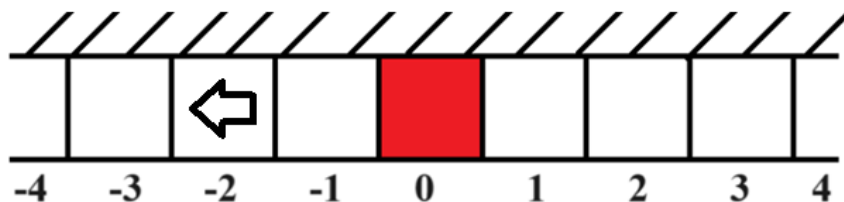


№1 (10 баллов) Вдоль стены в одну линию выложи квадратные плитки одинакового размера. Толщина линии — одна плитка. Среди всех плиток есть одна красная, остальные — белые. Красная плитка расположена так, что слева и справа от неё находится одинаковое число плиток.

В момент старта робот ориентирован строго влево (см. Схему). Стрелка на схеме обозначает первоначальное положение и ориентацию робота. Робот может двигаться вперёд и назад вдоль стенки по плиткам. Перемещаясь на одну плитку, робот останавливается в центре соседней.



Схема

Робот выполнил программу:

Начало

Повторить 5 раз

Вперёд на 3 плитки

Повторить 3 раза

Назад на 3 плитки

Вперёд на 1 плитку

Конец Повторить

Назад на 1 плитку

Конец Повторить

Назад на 2 плитки

Конец

Определите, на какой плитке окажется робот после окончания работы программы. Укажите положение робота относительно красной плитки. Ответ дайте в виде целого числа. Гарантируется, что в процессе выполнения программы робот всегда будет двигаться по плиткам.

Справка

Если после выполнения программы робот окажется на красной плитке, то запишите 0, если робот будет правее красной плитки, то запишите номер плитки, на которой находится робот (например 1), если робот находится левее красной плитке, то запишите номер плитки со знаком минус, (например -1).

10 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 20

Решение

Программа состоит из трёх частей — из цикла, из линейной части и из ещё одного цикла. Посчитаем положение робота, при этом проезд вперёд можно заменить на вычитание, проезд назад - на сложение, а цикл можно заменить на умножение: $-2 + 5 * (-3 + 3 * (+3 - 1) + 1) + 2 = 5 * (-2 + 6) = 20$

№2 (15 баллов) На робототехническом полигоне собрали лифт для роботов. Из набора шестерней (см. Состав набора) собрали самую сильную трёхступенчатую передачу. Ведущая ось передачи совершает 12 оборотов в минуту.

На ведомом валу передачи находится барабан, на который в один слой наматывается нерастяжимая нить. Другой конец нити через систему неподвижных блоков прикреплён к платформе лифта (См. Схему полигона). Определите, за сколько секунд робот на платформе лифта поднимется с 1 этажа на 3 этаж. Примите $\pi \approx 3,14$.

№	Число зубьев шестерёнок	Количество шестерёнок
1	20	1
2	30	2
3	45	2
4	60	1
5	90	2

Таблица Состав набора

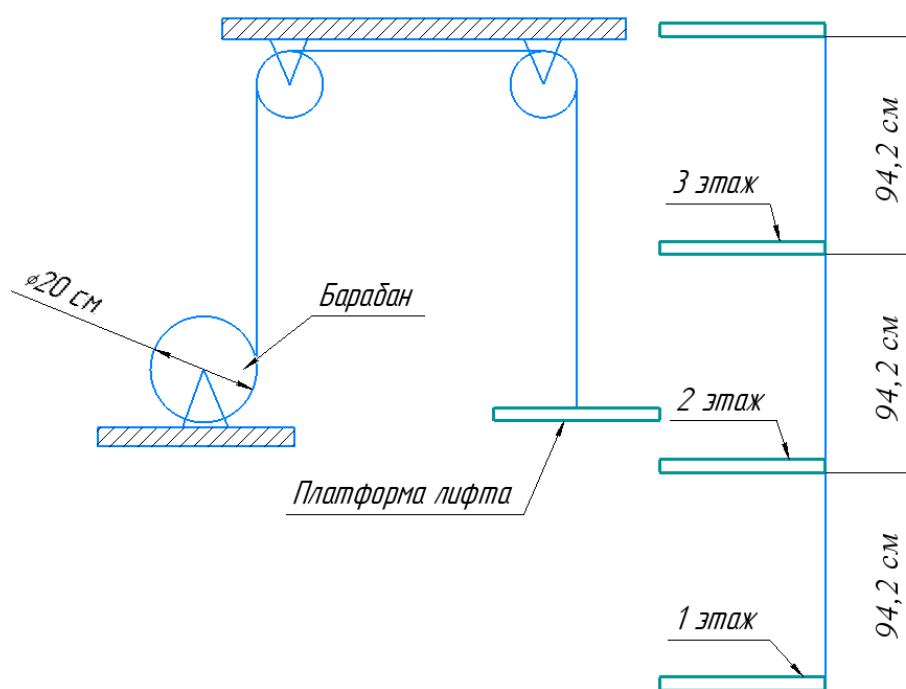


Схема полигона

15 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 405 с.

