group is defined and the structure and properties of this group are studied in detail;

3. Within each principal universal class of abelian groups, homogeneous and existentially closed abelian groups are described;

4. It is shown that for universal theory of principal universal class there is a model companion and it is shown in which cases there is a model completion for these theories.

Next, we turn to the analysis of the principal universal classes of abelian groups from $\mathfrak{A}_p$, where p is a fixed prime number. The main result is as follows:

Theorem 2. Let $\mathcal{K}_1$ and $\mathcal{K}_2$ be two principal universal class of abelian groups. Then $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}_1) = \mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}_2)$ if and only if $\mathrm{UI}(\mathcal{K}_1) = \mathrm{UI}(\mathcal{K}_2)$.

Then we define the set of canonical abelian groups CGr with the following properties:

Theorem 3. For groups in the class CGr the following statements hold:

1. For any abelian group A, there exists a unique group $C \in \mathrm{CGr}$ such that $\mathrm{Th}_\forall(A) = \mathrm{Th}_\forall(C)$;

2. Two groups $C_1, C_2 \in \mathrm{CGr}$ are isomorphic if and only if $\mathrm{Th}_\forall(C_1) = \mathrm{Th}_\forall(C_2)$;

3. For any principal universal class of abelian groups $\mathcal{K}$ there exists a unique group $C \in \mathrm{CGr}$ such that $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_\forall(C)$.

References. [1] L. Fuchs, Infinite abelian groups. Vol. 1,2. – M.: Mir, 1974, 1977. [2] W. Szmielew, Elementary properties of Abelian groups. Fundamenta Mathematica, 41 (1955), 203–271. [3] A.A. Mishchenko, V.N. Remeslennikov, A.V. Treier, Canonical and Existential Groups in Universal Classes of Abelian Groups. Doklady Mathematics, 93:2 (2016), 175–178. [4] A.A. Mishchenko, V.N. Remeslennikov, A.V. Treier, Universal invariants for classes of abelian groups. Algebra and Logic, 56:2 (2017), 116–132. [5] A.A. Mishchenko, V.N. Remeslennikov, Canonic and existentialy closed groups in universal classes of abelian groups. Algebra and Logic, (2018), applied.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Omsk, Russia

e-mail: alexei.mishenko@gmail.com

S. P. Mishchenko (Ulyanovsk, Russia), **A. Valenti** (Palermo, Italy)

On varieties with at most cubic growth

Let F be a field of characteristic zero and $F\{X\}$ the free non associative algebra on a countable set X over F. Let $\mathcal{V}$ be a variety of non necessarily associative algebras and $Id(\mathcal{V})$ be the T-ideal of identities of $\mathcal{V}$. In characteristic zero without loss of generality one can study the multilinear identities of $\mathcal{V}$ and a natural and well established way of measuring the identities of $\mathcal{V}$ is through the study of the asymptotic behavior of its sequence of codimensions $c_n(\mathcal{V})$, $n = 1, 2, \ldots$. More precisely, for every $n \geq 1$ let P_n be the space of multilinear polynomials in the variables $x_1, \ldots, x_n$. Since char $F = 0$, the T-ideal $Id(\mathcal{V})$ is determined by the multilinear polynomials it contains; hence the relatively free algebra $F\{X\}/Id(\mathcal{V})$ is determined by the sequence of subspaces $\{P_n/(P_n \cap Id(\mathcal{V}))\}_{n\geq 1}$. The integer $c_n(\mathcal{V}) = \dim P_n/(P_n \cap Id(\mathcal{V}))$ is called the n-th codimension of $\mathcal{V}$ and the growth function determined by the sequence of integers $\{c_n(\mathcal{V})\}_{n\geq 1}$ is the growth of the variety $\mathcal{V}$.

Here we consider varieties $\mathcal{V}$ of not necessarily associative algebras such that the sequence of codimensions is polynomially bounded, i.e., there exist constants $\alpha, t > 0$ such that $c_n(\mathcal{V}) \leq \alpha n^t$, for all n. In particular we deal with the variety, $\mathcal{V} = {}_2\mathcal{N}$, of left nilpotent algebras of index two, that is the variety of algebras satisfying the identity

$$x(yz) \equiv 0.$$

For this class of algebras in [1] the authors constructed a variety $\mathcal{W} \subset {}_2\mathcal{N}$ such that for any $n \geq 25$

$$([\sqrt{n}] - 2)\frac{n(n-1)(n-5)}{6} \leq c_n(\mathcal{V}) \leq n^3\sqrt{n} + n^2(2n + 3\sqrt{n}) + n^2.$$

In other words, the variety $\mathcal{W}$ has fractional polynomial growth between 3 and 4, more precisely $\lim_{n\to\infty} \log_n c_n(\mathcal{V}) = \frac{7}{2}$.

Motivated by this results in ([2], [3]) we classified the growth of varieties of commutative and anticommutative algebras with at most quadratic growth.

The aim of this lecture is to classify all possible growth of varieties $\mathcal{V}$ of algebras satisfying the identity $x(yz) \equiv 0$ such that $c_n(\mathcal{V}) < Cn^\alpha$, with $1 < \alpha < 3$, for some constant C. We have the following

THEOREM 1. *Let $\mathcal{V}$ be a variety of algebras satisfying the identity*

$$x(yz) = 0.$$

If $c_n(\mathcal{V}) \leq Cn^\alpha$ for some constant $C > 0$ and $1 < \alpha < 2$, then $c_n(\mathcal{V}) \leq 4n + C_1$ for some constant $C_1 > 0$.

THEOREM 2. *Let $\mathcal{V}$ be a variety of algebras satisfying the identity*

$$x(yz) = 0.$$

If $c_n(\mathcal{V}) \leq Cn^\alpha$ for some constant $C > 0$ and $2 < \alpha < 3$, then $c_n(\mathcal{V}) \leq C_1 n^2$ for some constant $C_1 > 0$.

References. [1] S. P. Mishchenko, M. Zaicev. An example of a variety of linear algebras with the fractional polynomial growth. Vestnik of Moscow State Univ. Math. Mech. 2008 (1), 25–31. [2] S. Mishchenko, A. Valenti. Varieties with at most quadratic growth. Israel J. Math., 178 (2010), 209–228. [3] S. Mishchenko, A. Valenti, On the growt of varieties of algebras. On the growth of varieties of algebras. "Groups, rings and group rings,"Contemp. Math., Amer. Math Soc., Providence, RI, 499 (2009), 229–243.

Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia
Università di Palermo, Palermo, Italy
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

R. Mutalip (Astana, Kazakhstan), **U. U. Umirbaev** (Detroit, MI, USA)

Automorphisms of free braided associative algebras in two variables

It is well-known [1, 2, 3, 4] that all automorphisms of polynomial algebras $K[x_1, x_2]$ and free associative algebras $K\langle x_1, x_2\rangle$ in two variables are tame. Automorphism groups of quantum polynomial algebras are described by J. Alev and M. Chamarie [5].

In this paper we describe automorphisms of the free associative algebra $K\langle x_1, x_2\rangle$ with a diagonal braiding. It is well known [6] that every braiding $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ of a vector space V can be canonically continued to a braiding of the tensor algebra $T(V)$. Other relevant definitions can be found in [6].

Let V be a vector space with a linear basis x_1, x_2 and let τ be a diagonal involutive braiding on V such that $\tau : x_i \otimes x_s \mapsto q_{is} \cdot x_s \otimes x_i$. Then $A_\tau = K\langle x_1, x_2\rangle \simeq T(V)$ becomes a free braided associative algebra. We identify the braiding τ with the vector $\tau = (q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$. Put also $\tau^* = (q_{22}, q_{21}, q_{12}, q_{11})$.

Proposition. Let τ, σ be two diagonal braidings on $V = Kx_1 + Kx_2$. Then $A_\tau \cong A_\sigma$ if and only if $\sigma = \tau$ or $\sigma = \tau^*$.

This proposition implies a classification of algebras A_τ up to isomorphism.

Denote by $G_0 = \mathrm{Aut}A$ the group of all automorphisms of the free associative algebra $A = K\langle x_1, x_2\rangle$. Denote by $\varphi = (f_1, f_2)$ the automorphism of A such that $\varphi(x_1) = f_1, \varphi(x_2) = f_2$. Let

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus \ldots$$

be the standard grading of A. An automorphism $\varphi = (f_1, f_2)$ of A is called *odd* if $f_1, f_2 \in A_1 \oplus A_3 \oplus A_5 \oplus \ldots$. Denote by G_1 the group of all odd automorphisms of A. Put also

$$G_2 = \{\varphi \in G_0 \mid \varphi = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) \text{ or } \varphi = (\alpha_1 x_2,\ \alpha_2 x_1),\ \alpha_1, \alpha_2 \in K^*\},$$

$$G_3 = \{\varphi \in G_0 \mid \varphi = (\alpha_1 x_1 + \gamma_1,\ \beta_2 x_2 + \gamma_2),\ \alpha_1,\ \beta_2 \in K^*,\ \gamma_1, \gamma_2 \in K\},$$

$$G_4 = \{\varphi \in G_0 \mid \varphi = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2),\ \alpha_1, \alpha_2 \in K^*\}.$$

Theorem. Let $\tau = (q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$ be a diagonal involutive braiding on $V = Kx_1 + Kx_2$ and G_τ be the group of all automorphisms of the braided free associative algebra $A_\tau = K\langle x_1, x_2\rangle$. If $\tau = (1,1,1,1)$, then $G_\tau \simeq G_0$; if $\tau = (-1,-1,-1,-1)$, then $G_\tau \simeq G_1$; if $\tau = (-1,1,1,-1)$ or $\tau = (1,-1,-1,1)$, then $G_\tau \simeq G_2$; if $\tau = (1,1,1,-1)$, then $G_\tau \simeq G_3$; and if $q_{12} \neq \pm 1$ or $\tau = (1,-1,-1,-1)$, then $G_\tau \simeq G_4$.

