

9 – 10 классы

Максимальная оценка: за задачи 1 – 4 – по 16 баллов,

за задачи 5 – 6 – по 18 баллов.

Максимальный суммарный балл: 100.

Внимание! При вычислениях считать:

ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$,

универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

Задача 1. Найдите минимально необходимое количество фонарей для освещения прямоугольной аллеи длиной 300 метров и шириной 6 метров. Один фонарь освещает на поверхности круг радиусом 10 метров. Любая точка аллеи должна быть освещена хотя бы одним фонарем.

Ответ: 16.

Решение. Чтобы фонари покрывали светом осевую линию необходимо $\frac{300}{20} = 15$ фонарей. При этом все эти 15 фонарей должны быть расположены на осевой линии, и остаются области вблизи границ аллеи, куда свет не достигает. Смещение любого фонаря оставит часть осевой линии без освещения. Значит, 15-ти фонарей мало.

Покажем, что 16 фонарей достаточно. Расположим их вдоль осевой линии аллеи: каждый фонарь расположен в центре прямоугольника шириной 6 метров и длиной $2\sqrt{10^2 - 3^2} = 2\sqrt{91}$ метров. Тогда весь этот прямоугольник будет освещен, так как свет достает до каждого угла.

На 16 фонарей приходится длина $32\sqrt{91}$ метров, что больше 300.

Задача 2. Два туриста находились на привале, расположенном около прямолинейной дороги. Первый из них вышел в сторону расположенного на расстоянии 4 км дорожного знака. При этом закон его движения: $S = \sqrt{4 + 24t} - 2$, где t – время в часах; S – перемещение в километрах. Второй выехал на велосипеде через 10 минут после первого в ту же сторону и движется со скоростью 10 км/час. Найдите суммарную длину промежутка времени, в течение которого расстояние между туристами равно сумме двух расстояний: расстояния от первого туриста до знака и расстояния от второго туриста до знака. Ответ дайте в минутах, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.

Ответ: 46.

Решение, Закон движения первого туриста: $S = \sqrt{4 + 24t} - 2$, а второго – $S = 10 \left(t - \frac{1}{6}\right)$ при $t \geq \frac{1}{6}$, $S = 0$ при $t < \frac{1}{6}$.

Легко сообразить (достаточно изобразить ситуацию на рисунке), что требуемое условие выполняется тогда и только тогда, когда туристы находятся по разные стороны от этого знака (тот или другой могут находиться и в предельной точке – на линии знака).

Так как первый турист достигает знака в такой момент времени t_1 , что $\sqrt{4 + 24t_1} - 2 = 4$, то $t_1 = \frac{4}{3}$.

Второй достигает знака в такой момент t , что $10 \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 4$, то есть при $t = \frac{17}{30}$.

Значит, подходящие моменты времени $t \in \left[\frac{17}{30}; \frac{4}{3}\right]$ часа после выхода первого туриста. А общая длина этого промежутка времени равна $\frac{4}{3} - \frac{17}{30} = \frac{23}{30}$ часа, то есть 46 минут.

Задача 3-1. Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 22 кг жидкости A , во второй – 17 кг жидкости B , а в третьей – 19 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости A суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 30,8.

Решение. По условию «плотность» жидкости A равна 22 кг на канистру, а жидкости B – 17 кг на канистру. Если в третьей цистерне содержится x кг жидкости A , то жидкости B будет $(19 - x)$ кг, и поэтому $\frac{x}{22} + \frac{19-x}{17} = 1$. Отсюда:
 $17x + 22 \cdot 19 - 22x = 22 \cdot 17$, $5x = 22 \cdot 19 - 22 \cdot 17 = 44$, $x = 8,8$.

Всего жидкости A получается: $22 + 8,8 = 30,8$ кг.

Задача 3-2. Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 16 кг жидкости A , во второй – 11 кг жидкости B , а в третьей – 13 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости A суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 22,4.

Задача 3-3. Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 18 кг жидкости A , во второй – 13 кг жидкости B , а в третьей – 15 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости A суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

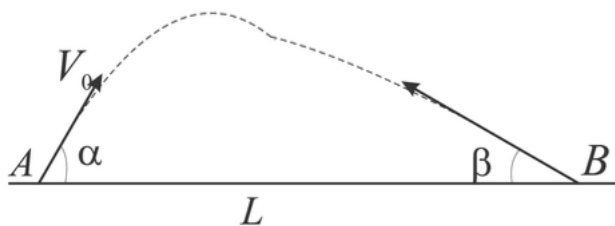
Ответ: 25,2.

Задача 3-4. Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 26 кг жидкости A , во второй – 21 кг жидкости B , а в третьей – 23 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости A суммарно

содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 36,4.