Решение

Частота вращения ведомой оси передачи равна:

$$12 \cdot (20 \cdot 30 \cdot 30) / (60 \cdot 90 \cdot 90) = 12 \cdot 1/27 = 4/9 \text{ (об./мин.)}$$

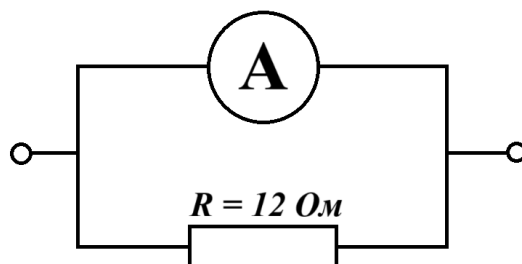
Расстояние, которое должен проехать на лифте робот:

$$(3-1) \cdot 94,2 = 188,4 \text{ (см)}$$

Определим время, за которое робот поднимется на лифте:

$$60 \cdot (188,4 / (\pi \cdot 20 \cdot 4/9)) \approx 60 \cdot 188,4 \cdot 9 / (3,14 \cdot 20 \cdot 4) = 405 \text{ (с)}$$

№3 (15 баллов) К амперметру подключили шунт (См. Шунтирование амперметра), и его предел измерения изменился с 5 А до 100 А. Определите сопротивление амперметра. Ответ дайте в омах.



Шунтирование амперметра

15 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 228

Решение

Определим сопротивление R самого амперметра.

Шунт подключается к амперметру параллельно. После подключения шунта к амперметру, через шунт потечёт ток

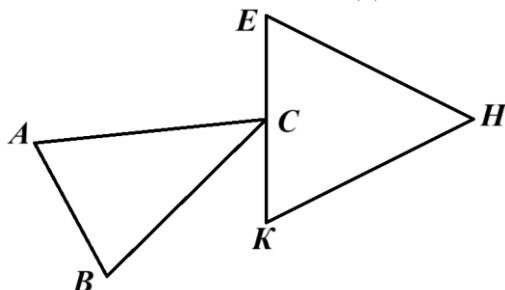
$$100 \text{ А} - 5 \text{ А} = 95 \text{ А}.$$

Напряжение на амперметре и на шунте одинаковое, значит, мы можем записать:

$$95 \text{ А} * 12 \text{ Ом} = 5 \text{ А} * R$$

$$R = 95 \text{ А} * 12 \text{ Ом} / 5 \text{ А} = 228 \text{ Ом}.$$

№4 (20 баллов) Робот движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (См. Рисунок) при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс. Изображение составлено из двух треугольников. Точки Е, С, К лежат на одной прямой, $AC=BC$, $EK=EN=KN$, $\angle ACB = 40^\circ$, $\angle BCK=15^\circ$. Определите минимальный суммарный угол поворота робота при проезде по всей траектории. Ответ дайте в градусах. Все повороты робот должен совершать на месте. **Робот не может ехать назад.**



Рисунок

Справочная информация

Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление поворотов робота не учитывается.

Так как робот не может ехать назад, то угол поворота робота равен углу, дополняющему угол многоугольника до 180° .

20 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 595° .

Решение

Так как $EK=EN=KN$, то треугольник ЕНК - равносторонний, значит каждый из его внутренних углов равен 60° .

Так как $AC=BC$, то треугольник АСВ - равнобедренный, значит

$$\angle A = \angle B = (180^\circ - \angle ACB) / 2 = (180^\circ - 40^\circ) / 2 = 70^\circ$$

Так как $\angle BCK = 15^\circ$, то $\angle ACE = 180^\circ - (15^\circ + 40^\circ) = 125^\circ$

Очевидно, что при объезде траектории нам придётся объехать один треугольник полностью, повернув при этом в каждой из вершин на угол, смежный с углом треугольника.

Так же напри придется поворачивать в вершине С при переходе от одного треугольника к другому. Выбор вершины, в которой мы стартует, поможет нам избежать поворота на угол, составляющий с углом фигуры 180° . Это верно для любых вершин кроме вершины С, поскольку один поворот в ней все равно придется сделать при переходе с треугольника на треугольник.