References. [1] A. J. Czerniakiewicz, Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II. Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 393–401; 171 (1972), 309–315. [2] H. W. E. Jung, Uber ganze birationale Transformationen der Ebene. J. reine angew Math. 184 (1942), 161–174. [3] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables. Nieuw Archief voor Wisk. (3) 1 (1953), 33–41. [4] L. Makar-Limanov, The automorphisms of the free algebra of two generators. Funksional. Anal. i Prilozhen. 4 (1970), 107–108. [5] J. Alev, M. Chamarie, Dérivations et automorphismes de quelques algébres quantiques. Comm. Algebra 20 (1992), no. 6, 1787–1802. [6] V. Kharchenko, Quantum Lie theory. A multilinear approach. Lecture Notes in Mathematics, 2150. Springer, Cham, 2015. xiii+302 pp.

Eurasian National University
Wayne State University

e-mail: mutalipriza@yahoo.com

D. Osin

Hyperbolic structures on groups and loxodromic rigidity

This talk is based on the joint work with C. Abbott and S. Balasubramanya [1]. For every group G, we introduce the set of *hyperbolic structures* on G, denoted $\mathcal{H}(G)$, which consists of equivalence classes of (possibly infinite) generating sets of G such that the corresponding Cayley graph is hyperbolic; two generating sets are *equivalent* if the corresponding word metrics on G are bi-Lipschitz equivalent. Alternatively, one can define hyperbolic structures in terms of cobounded G-actions on hyperbolic spaces.

Elements of $\mathcal{H}(G)$ can be ordered in a natural way according to the amount of information they provide about the group G. I will first discuss basic properties of this poset such as cardinality, width and height, the existence of extremal elements, etc.

Next, I will address the question to what extent a hyperbolic structure on a group is determined by the set of loxodromic elements and their translation lengths. Research in this direction is motivated by various well-known rigidity phenomena such as the marked length spectrum rigidity for hyperbolic surfaces [5] and the Culler–Morgan theorem for groups acting on $\mathbb{R}$-trees [2]. Our results are twofold. On the one hand, we prove that the set of loxodromic elements itself does not determine a hyperbolic structure. On the other hand, we show that adding some information about translation lengths allows one to recover the corresponding hyperbolic structure completely. The latter result can be seen as the analogue of the Culler–Morgan theorem in our settings. The main technical tools used in the proofs are hyperbolically embedded subgroups and acylindrically hyperbolic groups introduced in [3] and [4].

Finally I will mention some open questions.

References. [1] C. Abbott, S. Balasubramanya, D. Osin, Hyperbolic structures on groups, arXiv:1710.05197. [2] M. Culler, J. Morgan, Group actions on R-trees, *Proc. London Math. Soc.* **55** (1987), no. 3, 571-604. [3] F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin, Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 245 (2017), no. 1156. [4] D. Osin, Acylindrically hyperbolic groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 2, 851-888. [5] J.-P. Otal, Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative, *Ann. of Math.* **131** (1990), no. 1, 151-162.

A. G. Pinus (Novosibirsk)

On the classification of functional clones by its formula and types definable subsets

As the any functional clone F on the set A is the clone $Tr(\mathfrak{A}_F)$ of termal functions for the universal algebra $\mathfrak{A}_F =< A; F >$, we have natural interest on the classification of clones F on A by some derived structures of this algebras $\mathfrak{A}_F$, for example, by its algebraic geometries, by Boolean algebras of formula defined subsets of algebra $\mathfrak{A}_F$, by collections of subsets defined by elementary types in $\mathfrak{A}_F$.

We define the clones F_1, F_2 on the set A as *algebraically equivalent* ($F_1 \sim_{alg} F_2$), if coincide the algebraic geometries of algebras $\mathfrak{A}_{F_1}$ and $\mathfrak{A}_{F_2}$ (it is are the collections of algebraic sets of this algebras, see, for example, [1]). Two clones F_1, F_2 on the set A we define as L_0 - *logically equivalent* ($F_1 \sim_{log} F_2$), if coincide the Boolean algebras of quantifier free formula sets of algebras $\mathfrak{A}_{F_1}$ and $\mathfrak{A}_{F_2}$. Two clones F_1, F_2 on the set A we define as *elementary equivalent* ($F_1 \sim_{el} F_2$) if coincide the families of sets defined by elementary types in algebras $\mathfrak{A}_{F_1}$ and $\mathfrak{A}_{F_2}$.

For any clone F on the set A let $PCT(F)$,$CT(F)$,$ECT(F)$ are functional clones of all positive conditional termal, conditional termal, elementary conditional termal functions of algebra $\mathfrak{A}_F$ (see, for example, [2]).

The clone F on A is *additive* (see [1]), if any union of its algebraic sets is also its algebraic set.

Then we have

Theorem. For any finite set A and any clone F on A:

a) if F is additive clone, then $F \sim_{alg} PCT(F)$,

b) $F \sim_{log} CT(F)$,

c) $F \sim_{el} ECT(F)$.

Let F_A be the collection of all functional clones on A.

Corollary. For any finite set A :

a) Any collection of pairwise algebraically non-equivalent additive clones on A is finite,

b) sets $F_A / \sim_{log}$, $F_A / \sim_{el}$ are finite.

References. [1] A. G. Pinus. Algebraic sets of universal algebras and algebraic closure operator.- Lobachevskii Journal of Math., 2017, v.38, №4, p.719-723.
[2] A. G. Pinus. The conditional terms and its application in algebra and computional theory.- Uspechy Math. Sciences, 2001, v.56, №4, p.35-72.

Novosibirsk State Technical University

e-mail: ag.pinus@gmail.com

Dmitri Piontkovski (Moscow)

Algebras and semigroups of linear growth and the dynamical Mordell–Lang conjecture

Ufnarovski remarked in 1990 that it is unknown whether any finitely presented associative algebra of linear growth is automaton, that is, whether the set of normal words in the algebra form a regular language. If the algebra is graded, then the rationality of the Hilbert series of the algebra follows from the affirmative answer to Ufnarovski's question. Assuming that the ground field has a positive characteristic, we show that the answer to Ufnarovskii's question is positive for graded algebras if and only if the basic field is an algebraic extension of its prime subfield.

As a corollary of the “if” part, each homogeneous finitely presented semigroup of linear growth is a finite disjoint union of the subsets of the form $a\langle w\rangle b$ where $\langle w\rangle$ is a monogenic semigroup.

Our approach is based on a connection with the dynamical Mordell–Lang conjecture. This conjecture describes the intersection of an orbit of an algebraic variety endomorphism with a subvariety. We show that the positive answer to Ufnarovski's question implies some known cases of the dynamical Mordell–Lang conjecture. In particular, the positive answer for a class of algebras is equivalent to the Skolem–Mahler–Lech theorem which says that the set of the zero elements of any linear recurrent sequence over a zero characteristic field is the finite union of several arithmetic progressions. In particular, classical counter-examples to this theorem in the finite characteristic case give examples of finitely presented algebras of linear growth with irrational Hilbert series. In addition, over an arbitrary infinite basic field, we show that the set of Hilbert series of the quadratic algebras of linear growth with 5 generators is infinite.

National Research University Higher School of Economics, Myasnitskaya Str. 20, Moscow 101000, Russia

e-mail: dpiontkovski@hse.ru

V. N. Remeslennikov (Omsk)

What Is The Universal Algebraic Geometry?

The most full answer to this question can be obtained from the monograph [1]. The most concise answer is: it is a field of mathematics in which for any category of algebraic structures $\mathbf{C}$ of a language $\mathtt{L}$ and the set of letters $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ we can define the notion of a system of equations $S(X)$ over an algebraic structure $\mathcal{A}$ from $\mathbf{C}$ and specify procedures for solving fundamental problems:

1. If the system of equations $S(X)$ is consistent and $t(X)$ is an equation of the language $\mathtt{L}$, then is $t(X)$ a consequence of $S(X)$ or not;
2. Forming of a uniform method for constructing the coordinate algebra (a general solution) for the system of equations $S(X)$.

Let us briefly describe the main definitions and facts of algebraic geometry over an algebraic structure $\mathcal{A} = \langle A; \mathtt{L}\rangle$.

An *equation* in the language $\mathtt{L}$ in variables form X is an atomic formula in the language $\mathtt{L}$ with variables in X, i.e. a formula of the type $t_1 = t_2$ or $R(t_1, \ldots, t_m)$, where t_i are terms and R is a relation symbol from $\mathtt{L}$. If S is a system of equations, then the set $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models f(a_1, \ldots, a_n)\ \forall f \in S\}$ is called an *algebraic set* over $\mathcal{A}$. It is defined the *Zariski topology* on the affine space A^n by setting the prebase of closed sets consisting of all algebraic sets. Next, we naturally define the concepts of an irreducible set and of irreducible components; all the necessary topological details of algebraic geometry over $\mathcal{A}$ is constructed. It is true that an arbitrary non-empty algebraic set is representable as the union of its irreducible components.

