О ПРИНЦИПЕ ПРИЧИННОСТИ

П.Н. Александров[o]
[o] ЦГЭМИ ИФЗ РАН, Троицк
alexandr@igemi.troitsk.ru

Ключевые слова: принцип причинности, теория фильтрации, дисперсия физических параметров.

Частотная дисперсия физических параметров связана с частотной зависимостью их от частоты. Во временной области эти параметры, входящие в материальные уравнения, являются операторами и описывают свойства сред с памятью. При описании диспергирующих свойств сред необходимо учитывать принцип причинности, из которого следует, что причина не может опережать следствие. В общем случае, линейные среды описываются с помощью интегралов свертки вида

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (1)$$

где $f(t)$ - воздействие на систему, описывающейся передаточной функцией $G(t)$, $F(t)$ - результат воздействия, t - время.

Причинно-следственные связи описываются с помощью причинных функций, которые обладают следующими свойствами

$f(t)=\begin{cases} f(t), t>0 \\ 0, t<0 \end{cases}$, воздействие на систему как причинная функция,

$F(t)=\begin{cases} F(t), t>0 \\ 0, t<0 \end{cases}$, результат воздействия, также причинная функция.

Как следствие этого, и передаточная функция также будет являться причинной функций

$$G(t)=\begin{cases} G(t), t>0 \\ 0, t<0 \end{cases} \qquad (2)$$

Действительно, если воздействие на среду – причинная функция и результат воздействия также причинная функция, а передаточная функция достаточно произвольная, то интеграл свертки (1) примет вид

$$F(t)=\int\limits_{0}^{\infty}G(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int\limits_{-\infty}^{t}G(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Для того чтобы причинность сохранялась необходимо, чтобы выполнялось (2). Тогда интеграл сверки (1) сводится к интегралу Дюамеля [1]

$$F(t)=\int\limits_{0}^{t}G(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int\limits_{0}^{t}G(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

из которого следует, что свертка двух причинных функций есть причинная функция.

Иначе говоря, физические параметры среды также описываются с помощь причинных функций. Вследствие этого, пока воздействие на физическую систему не происходит, физический параметр равен нулю.

В противном случае принцип причинности нарушается.

Этот же вывод справедлив и для обратного оператора физического параметра.

Отсюда следует, что передаточная функция, ее прямой $G(t)$ и обратный оператор $G^{-1}(t)$, должны описываться причинными функциями.

Важным свойством причинных функций является связь действительной и мнимой частей их спектров. Действительно, представим причинную функцию во временной области в виде суммы четной $f_c(t)$ и нечетной $f_n(t)$ функций

$$f(t) = f_c(t) + f_n(t),$$

где

$$f_c(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

$$f_n(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Введем знаковую функцию

$$sign(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ -1, t < 0 \end{cases}$$

Тогда четная и нечетная функции будут непосредственно связаны уравнениями

$$f_c(t) = f_n(t) sign(t)$$

и

$$f_n(t) = -f_c(t) sign(t).$$

Спектр знаковой функции имеет вид

$$sign(t) \to \frac{1}{i\omega} = -i\frac{1}{\omega}$$

где $i = \sqrt{-1}$, ω - частота.

Отсюда следует, что спектр причинной функции обязан иметь и действительную и мнимую части, связанные преобразованиями Гильберта

$$\mathrm{Re}(f(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(f(v))}{\omega - v} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(f(\omega - v))}{v} dv$$

$$\mathrm{Im}(f(\omega)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(f(v))}{\omega - v} dv = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(f(\omega - v))}{v} dv$$

поскольку, согласно свойствам преобразования Фурье, произведение во временной области функций времени есть свертка в частотной области их спектров, и наоборот.

Отметим, что дельта-функция Дирака [2] не является причинной функцией поскольку у ее спектра отсутствует мнимая часть. Однако, если сместить вправо эту функцию на величину $\alpha > 0, \alpha \to 0$, то дельта функция вида $\delta(t-\alpha)$ оказывается причинной, поскольку появляется как действительная, так мнимая части спектра $\delta(t-\alpha) \to \mathrm{e}^{i\omega\alpha} = Cos(\omega\alpha) + iSin(\omega\alpha)$.

Таким образом, сдвиг в право по оси времени не некоторую конечную величину приводит к причинности дельта-функции.

Однако обратное преобразование Фурье обратной функции $\frac{1}{\mathrm{e}^{i\omega\alpha}} = \mathrm{e}^{-i\omega\alpha}$ приводит к нарушению принципа причинности для обратного оператора который равен $\mathrm{e}^{-i\omega\alpha} \to \delta(t+\alpha)$. Следовательно, если прямой оператор - причинная функция, то обратный оператор может терять причинность.

Рассмотрим конкретный пример, материальные уравнения из геоэлектрики [3]. Вызванная поляризация рассматривается как дисперсия удельной электропроводности $\sigma(t)$ в законе Ома, который во временной области имеет вид

$$\mathbf{J}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau)\mathbf{E}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\mathbf{E}(t-\tau)d\tau,$$

где $\mathbf{J}(t)$ - вектор плотности электрического тока, $\mathbf{E}(t)$ - напряженность электрического поля.