При переходе с одного треугольника на второй будем выбирать минимальный угол поворота. Если возвращаться на исходный треугольник через точку С, то поворачивать придется дважды. Поскольку робот не может ехать назад, то при втором повороте угол поворота будет отличаться от угла при первом повороте. Рассмотрим три траектории движения и выберем из них оптимальную.

Старт в любой вершине треугольника ЕНК, например, в Н. При движении робота по траектории Н-К-С-А-В-С-Е-Н суммарный угол поворота будет равен:

$$180^{\circ}-60^{\circ}+15^{\circ}+180^{\circ}-70^{\circ}+180^{\circ}-70^{\circ}+125^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}=600^{\circ}$$

Старт в вершине А или в вершине В. При движении робота по траектории А-С-К-Н-Е-С-В-А суммарный угол поворота будет равен:

$$15^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}+125^{\circ}+180^{\circ}-70^{\circ}=610^{\circ}$$

Старт в вершине С. При движении робота по траектории С-Е-Н-К-С-А-В-С суммарный угол поворота будет равен:

$$180^{\circ}-60^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}+180^{\circ}-(40^{\circ}+15^{\circ})+180^{\circ}-70^{\circ}+180^{\circ}-70^{\circ}=705^{\circ}$$

При движении робота по траектории С-К-Н-Е-С-В-А-С суммарный угол поворота будет равен:

$$180^{\circ}-60^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}+15^{\circ}+180^{\circ}-70^{\circ}+180^{\circ}-70^{\circ}=595^{\circ}$$

Получается, что минимальный угол поворота мы получим при старте в вершине С, минимальный суммарный угол поворота будет равен 595° .

№5 (15 баллов) Робота установили на ступеньке на высоте h над поверхностью полигона. Робот выстреливает шариком массы 20 г под углом к горизонту (см. Схему движения). Шарик вылетает с края ступеньки в сторону полигона. Определите, модуль скорости шарика, когда он коснётся поверхности полигона в первый раз. Ответ дайте в метрах в секунду с точностью до десятых. Примите $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебрегите.

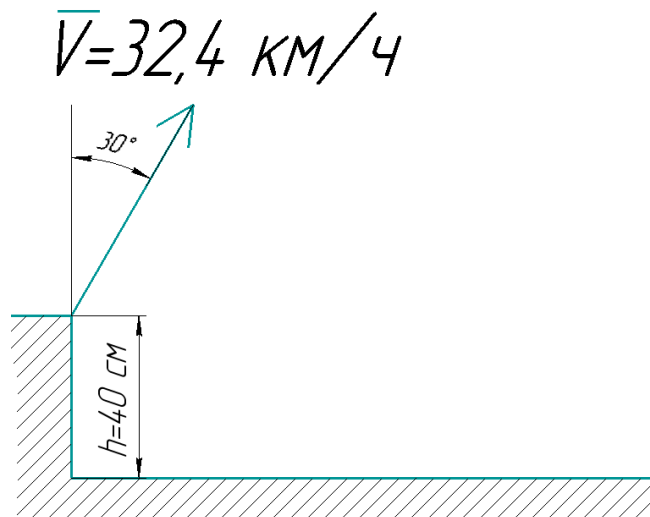


Схема движения

15 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 9,4

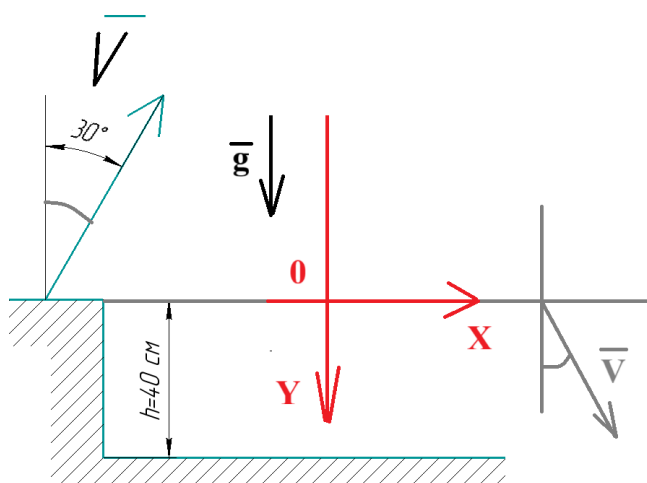
Решение

$32,4 \text{ км/ч} = 9 \text{ м/с}$

$40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$

Шарик сперва поднимется вверх, а потом полетит вниз.