Two systems of equations S_1 and S_2 are *equivalent over* $\mathcal{A}$ if the sets of their solutions coincide: $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_2)$. The *radical* $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$ of a system of equations S is the maximal system of equations that is equivalent to S. The coordinate algebra of the algebraic set $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S)$ is defined as factor-structure of the free term algebraic structure by the Gorbunov – Tumanov congruence that is defined by the radical $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$. Then the category of algebraic sets over $\mathcal{A}$ and the category of their coordinate algebras are defined. These categories, as in the case of classical algebraic geometry over a field, prove to be dually equivalent (the dual equivalence theorem).

One of the main problems of algebraic geometry over $\mathcal{A}$ is the problem of classifying algebraic sets over $\mathcal{A}$ with accuracy up to isomorphism. The dual equivalence theorem reduces this problem to the classification of coordinate algebras of algebraic sets.

In addition to the dual equivalence theorem, there are several classical algebraic-geometric facts that remain valid for an arbitrary algebraic structure $\mathcal{A}$. But most of the results of classical algebraic geometry lose their validity in the case of an arbitrary algebraic structure. At this stage, among the range of all algebraic structures, we point out about ten large classes (not counting their intersections) in which certain classical theorems are true.

The most important of these classes is the class of *equationally Noetherian* algebraic structures that are defined by the fact that in them any system of equations S turns out to be equivalent to some finite subsystem $S_0 \subseteq S$. In any equationally Noetherian algebraic structure $\mathcal{A}$ any non-empty algebraic set can be represented as a finite union of irreducible algebraic sets. For equationally Noetherian algebraic structures, there are large unification theorems that allow us to classify coordinate algebras (both all and irreducible only) in many convenient ways.

Another important class of algebraic structures is the class of *equational domains*, characterized by the fact that in them the union of any two algebraic sets is an algebraic set. If the algebraic structure $\mathcal{A}$ is an equational domain, then the criterion that an algebraic set $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S)$ is irreducible is that its coordinate algebra is an equational domain.

As we can see, equationally Noetherian algebraic structures are structures that inherit those riches that, in classical algebraic geometry, are given by the Noetherian property of the polynomial ring over the field, and the equational domains are those algebraic structures that have received the reflection of that fact from classical algebraic geometry, that the field is an integral domain. We give extensive lists of criteria as for being equationally Noetherian algebraic structure as for being equational domain, by which we can establish the existence of these properties.

We note conclusively that there are a large number of articles and books on algebraic geometry over concrete algebras: groups, semigroups, rings, and fields. Over the past two decades, in connection with the trends in the development of new areas of mathematics and its applications, interest has grown in research in algebraic geometry for many types of graphs, partial orders and large networks. In that respect, the motivated reader may read the doctoral thesis of A. N. Shevlyakov [3], which contains the substantive material on this topic.

References. [1] E. Yu. Daniyarova, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov. Algebraic geometry over algebraic structures. Novosibirsk: Publ. SB RAS, 2016, 243 p. (in Russian). [2] V. A. Gorbunov. Algebraic theory of quasivarieties. Consultants Bureau, New York, 1998, 298+xii p. [3] A. N. Shevlyakov. Algebraic geometry over semigroups and Boolean algebras. 2017, 173 p. PhD Thesis. (in Russian)
http://a-server.math.nsc.ru/IM/Dissert/2017/Shevlyakov.pdf

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

e-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

A. N. Shevlyakov (Omsk, Russia)

Algebraic geometry over groups: systems of equations with disjoint set of variables

Let us give the basic definitions of the algebraic geometry over groups.

Any group G below will be considered in the language $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, 1\} \cup \{g | g \in G\}$ where the constants of $\mathcal{L}$ correspond to the elements of G. We have that any $\mathcal{L}$-term in variables $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ is an element of the free product $G * F(X)$. *An $\mathcal{L}$-equation* is an expression $w(X) = 1$, where $w(X)$ is an $\mathcal{L}$-term. *An $\mathcal{L}$-system of equations* (*an $\mathcal{L}$-system* for short) is an arbitrary set of $\mathcal{L}$-equations.

A point $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in G^n$ is a *solution* of an $\mathcal{L}$-system $\mathbf{S}$ in variables $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, if the substitution $x_i = p_i$ reduces each equation of $\mathbf{S}$ to a true equality in the group G. The set of all solutions of a system $\mathbf{S}$ in G is denoted by $\mathbf{V}(\mathbf{S}) \subseteq G^n$. Let $\mathbf{S}$ be a $\mathcal{L}$-system in variables X, then the *radical* $\mathbf{Rad}(\mathbf{S})$ of $\mathbf{S}$ over a group G is the set of all $\mathcal{L}$-equations $w(X) = 1$ with $\mathbf{V}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbf{V}(w(X) = 1)$.

Let $\mathbf{S}$ be a set of $\mathcal{L}$-equations. By $[\mathbf{S}]$ we denote the normal closure of $\mathbf{S}$. Obviously, $[\mathbf{S}] \subseteq \mathbf{Rad}(\mathbf{S})$.

One can consider radicals in a wide set of variables. Suppose an $\mathcal{L}$-system $\mathbf{S}$ depends on variables $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, but variables $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ do not occur in $\mathbf{S}$. Let us denote $Z = X \cup Y$ and define the radical $\mathbf{Rad}_Z(\mathbf{S}) = \{w(Z) = 1 \mid \mathbf{V}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbf{V}(w(Z) = 1)\}$.

The central problem of my talk is the following. Let G be a group, X, Y be disjoint sets of variables, and $Z = X \cup Y$. Does the equality

$$\mathbf{Rad}_G^Z(\mathbf{S}_1(X) \cup \mathbf{S}_2(Y)) = [\mathbf{Rad}_G^Z(\mathbf{S}_1(X)), \mathbf{Rad}_G^Z(\mathbf{S}_2(Y))] \qquad (1)$$

hold for any systems of equations $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$?

We proved that (1) holds for any abelian group, but fails for free or 2-step nilpotent non-abelian groups. More precisely, it was proved the following theorems.

Theorem 1. Let G be a non-abelian free group and $a \in G$ a free generator. For $\mathbf{S}_1 = \{[x, a] = 1\}$, $\mathbf{S}_2 = \{[y, a] = 1\}$ the equality (1) fails.

Theorem 2. Let G be a 2-step nilpotent group where G' contains an element of infinite order. Then equality (1) fails for some systems if equations over G.

Sobolev Institute of Mathematics
Omsk State Technical University

e-mail: a_shevl@mail.ru

L. N. Shevrin, **M. V. Volkov** (Ekaterinburg)

Varieties of semigroups: achievements in the past and contemporary challenges

The theory of semigroup varieties is one of the most developed parts of the theory of semigroups. Investigations on semigroup varieties started in the middle of the XXth century and continue to the present day. One can distinguish the following main areas: identities of semigroups, structural aspects, lattices of varieties, free semigroups of varieties, algorithmic problems. Many achievements in these areas have been systematically presented in a number of overview works (review articles, chapters of some monographs); some relevant information on varieties of semigroups is also contained in encyclopedic texts (from reference books and encyclopedias).

The talk will briefly characterize the survey papers on semigroup varieties published to date and present selected top results in each of the mentioned directions as well as actual problems that still remain open.

Ural Federal University

e-mail: lev.shevrin@urfu.ru, Mikhail.Volkov@usu.ru

Vladimir Shpilrain (New York)

Algorithmic problems in (semi)groups of 2×2 matrices

I will give a survey of recent and not-so-recent results and challenging open problems related to various algorithms in (semi)groups of 2×2 matrices and their complexity.

The City College of New York

e-mail: shpil@groups.sci.ccny.cuny.edu

A. M. Staroletov (Novosibirsk)

On composition factors of finite groups isospectral to simple linear and unitary groups

Let G be a finite group and $\omega(G)$ be its spectrum, that is, the set of orders of its elements. The prime graph $\Gamma(G)$ of G is defined as follows: its vertex set is the set of prime divisors of $|G|$, and two distinct vertices r and s are joined by an edge iff $rs \in \omega(G)$. Denote by $t(G)$ the greatest size of a coclique in $\Gamma(G)$.

Two finite groups are said to be *isospectral* if their spectra coincide. We say that G is *recognizable by spectrum* if every finite group isospectral to G is isomorphic to G. It is known that every finite group containing a nontrivial normal solvable subgroup is nonrecognizable [1, Lemma 1]. Therefore, it is natural to ask whether nonabelian simple groups are recognizable by spectrum?

We consider finite groups isospectral to simple linear and unitary groups. Suppose that $L = PSL_n(q)$ or $L = PSU_n(q)$. By the main result of [2], if $n \geq 5$ and G is a finite group isospectral L then there exists a nonabelian simple group S such that $S \leq G/K \leq \operatorname{Aut} S$, where K is the solvable radical of G. Moreover, it is true that $t(S) \geqslant t(L) - 1$. Therefore, in order to describe finite groups isospectral to L one can sort out different possibilities of S. By [3, Table 4], if S is an exceptional group of Lie type then $t(S) \leqslant 12$ and $t(S) = 12$ only when S is of type E_8. On the other hand, if $n \geqslant 27$ then $t(L) \geqslant 14$ by [3, Table 2]. Thus under such restriction on n, the group S cannot be isomorphic to an exceptional group. Using this fact, it is proved [4] that if $n \geqslant 27$ then every finite group isospectral to L is isomorphic to a finite group G with $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$. In particular, there exist only finitely many pairwise nonisomorphic groups isospectral to L. We show that if $n \leqslant 26$ then S is still nonisomorphic to an exceptional group of type E_8.