Иначе говоря, причиной появления электрического тока является напряженность электрического поля.

Согласно принципу причинности, все величины входящие в последнее выражение являются причинными функциями, т.е.

$$\mathbf{J}(t) = \begin{cases} \mathbf{J}(t), t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(t) = \begin{cases} \mathbf{E}(t), t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(t), t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

В этом случае размерность $\sigma(t)$ равна $\frac{Cm}{m \cdot c}$, в то время как удельная электропроводность имеет размерность $\frac{Cm}{m}$.

Следовательно, закон Ома примет вид интеграла Дюамеля

$$\mathbf{J}(t) = \int_0^t \sigma(t-\tau)\mathbf{E}(\tau)d\tau$$

определяющий причинно-следственную связь: причиной появления электрического тока является появление электрического поля. В этом случае электропроводность является некоторым оператором, иначе говоря ядром интегрального преобразования. Причинность приводит к тому, что в частотной области действительная и мнимая части связаны преобразованием Гильберта. В связи с этим причинные функции имеют как действительную, так и мнимую части спектра. В связи с этим, в случае наличия дисперсии электропроводности, спектр электропроводности должен иметь мнимую часть.

Этим же свойством должен удовлетворять оператор сопротивления $\rho(t) = \sigma^{-1}(t)$ в выражении

$$\mathbf{E}(t) = \int_0^t \rho(t-\tau)\mathbf{J}(\tau)d\tau.$$

Отметим, что удельное сопротивление также должна быть причинной функцией. Иначе говоря, если электропроводность является причинной функцией, то обратная величина (или обратный оператор) также является причинной функцией. В частотной области должно выполняться

$$\rho(\omega)\sigma(\omega)=1,$$

где $\sigma(\omega)$ - Фурье-преобразование функции $\sigma(t)$, $\rho(\omega)$ - Фурье преобразование функции $\rho(t)=\sigma^{-1}(t)$.

Последнее выражение во временной области имеет вид и имеет аналог из теории дифференциальных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}\rho(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau=\delta(t)$$

В этом случае $\sigma(t)$ - может играть роль дифференциального оператора, тогда $\rho(t)$ - есть функция Грина этого дифференциального оператора [2].

Следовательно, появляется задача об определении класса функций, обладающих вышеуказанными свойствами, описывающих физических параметры как функции частоты. При этом, если исследовать дисперсию электропроводности, то появляются два дополнительные условия $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega)=\sigma_0$ - электропроводность на постоянном токе, и $\lim\limits_{\omega\to\infty}\sigma(\omega)=i\omega\varepsilon_0$, где ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума.

Можно предположить, что удельная электропроводность в частотной области может быть описана отношением двух полиномов вида $\sigma(\omega)=\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{N+1}a_n(i\omega)^n}{\sum\limits_{n=0}^{N}b_n(i\omega)^n}$, причем полиномы порождаются произведениями следующих функций $\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{N+1}a_n(i\omega)^n}{\sum\limits_{n=0}^{N}b_n(i\omega)^n}=\sigma_0\dfrac{\prod\limits_{n=0}^{N+1}(1+i\omega c_n)^n}{\prod\limits_{n=0}^{N}(1+i\omega d_n)^n}$, где a_n,b_n,c_n,d_n - константы. Т.е. во временной области это есть производные по времени от свертки причинных функций (экспонент).

Отметим, что дробное дифференцирование приводит к нарушению принципа причинности. Пусть $\sigma(\omega)=\sigma^a(\omega)+(i\omega)^c$, где c - дробное число. Величина $\sigma^a(\omega)$ удовлетворяет преобразованию Гильберта

$$\mathrm{Re}(\sigma^a(\omega))=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}(\sigma^a(v))}{\omega-v}dv$$

$$\mathrm{Im}(\sigma^a(\omega))=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(\sigma^a(v))}{\omega-v}dv$$

Тогда должно выполняться

$$\mathrm{Re}((i\omega)^c) = \mathrm{Re}(i^c)\omega^c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}((i\omega)^c)}{\omega - \nu} d\nu = \mathrm{Im}((i^c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^c}{\omega - \nu} d\nu$$

$$\mathrm{Im}((i\omega)^c) = \mathrm{Im}(i^c)\omega^c = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}((i\omega)^c)}{\omega - \nu} d\nu = -\mathrm{Re}(i^c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^c}{\omega - \nu} d\nu$$

Во временной области это означает, что четная функция равна нечетной, что возможно для непричинных функций, а для причинных невозможно.

Литература

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1970. - 720с.

2. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. - М.:Мир,1978. - 518с.

3. Кормильцев В. В. Вызванная поляризация в уравнениях электродинамики: Препринт. [Науч. докл.] / В. В. Кормильцев. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. - 44 с.