Введём оси:



Так как сопротивлением воздуха мы пренебрегаем, то на высоте h над поверхностью полигона скорость шара будет равна V , а вектор скорости будет

направлен под углом 30° к вертикали. Значит, нам нужно определить, как изменится скорость за время спуска с высоты h .

$$V_x = V \cdot \sin 30^\circ$$

$$V_y = V \cdot \cos 30^\circ + gt$$

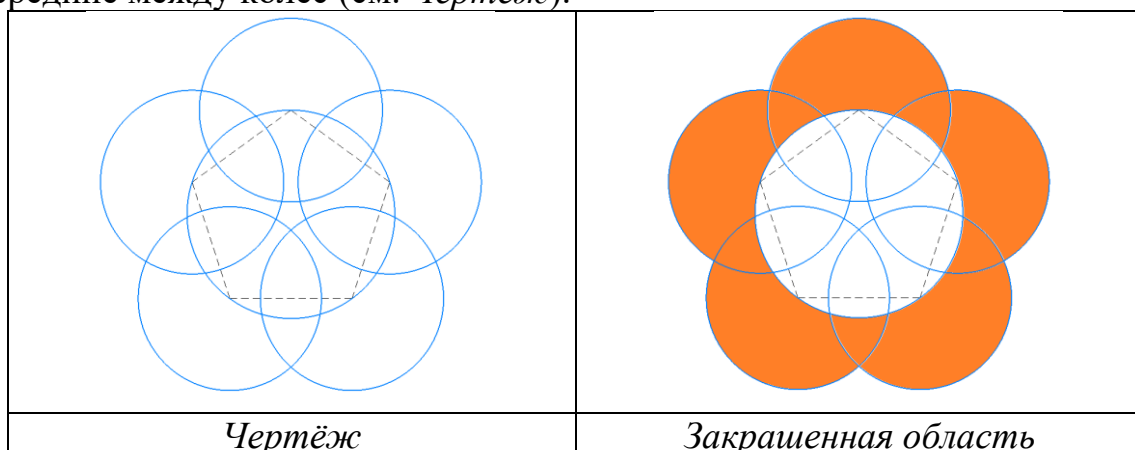
$$h = \frac{(V_y)^2 - (V \cos 30^\circ)^2}{2g}$$

$$V_y = \sqrt{2gh + (V \cos 30^\circ)^2} = \sqrt{2 * 10 * 0,4 + \left(9 * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{68,75} \text{ (м/с)}$$

Скорость шарика будет равна:

$$\sqrt{(9 * 0,5)^2 + (\sqrt{68,75})^2} = 9,4339... \approx 9,4 \text{ м/с}$$

№6 (25 баллов) Робот-чертёжник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс (см. *Чертёж*).



Вершины правильного пятиугольника являются центрами пяти окружностей диаметра 9 дм. Вокруг пятиугольника описана окружности. Длина стороны правильного пятиугольника равна 60 см. После того, как робот закончил чертить, полученный рисунок раскрасили (см. *Закрашенная область*).

Определите площадь закрашенной области. Ответ дайте в квадратных дециметрах, приведя результат с точностью до целых. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

25 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 168 дм²

Решение

9 дм = 90 см

Радиус каждой из пяти окружностей r:

$$90:2=45(\text{см})$$

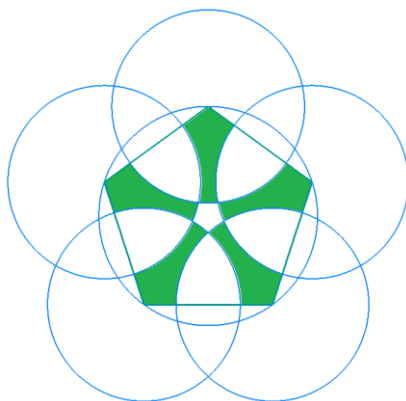
Обозначим за a сторону правильного пятиугольника.

Фигура представляет собой пять попарно пересекающихся кругов, из которых вычли круг, описанный вокруг пятиугольника и прибавили область криволинейного пятиугольника, которую круги не покрывают ни разу.

Определим площадь маленького криволинейного пятиугольника. Она будет равна как площадь пятиугольника без пяти половин общих частей кругов и пяти остаткам от сектора, центральный угол которого равен углу правильного пятиугольника, без двух половин общей части двух кругов.