Theorem 1. Suppose that $L = PSL_n(q)$ or $L = PSU_n(q)$, where q is a prime power and L is simple. If G is a finite group with $\omega(G) = \omega(L)$ then among composition factors of G there are no exceptional groups of Lie type E_8.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

References. [1] V. D. Mazurov. Groups with prescribed orders of elements. Izv. Ural. Gos. Univ., Mat. Mekh., 36:7 (2005), 119–138. [2] A. V. Vasil′ev. On connection between the structure of a finite group and the properties of its prime graph. Sib. Math. J., 46:3 (2005), 396–404. [3] A. V.Vasil′ev and E. P. Vdovin. Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group. Algebra and Logic, 50:4 (2011), 292–322. [4] A. Staroletov. On almost recognizability by spectrum of simple classical groups. International Journal of Group Theory, 6:4 (2017), 7–33.

Sobolev Institute of Mathematics
Novosibirsk State University

e-mail: staroletov@math.nsc.ru

I. D. Suprunenko (Minsk, Belarus)

Special composition factors in restrictions of representations of classical groups to subsystem subgroups with two simple components

Restrictions of modular irreducible representations of the classical algebraic groups to maximal subsystem subgroups with two simple components are investigated. For a wide class of p-restricted representations of special linear and symplectic groups in odd characteristic p, we show that such restrictions have composition factors which are big with respect to unipotent elements of one component (see the definition below) and not very small for the other component if the ranks of the simple components of the relevant subgroups are not too small. These results allow one to get lower estimates for the number of Jordan blocks of the maximal possible size in the images of certain unipotent elements in irreducible representations of the groups under consideration.

In what follows K is an algebraically closed field of odd characteristic p, $G = A_r(K)$ or $C_r(K)$, ω_i $(1 \leq i \leq r)$ are the fundamental weights of a fixed simple algebraic group (it is always clear from the context what group is considered), $\omega(\varphi)$ is the highest weight of an irreducible representation φ, φ^* is the representation dual to φ (we need this notation only for $G = A_r(K)$), and $\varphi|H$ is the restriction of a representation φ to a subgroup H. A subgroup of G is called a subsystem subgroup if it is generated by the root subgroups associated with all roots of a certain subsystem of the root system. Recall that if H is a semisimple algebraic group with two simple components H_1 and H_2, then each its irreducible representation ρ is equivalent to a tensor product $\rho_1 \otimes \rho_2$ where ρ_i is an irreducible component of the restriction $\rho|H_i$, $i = 1, 2$. Throughout the text when we write an irreducible representation of H in such form, we always mean that ρ_i is a representation of H_i.

Let $H \subset G$ be a subgroup, $x \in H$ be a unipotent element, and φ be a representation of G. We call a composition factor ψ of the restriction $\varphi|H$ big for x if the minimal polynomials of $\varphi(x)$ and $\rho(x)$ coincide.

Now we fix a set of representations which we regard as small. Set

$$\Sigma(\Gamma) = \begin{cases} \{0, p^j\omega_1, (p^j + p^k)\omega_1, p^j\omega_2, p^j\omega_{n-1}, \\ p^j\omega_n, (p^j + p^k)\omega_n, p^j\omega_1 + p^k\omega_n\} & \text{for} \quad \Gamma = A_n(K), \\ \{0, p^j\omega_1, (p^j + p^k)\omega_1, p^j\omega_2\} & \text{for} \quad \Gamma = C_n(K). \end{cases}$$

(here j and k are nonnegative integers, they can coincide). Results of Lubeck (2001) imply the following: if ρ is an irreducible representation of Γ and $\omega(\rho) \notin \Sigma(\Gamma)$, then $\dim \rho > n^3/8$ for $\Gamma = A_n(K)$ and $n > 6$ and $\dim \rho > n^3$ for $\Gamma = C_n(K)$ and $n > 7$; if $\omega(\rho) \in \Sigma(\Gamma)$, then $\dim \rho$ is not bigger than a certain quadratic function of n. So it is natural to regard irreducible representations of a group Γ with highest weights from $\Sigma(\Gamma)$ as small.

Theorem 1. Let $G = A_r(K)$, $3 \leq l \leq r - 4$, H_1 and $H_2 \subset G$ be commuting subsystem subgroups of types A_l and A_{r-l-1}, respectively, $H = H_1H_2$, and φ be a p-restricted irreducible representation of G with highest weight $\omega = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i\omega_i$. Set $\omega^* = \omega(\varphi^*)$. Assume that $\sum_{i=1}^r a_i \geq p$.

1) The restriction $\varphi|H$ has a composition factor big for all elements of order p from H_1 and nontrivial for H_2. If $\omega \neq a_1\omega_1 + a_r\omega_r$ with $a_1 + a_r = p$ or $p+1$ and both weights ω and $\omega^* \neq (p-1)\omega_1 + \omega_2$, then $\varphi|H$ has such factor $\rho_1 \otimes \rho_2$ with $\omega(\rho_2) \notin \Sigma(H_2)$.

2) If $\omega \neq a_1\omega_1 + a_r\omega_r$ with $a_1 + a_r = p$ and both weights ω and $\omega^* \neq (p-1)\omega_1 + \omega_2$, then $\varphi|H$ has a composition factor big for all unipotent elements of H_1 and nontrivial for H_2.

3) Put

$$\begin{aligned}\Delta = \{&a_1\omega_1 + a_r\omega_r, a_1 + a_r < p+3;\\ &a_1\omega_1 + \omega_j + a_r\omega_r, a_1 + a_r = p-1, 2 \leq j \leq l+1 \text{ or } r-2 \leq j \leq r-1;\\ &(p-2)\omega_1 + 2\omega_2, (p-2)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, (p-2)\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_r,\\ &(p-1)\omega_1 + 2\omega_2, (p-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_r, (p-1)\omega_1 + 2\omega_3\}.\end{aligned}$$

Let ω and $\omega^* \notin \Delta$. Then $\varphi|H$ has a composition factor $\rho \cong \rho_1 \otimes \rho_2$ big for all unipotent elements of H_1 with $\omega(\rho_2) \notin \Sigma(H_2)$.

Theorem 2. Let $G = C_r(K)$, $3 \leq l \leq r-3$, H_1 and $H_2 \subset G$ be commuting subsystem subgroups of types C_l and C_{r-l}, respectively, $H = H_1H_2$, and φ be a p-restricted irreducible representation of G with highest weight $\omega = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i\omega_i$. Assume that $\sum_{i=1}^r a_i \geq p$.

1) The restriction $\varphi|H$ has a composition factor big for all unipotent elements of prime order from H_1 and nontrivial for H_2.

2) If $\omega \neq (p-1)\omega_1 + \omega_2$, then $\varphi|H$ has such factor big for all unipotent elements of H_1.

3) Let

$$\begin{aligned}\omega \notin \{&(p-2)\omega_1 + 2\omega_2, (p-2)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3,\\ &(p-1)\omega_1 + \omega_j, 1 \leq j \leq l+1; (p-1)\omega_1 + 2\omega_2, (p-1)\omega_1 + 2\omega_3\}.\end{aligned}$$

Then $\varphi|H$ has a composition factor $\rho \cong \rho_1 \otimes \rho_2$ big for all unipotent elements of H_1 with $\omega(\rho_2) \notin \Sigma(H_2)$.

Similar results are obtained for representations with smaller highest weights and for groups of types B_r and D_r as well. The size of the abstract does not allow to state them explicitly, they will be discussed in the talk. This research has been supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, Project No F16032.

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: suprunenko@im.bas-net.by

A. V. Treier

Model companions for principle universal classes of abelian groups

In the middle of the previous century A. Robinson introduced model companions for first-order theories of algebraic structures.

Let T be a theory of a language L. A model companion of T is the theory T' with the following properties:

1. Every model of T' embeds into a model of T and vice versa.
2. The theory T' is model complete, i.e any embedding between models of T' is an elementary embedding.

For example, the theory of algebraically closed fields is a model companion of the theory of fields. The model companion Γ' of graph theory is complete theory and infinite random graph (Rado graph) is the model of Γ'. But there exist theories which doesn't have a model companion. It is well known that group theory and monoid theory doesn't have a model companion. Despite this P.Ekloff and G.Sabbagh in [1] have proved that theory of all abelian groups has a model companion and divisible groups are models of this model companion.

There are several criteria for the existence of model companions. More information about this can be found in the work of A.Macyntire [2]. We will give the criteria for existence of a model companion for inductive theories which useful for us. By definition, a theory T is inductive, if union of increasing chains of models of T is a model of T.

Theorem 1 (P.Ekloff, G.Sabbagh, [1]). Let T be an inductive theory. Then T has a model companion if and only if, the class of existentially closed models of T is an elementary class. In this case existentially closed models of T are models of T'.

The theorem above provides a close connection between a model companion of T and existentially closed models of T.

