

## 7 – 8 классы

**Максимальная оценка** за каждую задачу: 20 баллов,

**Максимальный суммарный балл:** 100.

**Внимание!** При вычислениях считать:

**ускорение свободного падения**  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

**Задача 1.** Найдите минимально необходимое количество фонарей для освещения прямоугольной аллеи длиной 300 метров и шириной 6 метров. Один фонарь освещает на поверхности круг радиусом 10 метров. Любая точка аллеи должна быть освещена хотя бы одним фонарем.

Ответ: 16.

Решение. Чтобы фонари покрывали светом осевую линию необходимо  $\frac{300}{20} = 15$  фонарей. При этом все эти 15 фонарей должны быть расположены на осевой линии, и остаются области вблизи границ аллеи, куда свет не достигает. Смещение любого фонаря оставит часть осевой линии без освещения. Значит, 15-ти фонарей мало.

Покажем, что 16 фонарей достаточно. Расположим их вдоль осевой линии аллеи: каждый фонарь расположен в центре прямоугольника шириной 6 метров и длиной  $2\sqrt{10^2 - 3^2} = 2\sqrt{91}$  метров. Тогда весь этот прямоугольник будет освещен, так как свет достает до каждого угла.

На 16 фонарей приходится длина  $32\sqrt{91}$  метров, что больше 300.

**Задача 2.** Два туриста находились на привале, расположенном около прямолинейной дороги. Первый из них вышел в сторону расположенного на расстоянии 4 км дорожного знака. При этом закон его движения:  $S = \sqrt{4 + 24t} - 2$ , где  $t$  – время в часах;  $S$  – перемещение в километрах. Второй выехал на велосипеде через 10 минут после первого в ту же сторону и движется со скоростью 10 км/час. Найдите суммарную длину промежутка времени, в течение которого расстояние между туристами равно сумме двух расстояний: расстояния от первого туриста до знака и расстояния от второго туриста до знака. Ответ дайте в минутах, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.

Ответ: 46.

Решение, Закон движения первого туриста:  $S = \sqrt{4 + 24t} - 2$ , а второго –  $S = 10 \left(t - \frac{1}{6}\right)$  при  $t \geq \frac{1}{6}$ ,  $S = 0$  при  $t < \frac{1}{6}$ .

Легко сообразить (достаточно изобразить ситуацию на рисунке), что требуемое условие выполняется тогда и только тогда, когда туристы находятся по разные стороны от этого знака (тот или другой могут находиться и в предельной точке – на линии знака).

Так как первый турист достигает знака в такой момент времени  $t_1$ , что  $\sqrt{4 + 24t_1} - 2 = 4$ , то  $t_1 = \frac{4}{3}$ .

Второй достигает знака в такой момент  $t$ , что  $10 \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 4$ , то есть при  $t = \frac{17}{30}$ .

Значит, подходящие моменты времени  $t \in \left[\frac{17}{30}; \frac{4}{3}\right]$  часа после выхода первого туриста. А общая длина этого промежутка времени равна  $\frac{4}{3} - \frac{17}{30} = \frac{23}{30}$  часа, то есть 46 минут.

**Задача 3-1.** Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 22 кг жидкости  $A$ , во второй – 17 кг жидкости  $B$ , а в третьей – 19 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно

содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 30,8.

Решение. По условию «плотность» жидкости  $A$  равна 22 кг на канистру, а жидкости  $B$  – 17 кг на канистру. Если в третьей цистерне содержится  $x$  кг жидкости  $A$ , то жидкости  $B$  будет  $(19 - x)$  кг, и поэтому  $\frac{x}{22} + \frac{19-x}{17} = 1$ . Отсюда:  
 $17x + 22 \cdot 19 - 22x = 22 \cdot 17$ ,  $5x = 22 \cdot 19 - 22 \cdot 17 = 44$ ,  $x = 8,8$ .

Всего жидкости  $A$  получается:  $22 + 8,8 = 30,8$  кг.

**Задача 3-2.** Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 16 кг жидкости  $A$ , во второй – 11 кг жидкости  $B$ , а в третьей – 13 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 22,4.

**Задача 3-3.** Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 18 кг жидкости  $A$ , во второй – 13 кг жидкости  $B$ , а в третьей – 15 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 25,2.

**Задача 3-4.** Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 26 кг жидкости  $A$ , во второй – 21 кг жидкости  $B$ , а в третьей – 23 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 36,4.

**Задача 4.** Глафира положила льдинку массой 5 г в стакан с растительным маслом. За каждую минуту 0,5 г льда превращается в воду, которая не отрывается от поверхности льда из-за поверхностного натяжения. Плотность воды 1 г/см<sup>3</sup>, льда – 0,9 г/см<sup>3</sup>, масла – 0,92 г/см<sup>3</sup>. Через сколько секунд льдинка с водой пойдут ко дну? Ответ при необходимости округлите до целого числа секунд.

Ответ: 130.

Решение. Льдинка пойдет ко дну, когда ее плотность превысит плотность масла  $\rho_m$ , то есть

$$\frac{M}{\frac{M - Vt}{\rho_l} + \frac{Vt}{\rho_v}} > \rho_m.$$

Здесь  $t$  – время в минутах,  $M$  – начальная масса льдинки,  $V$  – скорость таяния,  $\rho_l$  и  $\rho_v$  – плотности льда и воды соответственно, знаменатель левой части – объем льда с водой.

$$\text{Отсюда } t > \frac{M}{V} \cdot \frac{1 - \frac{\rho_l}{\rho_m}}{1 - \frac{\rho_l}{\rho_v}} = \frac{50}{23} \text{ мин.} = \frac{3000}{23} \approx 130 \text{ сек.}$$

**Задача 5.** Спускаемые аппараты *Альфа* и *Бета* движутся вертикально вниз с постоянной скоростью под действием силы тяжести, силы сопротивления воздуха и силы тяги тормозного двигателя. Спускаемый аппарат *Бета* вдвое большего диаметра будет двигаться с той же установившейся скоростью, что и аппарат *Альфа*, если сила тяги его тормозного двигателя будет в 15 раз больше. Оба аппарата – однородные шары одинаковой плотности, изменение массы которых в процессе спуска пренебрежимо мало. Считаем, что сила сопротивления создается абсолютно упругими ударами молекул воздуха о корпус аппарата.

Найдите отношение силы тяжести к силе тяги тормозного двигателя аппарата *Альфа*. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 2,75.

Решение. Для спускаемого аппарата *Альфа* имеем:  $P = T + Q$ , где  $P$  – сила тяжести;  $Q$  – сила сопротивления воздуха;  $T$  – сила тяги тормозного двигателя.

Так как аппарат *Бета* имеет вдвое больший диаметр, то для него сила тяжести равна  $8P$  (масса пропорциональна объему), а сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поверхности и равна  $4Q$ .

Значит,  $8P = 15T + 4Q$ . Из получающейся системы 
$$\begin{cases} P = T + Q, \\ 8P = 15T + 4Q \end{cases}$$

находим  $\frac{P}{T} = \frac{11}{4} = 2,75$ .