Угол правильного пятиугольника равен:

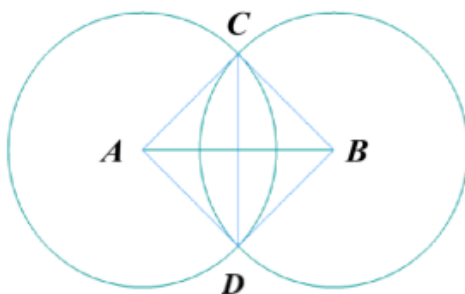
$$180^\circ \cdot 3:5 = 108^\circ$$



Площадь сектора окружности радиуса 45 см, градусная мера которого 108° , равна:

$$\pi * r^2 * \frac{108^\circ}{360^\circ} = \pi * 45^2 * \frac{108^\circ}{360^\circ} = 607,5\pi = 1907,55 \text{ см}^2$$

Определим площадь общей части двух кругов.



Определим величину центрального угла секторов, пересечение которых и образует общую часть двух окружностей:

$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \angle ACB \\ \cos \angle ACB &= \frac{2r^2 - a^2}{2r^2} = \frac{2 * 45^2 - 60^2}{2 * 45^2} = \frac{1}{9} \\ \sin \angle ACB &= \sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9} \end{aligned}$$

Центральный угол $\angle CBD$ будет равен:

$$2 * (180 - \arccos \angle ACB) : 2 = (180 - \arccos(\frac{1}{9})) = 96,379370... \approx 96,38^\circ$$

Площадь общей части двух кругов равна:

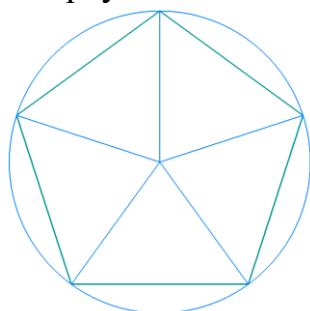
$$\begin{aligned} &2 * (\pi r^2 \frac{\angle CBD}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \angle CBD) \approx \\ &\approx 2 * 45^2 (3,14 * \frac{96,38}{360} - 0,5 * \sin(96,38^\circ)) = 1392,16479... \approx 1392,1648 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

Площадь закрашенного вытянутого криволинейного пятиугольника равна:

$$\begin{aligned} &\pi r^2 \frac{108^\circ}{360^\circ} - 2 * 0,5 * (2 * (\pi r^2 \frac{\angle CBD}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \angle CBD)) = \\ &= \pi r^2 \frac{108^\circ}{360^\circ} - 2\pi r^2 \frac{\angle CBD}{360^\circ} + r^2 \sin \angle CBD = \\ &= 1907,55 - 1392,1648 = 515,3852 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

Определим площадь правильного пятиугольника. Для этого проведём из центра описанной вокруг правильного пятиугольника окружности радиусы в вершины

пятиугольника. Получится, что пятиугольник разделён на 5 треугольников. Можно показать, что это равные треугольники.



Тогда радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника, равен:

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(360^\circ:5)$$

$$a^2 = R^2(2 - 2\cos(72^\circ))$$

$$R = a \sqrt{\frac{1}{2 - 2\cos(72^\circ)}} = 60 \sqrt{\frac{1}{2 - 2\cos(72^\circ)}} = 51,0390... \approx 51,039 \text{ (см)}$$

Площадь правильного пятиугольника равна:

$$5 * \frac{1}{2} * R^2 \sin(72^\circ) = \frac{5}{4} * \frac{a^2 \sin(72^\circ)}{1 - \cos(72^\circ)} = 6193,718642... \approx 6193,7186 \text{ см}^2$$

Площадь маленького криволинейного пятиугольника равна:

$$6193,7186 - 5 * 515,3852 - 5 * 0,5 * 1392,1648 = 136,3806 \text{ см}^2$$

Площадь пяти кругов с учётом пересечений равна:

$$5 * \pi * 45^2 - 5 * 1392,1648 = 24831,676 \text{ см}^2$$

Площадь круга, описанного вокруг пятиугольника равна:

$$\pi * a^2 * \left(\sqrt{\frac{1}{2 - 2\cos(72^\circ)}} \right)^2 = \frac{\pi * a^2}{2 - 2\cos(72^\circ)} = \frac{\pi * 60^2}{2 - 2\cos(72^\circ)} \approx 8179,651241... = 8179,6512 \text{ см}^2$$

Площадь закрашенной фигуры будет равна:

$$24831,676 - 8179,6512 + 136,3806 = 16788,4054 \text{ см}^2$$

$$16788,4054 \text{ см}^2 = 167,884054 \text{ дм}^2 \approx 168 \text{ дм}^2$$

Максимальный балл за работу равен 100 баллам