Our interest here is to check behaviour of this notions in principle universal classes of abelian groups. In the talk will be presented results of A.A.Mishenko and V.N.Remeslennkov [3] on the structure of existentially closed (e.c.) groups in universal classes of abelian groups. They have described e.c. groups in the terms of canonical groups and special integer valued vectors (ladder vectors). Together with results of speaker on axiomatisation of e.c. groups of studied universal classes by Theorem 1 we have that for universal theories of principle universal classes of abelian groups there exists a model companion.

Before stating our result we will give some basic definitions. Let L be the additive group language. Let $\mathcal{K}$ be a class of abelian groups, denote by $Th_{\forall}(\mathcal{K})$ the universal theory of $\mathcal{K}$. A class $\mathcal{K}$ is called a universal class if it has axiomatisation by universal formulas of the language L. Denote by $ucl(\mathcal{K})$ the universal closure of $\mathcal{K}$, i.e. the set of all models of $Th_{\forall}(\mathcal{K})$. A universal class of models $\mathcal{K}$ is called principle, if there exists the model A such that $\mathcal{K} = ucl(A)$. Note that $Th_{\forall}(\mathcal{K})$ is inductive theory. Denote by $\mathfrak{A}_p$ the class of abelian groups which periodic part is p-group, where p is a fixed prime number. Recall that the group A from $\mathcal{K}$ is called $\mathcal{K}$-existentially closed, if any system of equations and inequalities with coefficients in A which is satisfy $Th_{\forall}(\mathcal{K})$ has decision in A. Let us formulate our result.

Theorem 2. Let $\mathcal{K}$ be a principle universal class of abelian groups from $\mathfrak{A}_p$, $T = Th_{\forall}(\mathcal{K})$, and $\mathcal{K}^{ec}$ is the set of existentially closed models of $\mathcal{K}$. Then T has a model companion T', such that $T' = Th(\mathcal{K}^{ec})$.

References. [1] A. Macyntire, *Model completeness*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 90, (1977), 139-180. [2] P. Eklof, G. Sabbagh, *Model-completions and modules*, Annals of Mathematical Logic, 2:3 (1971), 251-295. [3] A. A. Mishenko, V. N. Remeslennikov, *Canonical and existentially closed groups in universal classes of abelian groups*, Algebra and logic, accepted to proceed.

Sobolev Institute of Mathematicas of SB RAS

e-mail: alexander.treyer@gmail.com

M. Tvalavadze (Toronto, Canada), **E. Napedenina**

Real Division Algebras

A real division algebra is a non-zero real vector space $\mathcal{A}$ equipped with a multiplication that satisfies the division property, that is, for every $a \neq 0$ and b the equations

$$ax = b \quad \text{and} \quad ya = b$$

have unique solutions for x and y in $\mathcal{A}$. If $\mathcal{A}$ is finite-dimensional, then it satisfies the division property if and only if it has no zero divisors (i.e. $xy = 0$ if and only if $x = 0$ or $y = 0$).

The famous theorem of Bott and Milnor [4] states that any finite-dimensional real division algebra can have only dimensions 1, 2, 4, or 8. In [7] Frobenious accomplished classification of real *associative* division algebras and showed that up to an isomorphism there are only three types: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ and $\mathbb{Q}$ (the real quaternions). If associativity condition is replaced with *alternativity*, then $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{O}$ (the real octonions) classify all real division algebras. The general classification problem of all real division algebras has been solved only for dimensions 1 and 2. For 4- and 8-dimensional real division algebras it is far from being completed. The most important contributions to the development of real division algebras have been made by Benkart, Britten, Osborn, Darpö and Dieterich in a series of publications ([2,3,5,6]).

In the present paper we study the special class of four-dimensional division algebras called *transitive division algebras*. Algebras from this class are characterized by transitive action of the quaternion group on the set of right multiplications. The standard quaternion algebra is the main example of a transitive algebra. We found necessary and sufficient conditions for a transitive division algebra to be left-unital. For a special sub-class called *transitive-diagonal* algebras we described their derivation algebras in terms of structure constants of $\mathcal{A}$.

References. [1] G. M. Benkart and J. M. Osborn, *An investigation of real division algebras using derivations*, Pacific J. Math., 96 (1981) [2] G. M. Benkart and J. M. Osborn, *The derivation algebra of a real division algebra*, American Journal of Mathematics, 103(6), 1135-1150 (1981). [3] G. M. Benkart, D. Britten and J. M. Osborn, *Real flexible division algebras*, Canadian Journal of Mathematics, 34, 550-588, 1982. [4] R. Bott and J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 87-89. [5] E. Darpö and E. Dieterich, *Real commutative division algebras*, Algebras and Representation Theory, 10(2), pp. 179-196. [6] E. Dieterich, *Zur Klassifikation vierdimensionaler reeller Divisionalgebren*, Math. Nachr., 194: 13-22, 1998. [7] F. G. Frobenius, *Über lineare Substitutionen und bilineare*, Formen J. Reine Angew. Math. 84, 1-63(1878). [8] J. M. Osborn, *Quadratic division algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **105**, 202-221 (1962). [9] M. Zorn, *Theorie der alternativen Ringe,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 8, 123-147 (1931).

University of Toronto

Mirjana Vuković (Sarajevo, Bosnia and Herzegovina)

Paragraded Rings and Their Radicals

The first relatively general definition of graded groups and rings (because it was based unnecessarily on Abelian graded group) was given by Bourbaki [1], whose approach led to many active investigations in both associative and non-associative ring theory, especially in radical theory. Note, that the notion of graded homogeneous field called corpoid, was introduced by M. Krasner in 1944 [6], when he investigated valued fields and observed connection to their valuations rings via the notion of equivalence of valuations. Later, Krasner developed the more general graded theory [7,8,4,6,9] - the theory of homogroupoids, anneids and moduloids, where corpoid, as a special case of an anneid, is viewed as a homogeneous part of a graded field.

It is well known that the graded structures (groups, rings, modules) compose the categories that are not closed with respect to direct sum and direct product. The aim of a new concept in my joint works ([10]) and monograph ([11]) (see also [12-14]) with M. Krasner was to introduce the algebraic structures which generalize the classic graded structures and have in each of the three cases: groups, rings, and modules, the property of closure with respect the direct sum and the direct product in the sense that the support of the homogeneous subset of the composition (direct sum or direct product) is the restricted direct sum or direct product of the components. In this way we developed a theory of paragraded structures, which generalizes, not only, the theory of graded structures as it is exposed in Bourbaki ([3]), but also the previous results of M. Krasner ([9]) and M. Chadeyras ([4]).

In this talk we study the general paragraded radical theory of paragraded rings, structures introduced by Krasner and myself [10, 11] (see also [13]). It is well known that the ADS-Theorem overcomes the problem of the relation "being an ideal"not being transitive for associative rings. We prove a version of the ADS-Theorem for associative paragraded rings, i.e., we prove that for any paragraded radical α (in the sense of Kurosh and Amitsur) and any associative paragraded ring R, if I is a homogeneous ideal of R, then $\alpha(I)$ is a homogeneous ideal of R. We also study special paragraded radicals of paragraded rings. It is known that any special radical of a ring can be described by an appropriate class of modules over that ring [1]. Our aim is to show that all special paragraded radicals of paragraded rings can be described by an appropriate class of their paragraded modules. in an analogous manner as in the case of graded rings [2].

References. [1] V.A. Andrunakievich, Y.A. Ryabuhin, Moscow, 1979; [2] I. N. Balaba, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica, 2004; [3] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. I, Hermann et Cie, Paris, 2^e et 3^e edition, 1958, 1962; [4] M. Chadeyras, Essai d'une théorie noethérienne homogène pour les anneaux commutatifs dont la graduation est aussi générale que possible, Bull. Soc. Math. France, Suppl. Mém. No. 22 (1970), p.1-143; [5] C. Chevalley, The construction and study of certainimportant algebras, Publ. of the Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1955; [6] E. Halberstadt, Théorie artinienne homogène des anneaux gradués non commutatifs à grades réguliers (thèse de doctorat), Université Pierre et Marie Curie, Paris (1971), p. 1-182; [7] M. Krasner, Une généralisation de la notion de corps - corpoïde, Un corpoïde rémarquable pour la théorie des corps valués, C.R., Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.219 (1944), p. 345-347; [8] M. Krasner, Hypergroupes moduliformes et extramoduliformes, C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 219 (1944), p. 473-476; [9] M. Krasner, Anneaux gradués généraux, Colloque d'algèbre, Université Renns 1 (1980), p. 209-308; [10] M. Krasner, M. Vuković, Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules) I, Proc. Japan Acad., Ser. A, 62, (1986), No. 9, 350-352; ibd. II: 62 (1986), 389-391; ibd. III: 63 (1987), Ser. A, No. 1, 10-12; [11] M. Krasner, M. Vuković, Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules), (Monograph), Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, No. 77, Queen's University Kingston, Ontario, Canada, p. 1-163; [12] M. Vuković, Ilić Georgijević, E. Paragraded rings and their ideals, Fund. Prikl. Math. (2011/12), No. 4, pp. 83-93; Journal of Math.2013, Vol. 191, No. 5, pp. 654-660; [13] M. Vuković, Structures graduées et paragraduées, Prepublicationde l'Institut Fourier Université de Grenoble I, No. 536 (2001), p. 1-40; [14] M. Vuković, Paragraded Rings and Some Open Questions, V European Congress of Mathematics, Amsterdam, July 14-18, 2008.