Задача 4. Яблоко брошено из точки A под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $V_0 = 10$ м/с. Из точки B , расположенной на расстоянии $L = 30$ м от точки A , в тот же момент времени под углом $\beta = 30^\circ$ к горизонту (см. рисунок) производится выстрел из арбалета так, что стрела попадает в яблоко. Через сколько секунд после выстрела это произойдет? Ответ при необходимости округлите до сотых. (Сопротивление воздуха не учитывать.)



Ответ: 1,5.

Решение. Перейдем в систему отсчета, падающую с ускорением g с нулевой начальной скоростью. Отсчет времени начинается в момент бросания яблока. В указанной системе отсчета и яблоко, и стрела движутся равномерно прямолинейно в силу закона сложения ускорений. Поэтому точка, в которой стрела попадет в яблоко, – это третья вершина C треугольника с основанием AB и углами α и β . Так как $\alpha + \beta = 90^\circ$, то треугольник ABC прямоугольный, и $AC = L \cdot \sin \beta = 30 \cdot \sin 30^\circ = 15$. Значит, $T = \frac{AC}{V_0} = \frac{L \cdot \sin \beta}{V_0} = 1,5$ с.

Задача 5. Спускаемые аппараты *Альфа* и *Бета* движутся вертикально вниз с постоянной скоростью под действием силы тяжести, силы сопротивления воздуха

и силы тяги тормозного двигателя. Спускаемый аппарат *Бета* вдвое большего диаметра будет двигаться с той же установившейся скоростью, что и аппарат *Альфа*, если сила тяги его тормозного двигателя будет в 15 раз больше. Оба аппарата – однородные шары одинаковой плотности, изменение массы которых в процессе спуска пренебрежимо мало. Считаем, что сила сопротивления создается абсолютно упругими ударами молекул воздуха о корпус аппарата.

Найдите отношение силы тяжести к силе тяги тормозного двигателя аппарата *Альфа*. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 2,75.

Решение. Для спускаемого аппарата *Альфа* имеем: $P = T + Q$, где P – сила тяжести; Q – сила сопротивления воздуха; T – сила тяги тормозного двигателя.

Так как аппарат *Бета* имеет вдвое больший диаметр, то для него сила тяжести равна $8P$ (масса пропорциональна объему), а сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поверхности и равна $4Q$.

Значит, $8P = 15T + 4Q$. Из получающейся системы
$$\begin{cases} P = T + Q, \\ 8P = 15T + 4Q \end{cases}$$

находим $\frac{P}{T} = \frac{11}{4} = 2,75$.

Задача 6. Тяжелый шкаф массой $M = 90$ кг, каркас которого выполнен из однородного дерева, имеет форму куба с ребром $a = 1$ м. Для его передвижения по горизонтальному полу к двум передним ножкам привязали веревку длиной 2,5 м. При этом на привязывание расходуется 1,5 м, так что та часть веревки, за которую тянут шкаф, равна 1 м. На сколько сантиметров над поверхностью пола нужно поднять натянутый свободный конец веревки, чтобы усилие, необходимое для перемещения шкафа, было наименьшим? Коэффициент трения равен $\mu = 0,3$, ножки маленькие и расположены по краям. При необходимости округлите ответ до целого числа сантиметров.

Ответ: 29.

Решение. При движении шкафа на него действуют силы: тяжести $m\vec{g}$ (известны и величина, и направление), натяжения нити \vec{T} (ее хотим минимизировать), нормальной реакции \vec{N} (знаем направление), трения скольжения \vec{F} (знаем направление и отношение к силе нормальной реакции). Последние две силы можем просуммировать и получим, что полная сила реакции \vec{R} (суммарная для всех ножек) направлена назад-вверх под углом β к вертикали, $\operatorname{tg} \beta = \mu$. Имеем три силы $m\vec{g}$, \vec{R} , \vec{T} , сумма которых равна нулю.

Поэтому, если последовательно приставить начало второго вектора \vec{R} к концу вектора $m\vec{g}$, затем начало вектора \vec{T} к концу вектора \vec{R} , то конец вектора \vec{T} совпадет с началом $m\vec{g}$. В этом треугольнике задана одна сторона, угол между ней и второй стороной. Минимальное значение модуля \vec{T} будет достигнуто, если $\vec{T} \perp \vec{R}$, тогда \vec{T} направлена под углом $90^\circ - \beta$ к вертикали, то есть под углом β к горизонту. Поэтому $\beta = \operatorname{arctg} \mu = \operatorname{arctg} 0,3$, и тангенс угла равен 0,3. Значит, искомая высота подъема веревки в сантиметрах равна $h = 100 \cdot \sin \beta$.

$$\text{Из тригонометрии } \cos^2 \beta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1}{1+0,3^2} = \frac{1}{1,09}, \sin^2 \beta = \frac{0,09}{1,09} = \frac{9}{109}.$$

$$\text{Поэтому } h = \frac{100 \cdot 3}{\sqrt{109}} \approx 28,73 \dots \text{ см. Округляем: } 29 \text{ см.}$$