M.V. Academy of Sciences and Arts of Bosnia and Herzegovina

e-mail: mirvuk48@gmail.com

V. I. Yanchevskii (Minsk)

Reduced unitary Whitehead groups for anisotropic algebraic groups of classical types

Let k be a field and G be a k-defined k-simple algebraic group of a classical type (except ${}^3D_4$ and ${}^6D_4$). Then its group G_k of k-rational points is either a special linear group, or one of unitary groups (including orthogonal and symplectic groups). Classical groups are called groups of a noncommutative type if division algebras used for their definition are noncommutative. We shall consider simply connected groups of such type and the series A_n. The Kneser-Tits conjecture on the structure of k-isotropic groups is well known. It was proved in many cases for special fields k, but for anisotropic groups it is false as it was shown by V.P. Platonov [1]. So the necessity to study the so called reduced Whitehead groups has appeared. Now many results on computing such groups are available in the case of inner forms of groups of series A_n (see, e.g., [2–10]). But the anisotropic case still remains almost unapproachable (for the first steps see [11–13]). The aim of the talk is to present a scheme of computing such groups associated with Henselian algebras with unitary involutions. More precisely, let K be a quadratic separable extension of k and D be a finite dimensional division K-algebra over a Henselian field K with a unitary involution τ (i.e. with a nontrivial restriction of τ to K). Then the group

$$SUK^{an}(D,\tau) = SU(D,\tau)/[U(D,\tau), U(D,\tau)]$$

where $U(D,\tau)$ and $SU(D,\tau)$ are the unitary and special unitary groups of D with respect to the involution τ, is called the reduced unitary Whitehead group of D.

There will be three parts in the talk. The first one will be devoted to describing the structure of tame division algebras with unitary involutions over Henselian fields k which is based on proving the existence of inertia algebras invariant under the involutions in such algebras. This fact gives us an opportunity to present a tame algebra with a unitary involution τ in terms of special generators over τ-invariant inertia algebras. As an application, we also consider a few structural results in the special cases of unramified, totally ramified, etc. algebras.

In the second part the main results will be presented. They yield a scheme of computing Whitehead groups in terms of subgroups in multiplicative groups of residue algebras of D. The so called congruence property for special unitary groups plays a key role in these computations. This property is proved in many important special cases.

The final part will be devoted to an analysis of some important examples for special fields k and algebras D.

References. [1] V. P. Platonov. On the Tannaka-Artin problem (in Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 221:5 (1975), 1038–1041. [2] V. P. Platonov. The Tannaka-Artin problem and reduced K-theory (in Russian). Izv. AN SSSR. Ser. matem., 40:2 (1976), 227–261; Math. USSR-Izv., 10:2 (1976), 211–243. [3] P. Draxl. SK_1 von Algebren *über* vollst*ä*ndig diskret bewerteten K*ö*rpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen. J. reine angew. Math., 293/294 (1977), 116–142. [4] U. L. Ershov. Henselian valuations of division rings and the group SK_1. Matem. sb., 117(159):1 (1982), 60–68; Math. USSR-Sb., 45:1 (1983), 63–71. [5] V. I. Yanchevskii. Reduced unitary K-theory and division rings over discretely valued Hensel fields (in Russian). Izv. AN SSSR. Ser. matem., 42:4 (1978), 879–918; Math. USSR-Izv., 13:1 (1979), 175–213. [6] A. A. Suslin. SK_1 of division algebras and Galois cohomology revisited. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 219, Amer. Math. Soc., Providence, RI. (2006). [7] A. S. Merkurjev. Generic element in SK_1 for simple algebras. K-Theory, 7 (1993), 1–3. [8] R. Hazrat, A. R. Wadsworth, SK_1 of graded division algebras. Israel J. Math. 183 (2011) 117–163. [9] R. Hazrat, A. R. Wadsworth.

Unitary SK_1 of graded and valued division algebras. Proc. London Math. Soc. 103:3 (2011), 508–534. [10] A. R. Wadsworth, V. I. Yanchevskii. Unitary SK_1 for a graded division ring and its quotient division ring. Journal of Algebra. 352 (2012), 62–78. [11] B. A. Sethuraman, B. Sury. On the special unitary group of a division algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2005), 351–354. [12] B. Sury. On $SU(1,D)/[U(1,D),U(1,D)]$ for a quaternion division algebra D, Archiv der Mathematik, 90 (2008), 493–500. [13] V. I. Yanchevskii. Reduced Whitehead groups and the conjugacy problem for special unitary groups of anisotropic Hermitian forms. Zap. nauchn. sem. POMI, 400 (2012), 222–245; J. Math. Sci. (N. Y.), 192:2 (2013), 250–262.

Institute of Mathematics,
National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: yanch@im.bas-net.by

I. Zhdanovskiy (Moscow, MIPT and HSE)

Commutators and projective geometry.

This talk is based on joint work with Anna Kocherova (MIPT). In our talk we will tell about connection commutativity and projective geometry.

Also, we will presume that all algebras are defined over $\mathbb{C}$, associative and unital.

Firstly, let us make some remark. Consider algebra R with commutative subalgebra S. Assume that there is a surjective morphism of S-modules: $S^{\oplus r} \to R$. In this case dimension of irreducible R-modules is less or equal r. Actually, let V be irreducible R-module. Consider V as S-module. Since S is commutative there is a one-dimensional S-module M such that $M \subset V$. Using standard arguments, we get that $\mathrm{Hom}_S(M,V) \cong \mathrm{Hom}_R(R \otimes_S M, V) \neq 0$. Since V is irreducible S-module, we obtain that morphism $R \otimes_S M \to V$ is surjective, and hence, $\dim_{\mathbb{C}} V \leq r$. There are many examples of algebras with property: dimension of irreducible representations is bounded: finite-dimensional algebras, affine Hecke algebras, group algebras of amenable discrete matrix groups etc. These algebras play intermediate role between commutative algebras and algebras closely related to free ones.

Let A and B be a finite-dimensional algebras. Fix subspaces $\overline{A} \subset A$ and $\overline{B} \subset B$ such that $A = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \overline{A}$ and $B = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \overline{B}$.

Proposition 1. Let V be a subspace $\overline{A} \oplus \overline{B} \subset A * B$. Denote by I the two-sided ideal of $A * B$ such that $[V,V] \subset I$. Denote by C the quotient $\mathcal{C} = A * B/I$. If natural projections $\pi_1 : V \to \overline{A}$ and $\pi_2 : V \to \overline{B}$ are surjective then dimension of irreducible representations of $\mathcal{C}$ is less or equal $\min(\dim_{\mathbb{C}} A, \dim_{\mathbb{C}} B)$.

This proposition can be formulated in terms of quantum mechanics as follows. Assume that there are two algebras of observables A and B. Consider quantum system generated by A and B. Also, assume that there are observables of type a_i+b_i which are simultaneously compatible, where a_i and b_i generate A and B as vector space respectively. In this case one can reduce quantum system into direct sum of quantum system of rank less or equal $\min(\dim_{\mathbb{C}} A, \dim_{\mathbb{C}} B)$.

Consider the case $A \cong B \cong \mathbb{C}^{\oplus 3}$. Denote by $p_i, i = 1, 2, 3$ and $q_i, i = 1, 2, 3$ the orthogonal idempotents of A and B respectively. It is easy that $\sum_{i=1}^{3} p_i = \sum_{j=1}^{3} q_j = 1$. Let $\overline{A}$ and $\overline{B}$ be the two-dimensional subspaces with bases p_1, p_2 and q_1, q_2 respectively. Consider the set of two-sided ideals of $A * B$ generated by own element of $p_x = x_{11}[p_1, q_1] + x_{12}[p_1, q_2] + x_{21}[p_2, q_1] + x_{22}[p_2, q_2]$ for $x \in \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*) = \mathbb{P}^3$. Thus, we have a family algebras $\mathcal{C}_x = A * B/I_x, x \in \mathbb{P}^3$, where I_x is generated by p_x.

Consider $\mathrm{Gr}(2, 4) = \mathrm{Gr}(2, \overline{A} \oplus \overline{B})$. We have the following mapping: $f : \mathrm{Gr}(2, \overline{A} \oplus \overline{B}) \dashrightarrow \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$ defined by correspondence $(w_1, w_2) \mapsto (x_{11} : x_{12} : x_{21} : x_{22})$, where $[w_1, w_2] = x_{11}[p_1, q_1] + x_{12}[p_1, q_2] + x_{21}[p_2, q_1] + x_{22}[p_2, q_2]$, where w_1, w_2 is a basis of W. It can be shown in usual way that f does not depend on the choice of basis of W. Map f is a composition of Plucker embedding into $\mathbb{P}(\Lambda^2(\overline{A} \oplus \overline{B})) = \mathbb{P}^5$ and projection onto $\mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$. It is well-known that image of $\mathrm{Gr}(2, 4)$ is a Plucker quadric. Projection $\mathrm{Gr}(2, \overline{A} \oplus \overline{B})$ onto $\mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$ is not defined in two points corresponding to subspaces $\overline{A}$ and $\overline{B}$. Thus, $f^{-1}(x)$ is a conic without two points for any $x \in \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$.

Denote by Z_A and Z_B the subvarieties of $\mathrm{Gr}(2, \overline{A} \oplus \overline{B})$ consisting of W such that $W \cap \overline{A} \neq 0$ and $W \cap \overline{B} \neq 0$ respectively.

Proposition 2. Consider quadric $Q \subset \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$ given by equation $x_{11}x_{22} = x_{12}x_{21}$. Denote by $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 \subset Q$ the line given by equations: $x_{11} = x_{12} = 0$, $x_{21} = x_{22} = 0$, $x_{11} = x_{21} = 0$, $x_{12} = x_{22} = 0$, $x_{11} = x_{12}, x_{21} = x_{22}$ and $x_{11} = x_{21}, x_{12} = x_{22}$ respectively. Then we have the following statements:

- $f(Z_A) = f(Z_B) = Q$ and $f^{-1}(Q) = Z_A \cup Z_B$
- for any point $x \in Q$ there is a subspace $W \in f^{-1}(x)$ with basis a, b where $a \in \overline{A}$ and $b \in \overline{B}$. It means that we can write generator of ideal in the following manner: $[a, b]$

- for any $x \in \bigcup_{i=1}^{6} l_i$ there is a subspace $W \in f^{-1}(x)$ with basis $p_k, b \in \overline{B}$ or $a \in \overline{A}, q_k$ for arbitrary $k \in \{1,2,3\}$.

Corollary

- If $x \in Q \setminus \bigcup_{i=1}^{6} l_i$ then algebra $\mathcal{C}_x \cong \mathbb{C}^{\oplus 9}$
- if $x \in \bigcup_{i=1}^{6} l_i \setminus \bigcup_{i \neq j} l_i \cap l_j$ then algebra $\mathcal{C}_x \cong \mathbb{C}^{\oplus 6} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$
- if $x \in \bigcup_{i \neq j} l_i \cap l_j$ then $\mathcal{C}_x \cong \mathbb{C}^{\oplus 4} * \mathbb{C}^{\oplus 2} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$.

Consider open dense set $U = \mathrm{Gr}(2, \overline{A} \oplus \overline{B}) \setminus \{Z_A \cup Z_B\}$. It is easy that $W \in U$ iff $\pi_1(W) = \overline{A}$ and $\pi_2(W) = \overline{B}$.

Proposition 3 We have the following isomorphism $\mathcal{C}_x \cong \mathbb{C}^{\oplus 9} \oplus M_3(\mathbb{C})$ for general $x \in U$.

Three-dimensional representations of algebras $\mathcal{B}_x, x \in \mathbb{P}^3$ have the following geometrical description. Consider orthogonal projectors p_1, p_2, p_3 and q_1, q_2, q_3 of rank 1 acting in three-dimensional vector space V. We interpret images of projectors $p_i, i = 1,2,3$ and $q_j, j = 1,2,3$ as points in $\mathbb{P}V = \mathbb{P}^2$. Denote by P_1, P_2, P_3 and Q_1, Q_2, Q_3 the points in $\mathbb{P}V = \mathbb{P}^2$ corresponding to images of projectors p_1, p_2, p_3 and q_1, q_2, q_3 respectively. It is easy that points P_1, P_2, P_3 define orthogonal projectors p_1, p_2, p_3. Analogous statement true for points Q_1, Q_2, Q_3 and projectors q_1, q_2, q_3. Consider the commutator space generated by $[p_i, q_j], i, j = 1,2,3$. Using relations $\sum_{i=1}^{3} p_i = \sum_{j=1}^{3} q_j = 1$, we get that dimension of commutator space is less or equal 4.

Proposition 4. Commutator space generated by $[p_i, q_j]$ has dimension less or equal 3 if and only if there is a conic passing through points $P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3$.

Recall that moduli variety of six ordered points in a conic is Igusa quartic I_Q. Using proposition 4, this variety parameterizes (up to isomorphism) three-dimensional representations of algebras $\mathcal{C}_x, x \in \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*) = \mathbb{P}^3$. Consider the mapping: $g : I_Q \to \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$ defined by the natural correspondence. It can be shown in usual way that g is birational.

Proposition 5. Algebra $\mathcal{C}_x, x \in \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$ is infinite-dimensional iff $\dim_{\mathbb{C}} g^{-1}(x) > 0$.

In particular, if $x = (1 : 0 : 0 : -1)$ then algebra $\mathcal{B}_x$ is infinite-dimensional (cf [1]).

Also, one can formulate the proposition 4 in terms of linear operators:

Corollary. Consider two linear operators L_1, L_2 acting in three-dimensional space V. Eigenvectors of L_1 and L_2 define configuration of six points in $\mathbb{P}^2$. If there is a conic passing through these six points then there are a polynomials f_1, f_2 such that $[L_1 + f_1(L_2), L_1^2 + f_2(L_2)] = 0$ and $\deg f_i \leq 2, i = 1, 2$.

There is a well-defined Gale involution on the set of configurations of $2k + 2$ points (i.e. PGL_{k+1} - orbits) in $\mathbb{P}^k$ (cf [2]). If configuration is fixed under Gale transform, then configuration is *self-associated.* In particular, configuration of 6 points in $\mathbb{P}^2$ is self-associated iff there is a conic passing through these 6 points.

Consider two linear operators L_1 and L_2 acting on three-dimensional vector space V. Consider moduli variety $\mathcal{M}$ of pairs (L_1, L_2) up to action of $\mathrm{PGL}(V)$. It is known that there is a well-defined involution τ on $\mathcal{M}$ (cf.[3]). There is a surjective morphism $\mathcal{M} \to \mathbb{C}^6$ given by functions $\mathrm{Tr}L_1^i, \mathrm{Tr}L_2^i, i = 1, 2, 3$. The fiber of this morphism is a moduli of configurations of six points in $\mathbb{P}^2$. Involution τ is well-defined on fibers and coincides with Gale involution.

Also, we have the following generalization of proposition 4.

Proposition 6. Consider orthogonal projectors $p_1, ...p_{k+1}$ and $q_1, ..., q_{k+1}$ of rank 1 acting on $k + 1$ - dimensional vector space V. It is clear that these projectors are defined (up to conjugacy) by configuration of $2k + 2$ points in $\mathbb{P}V = \mathbb{P}^k$. This configuration is self-associated iff commutator space $[p_i, q_j], i, j = 1, ..., k + 1$ has dimension less or equal $\frac{k(k+1)}{2}$.

References. [1] Kocherova, Zhdanovskiy On the algebra generated by projectors with commutator relation // Lobachevskii Journal of Math, 2017, vol.38, No.4, p.670-687. [2] Eisenbud, Popescu Projective geometry of the Gale transform // Journal of Algebra, 230, 127-173(2000). [3] Lawton Poisson geometry of $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ - character varieties relative to a surface with boundary // Trans.of the Amer. Math. Soc. vol.365, No.5, May 2009, p.2397-2429

e-mail: ijdanov@mail.ru

A. V. Zhuchok (Starobilsk, Ukraine)

On free abelian doppelsemigroups

Recall that a nonempty set D equipped with two binary associative operations $\dashv$ and $\vdash$ satisfying the axioms

$$(x \dashv y) \vdash z = x \dashv (y \vdash z), \quad (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$$

is called a doppelsemigroup [1]. Doppelsemigroups are closely related to interassociative semigroups (see, e.g., [2]). For more information on doppelsemigroups see [3]. A doppelsemigroup $(D, \dashv, \vdash)$ will be called abelian if $x \dashv y = y \vdash x$ for all $x, y \in D$. A doppelsemigroup which is free in the variety of abelian doppelsemigroups will be called a free abelian doppelsemigroup.

Let X be an arbitrary nonempty set, $F[X]$ the free semigroup on X and $F^*[X]$ the free commutative semigroup on X. The length of an arbitrary word ω in the alphabet X will be denoted by l_ω. Consider the sets

$$A_1 = \{w \in F[X] \mid l_\omega \in \{1, 2\}\}, \quad A_2 = \{w \in F^*[X] \mid l_\omega > 2\}.$$

Define binary operations $\dashv$ and $\vdash$ on $A_1 \cup A_2$ by $w \dashv u = wu$ and

$$w \vdash u = \begin{cases} uw, & w, u \in X, \\ wu & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $w, u \in A_1 \cup A_2$. The algebra obtained in this way will be denoted by $FAD(X)$.

Theorem 1. $FAD(X)$ is the free abelian doppelsemigroup.

Note that the semigroup $(A_1 \cup A_2, \vdash)$ is the dual to the semigroup $(A_1 \cup A_2, \dashv)$. The free abelian doppelsemigroup $FAD(X)$ is determined uniquely up to isomorphism by cardinality of the set X. Hence, the automorphism group of $FAD(X)$ is isomorphic to the symmetric group on X.

The free doppelsemigroup is given in [1] (see also [3]). Recall this construction.

Let T be the free monoid on the two-element set $\{a, b\}$ and $\theta \in T$ the empty word. By definition, the length l_θ of θ is equal to 0. Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on $F = \{(w, u) \in F[X] \times T \mid l_w - l_u = 1\}$ by

$$(w_1, u_1) \dashv (w_2, u_2) = (w_1 w_2, u_1 a u_2),$$

$$(w_1, u_1) \vdash (w_2, u_2) = (w_1 w_2, u_1 b u_2)$$

for all $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in F$. The algebra $(F, \dashv, \vdash)$ is denoted by $FDS(X)$.

Theorem 2. ([1], Theorem 3.5) $FDS(X)$ is the free doppelsemigroup.

The descriptions of the least commutative congruence, of the least n-nilpotent congruence, of the least n-dinilpotent congruence and of the least left (right) n-dinilpotent congruence on a free doppelsemigroup can be found in [1, 3].

If ρ is a congruence on a doppelsemigroup $(D, \dashv, \vdash)$ such that $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ is an abelian doppelsemigroup, we say that ρ is an abelian congruence.

Theorem 3. Let $FDS(X)$ be the free doppelsemigroup, $(x_1x_2\ldots x_n, u) \in FDS(X)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ and $FAD(X)$ the free abelian doppelsemigroup. Then the map

$$\mu : FDS(X) \to FAD(X) :$$

$$(x_1x_2\ldots x_n, u) \mapsto (x_1x_2\ldots x_n, u)\mu = \begin{cases} x_2x_1, & n = 2, u = b, \\ x_1x_2\ldots x_n & \text{otherwise} \end{cases}$$

is an epimorphism inducing the least abelian congruence on $FDS(X)$.

We also consider the problem of the description of congruences on free abelian doppelsemigroups.

References. [1] A. V. Zhuchok. Free products of doppelsemigroups. Algebra Univers., 77, no. 3 (2017), 361–374. [2] B. N. Givens, A. Rosin, K. Linton. Interassociates of the bicyclic semigroup. Semigroup Forum, 94 (2017), 104–122. [3] A. V. Zhuchok. Relatively free doppelsemigroups. Monograph series Lectures in Pure and Applied Mathematics. Germany, Potsdam: Potsdam University Press. 5 (2018), 86 p.

Luhansk Taras Shevchenko National University

e-mail: zhuchok.av@gmail.com

Yu. V. Zhuchok (Starobilsk, Ukraine)

On automorphisms of the endomorphism monoid of a free abelian diband

A nonempty set D with two binary associative operations $\dashv$ and $\vdash$ is called a *dimonoid* [1] if for all $x, y, z \in D$ the following conditions hold:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z).$$

A dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is called *abelian* if $x \dashv y = y \vdash x$ for all $x, y \in D$. If for a dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ the semigroups $(D, \dashv)$ and $(D, \vdash)$ are bands, then this dimonoid is called a *diband*.

An idempotent semigroup S is called a *left* (respectively, *right*) *normal band* if $axy = ayx$ (respectively, $xya = yxa$) for all $a, x, y \in S$. A dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is called a (ln, rn)-*diband* [2] if $(D, \dashv)$ is a left normal band and $(D, \vdash)$ is a right normal band.

Theorem 1. An arbitrary dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is an abelian diband if and only if $(D, \dashv, \vdash)$ is a (ln, rn)-diband.

Let X be a nonempty set and $FS(X)$ the free semilattice of all nonempty finite subsets of X with respect to the operation of the set theoretical union. Define two binary operations $\dashv$ and $\vdash$ on the set

$$B_{lz,rz}(X) = \{(a, A) \in X \times FS(X) | a \in A\}$$

as follows:

$$(x, A) \dashv (y, B) = (x, A \cup B),$$

$$(x, A) \vdash (y, B) = (y, A \cup B).$$

By Lemma 8 of [2], $(B_{lz,rz}(X), \dashv, \vdash)$ is the free (ln, rn)-diband. From here and from Theorem 1 we immediately obtain

Corollary 2. $(B_{lz,rz}(X), \dashv, \vdash)$ is the free abelian diband.

The problem of the description of automorphisms of the endomorphism semigroup for free algebras in a certain variety was raised by B. I. Plotkin in his papers on universal algebraic geometry (see, e.g., [3]).

We consider the mentioned problem for the variety of free abelian dibands.

Theorem 3. The automorphism group $Aut(End(B_{lz,rz}(X), \dashv, \vdash))$ is isomorphic to the symmetric group $S(X)$.

Note that the automorphism groups of the endomorphism monoid of a free semigroup and a free monoid were described in [4]. The similar results for the varieties of commutative dimonoids and commutative g-dimonoids were obtained in [5, 6].

References. [1] J.-L. Loday. Dialgebras, in: Dialgebras and related operads. Lect. Notes Math., Springer-Verlag, 1763 (2001), 7–66. [2] A. V. Zhuchok. Free normal dibands. Algebra and Discrete Math., 12 (2011), no. 2, 112–127. [3] B. I. Plotkin. Algebras with the same (algebraic) geometry. Proceedings of the Steklov Institute of Math., 242 (2003), 176–207. [4] G. Mashevitsky, B. M. Schein. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup. Proceedings of the AMS, 131 (2003), no. 6, 1655–1660. [5] Yu. V. Zhuchok. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free commutative g-dimonoid. Algebra and Discrete Math., 21 (2016), no. 2, 295–310. [6] Yu. V. Zhuchok. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free commutative dimonoid. Communications in Algebra, 45 (2017), no. 9, 3861–3871.

Luhansk Taras Shevchenko National University

e-mail: zhuchok.yu@gmail.com

A. N. Zubkov (Omsk)

Harish-Chandra pair approach to the algebraic group superscheme theory

This is a survey of the recent results of the author and A.Masuoka, based on the last few years progress in the understanding of structure of algebraic supergroups via associated Harish-Chandra pairs. We also discuss Fioresi-Carmeli-Gavarini's contribution to this theory as well as Vishnyakova's one. The main topics of my talk are the following.

1. **Unipotent and nilpotent affine supergroups** (see [4, 6, 9]).

Theorem 1. Let G be an algebraic affine supergroup. Then G is unipotent if and only if its largest purely even super-subgroup G_{ev} is. Furthermore, G is nilpotent if and only if there is a central multiplicative super-subgroup M of G such that G/M is unipotent.

2. **Solvable affine supergroups** (see [6]).

Theorem 2. If an affine supergroup G is even-trigonalizable, then there is a subnormal series

$$1 \leq N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N_t = G,$$

such that each quotient N_i/N_{i-1} is isomorphic to a supergroup from the list G_a, G_a^-, $G_m, \mu_n(n > 1)$. In particular, if G is connected and smooth, then G is solvable if and only if G_{ev} is.

3. **Reductive and geometrically reductive affine supergroups.**

Theorem 3. An affine algebraic supergroup is geometrically reductive if and only if G_{ev} is.

In my talk I will give an example of reductive affine supergroup G such that its largest super-subgroup G_{ev} is a product of torus and unipotent group. This example shows that well known Haboush's theorem does not hold in the category of supergroup. It also inspires the problem to describe reductive affine even-trigonalizable supergroups.

4. **Harish-Chandra pair approach to (not necessary affine) algebraic group superschemes** (see [1, 2, 5, 7, 8]).

Theorem 4. Let G be an algebraic group superscheme. Then G contains a largest affine normal super-subgroup G_{aff} such that G/G_{aff} does not contain non-trivial normal affine super-subgroups.

If G is a group supervariety, i.e. G is connected and smooth, then this theorem is a weak version of well known Barsotti-Chevalley theorem.

Recall that a group supervariety G is called pseudo-abelian if $G_{aff} = 1$. On contrary to the purely even case, even if the ground field is perfect, a pseudo-abelian supervariety is not always abelian.

One can prove that if G is an abelian supervariety, then G_{ev} is abelian normal subvariety of G and G/G_{ev} is a purely odd unipotent supergroup.

We conclude our talk with an example of a pseudo-abelian supervariety G (over arbitrary ground field) such that G_{ev} is a product of a torus and an abelian variety, but G is not abelian.

References. [1] C. Carmeli, R. Fioresi, *Super distributions, analytic and algebraic super Harish-Chandra pairs*, Pacific J. Math. 263 (2013), 29–51. [2] F. Gavarini, *Global splittings and super Harish–Chandra pairs for affine supergroups*, Trans. Am. Math. Soc. 368 (2016) 3973–4026, preprint arXiv:1308.0462v6. [3] J. Milne, *A proof of the Barsotti-Chevalley theorem on algebraic Groups*, ArXiv : 1311.6060v2. [4] A. Masuoka, *Harish-Chandra pairs for algebraic affine supergroup schemes over an arbitrary field*, Transform. Groups 17(2012), no.4, 1085–1121. [5] A. Masuoka, T. Shibata, *Algebraic supergroups and Harish–Chandra pairs over a commutative ring*, Trans. Am. Math. Soc. 369(2017), no.5, 3443–3482, preprint arXiv:1304.0531v7. [6] A. Masuoka and A. N. Zubkov, *Solvability and nilpotency for algebraic supergroups*, Journal of Pure and Applied Algebra, 221(2017), 339–365. [7] A. Masuoka and A. N. Zubkov, *Algebraic group superschemes*, in preparation. [8] E. G. Vishnyakova, *On complex Lie supergroups and split homogeneous supermanifolds*, Transform. Groups, 16 (2011), no. 1, 265–285. [9] P. A. Ulyashev and A. N. Zubkov, *Solvable and unipotent supergroups*, Algebra and Logic (Russian), 53, N 3 (2014), 323–339.

Sobolev Institute of Mathematics, Omsk branch, 644043, Pevtzova 13;
Omsk State Technic University, Mira 11, 644050, Omsk, Russia

e-mail: a.zubkov@yahoo.com

Авторский указатель