

## 11 классы

**Максимальная оценка:** за задачи 1 – 4 – по 16 баллов,

за задачи 5 – 6 – по 18 баллов.

**Максимальный суммарный балл:** 100.

**Внимание!** При вычислениях считать:

ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,

универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

**Задача 1.** Найдите минимально необходимое количество фонарей для освещения прямоугольной аллеи длиной 300 метров и шириной 6 метров. Один фонарь освещает на поверхности круг радиусом 10 метров. Любая точка аллеи должна быть освещена хотя бы одним фонарем.

Ответ: 16.

Решение. Чтобы фонари покрывали светом осевую линию необходимо  $\frac{300}{20} = 15$  фонарей. При этом все эти 15 фонарей должны быть расположены на осевой линии, и остаются области вблизи границ аллеи, куда свет не достигает. Смещение любого фонаря оставит часть осевой линии без освещения. Значит, 15-ти фонарей мало.

Покажем, что 16 фонарей достаточно. Расположим их вдоль осевой линии аллеи: каждый фонарь расположен в центре прямоугольника шириной 6 метров и длиной  $2\sqrt{10^2 - 3^2} = 2\sqrt{91}$  метров. Тогда весь этот прямоугольник будет освещен, так как свет достает до каждого угла.

На 16 фонарей приходится длина  $32\sqrt{91}$  метров, что больше 300.

**Задача 2.** Два туриста находились на привале, расположенном около прямолинейной дороги. Первый из них вышел в сторону расположенного на расстоянии 4 км дорожного знака. При этом закон его движения:  $S = \sqrt{4 + 24t} - 2$ , где  $t$  – время в часах;  $S$  – перемещение в километрах. Второй выехал на велосипеде через 10 минут после первого в ту же сторону и движется со скоростью 10 км/час. Найдите суммарную длину промежутка времени, в течение которого расстояние между туристами равно сумме двух расстояний: расстояния от первого туриста до знака и расстояния от второго туриста до знака. Ответ дайте в минутах, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.

Ответ: 46.

Решение, Закон движения первого туриста:  $S = \sqrt{4 + 24t} - 2$ , а второго –  $S = 10 \left(t - \frac{1}{6}\right)$  при  $t \geq \frac{1}{6}$ ,  $S = 0$  при  $t < \frac{1}{6}$ .

Легко сообразить (достаточно изобразить ситуацию на рисунке), что требуемое условие выполняется тогда и только тогда, когда туристы находятся по разные стороны от этого знака (тот или другой могут находиться и в предельной точке – на линии знака).

Так как первый турист достигает знака в такой момент времени  $t_1$ , что  $\sqrt{4 + 24t_1} - 2 = 4$ , то  $t_1 = \frac{4}{3}$ .

Второй достигает знака в такой момент  $t$ , что  $10 \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 4$ , то есть при  $t = \frac{17}{30}$ .

Значит, подходящие моменты времени  $t \in \left[\frac{17}{30}; \frac{4}{3}\right]$  часа после выхода первого туриста. А общая длина этого промежутка времени равна  $\frac{4}{3} - \frac{17}{30} = \frac{23}{30}$  часа, то есть 46 минут.

**Задача 3-1.** Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 22 кг жидкости  $A$ , во второй – 17 кг жидкости  $B$ , а в третьей – 19 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 30,8.

Решение. По условию «плотность» жидкости  $A$  равна 22 кг на канистру, а жидкости  $B$  – 17 кг на канистру. Если в третьей цистерне содержится  $x$  кг жидкости  $A$ , то жидкости  $B$  будет  $(19 - x)$  кг, и поэтому  $\frac{x}{22} + \frac{19-x}{17} = 1$ . Отсюда:  
 $17x + 22 \cdot 19 - 22x = 22 \cdot 17$ ,  $5x = 22 \cdot 19 - 22 \cdot 17 = 44$ ,  $x = 8,8$ .

Всего жидкости  $A$  получается:  $22 + 8,8 = 30,8$  кг.

**Задача 3-2.** Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 16 кг жидкости  $A$ , во второй – 11 кг жидкости  $B$ , а в третьей – 13 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 22,4.

**Задача 3-3.** Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 18 кг жидкости  $A$ , во второй – 13 кг жидкости  $B$ , а в третьей – 15 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

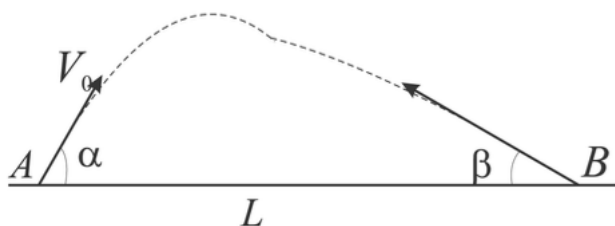
Ответ: 25,2.

**Задача 3-4.** Три одинаковые канистры полностью заполнены жидкостями. В первой из них содержится 26 кг жидкости  $A$ , во второй – 21 кг жидкости  $B$ , а в третьей – 23 кг смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно

содержится во всех трех канистрах? Ответ дайте в килограммах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 36,4.

**Задача 4.** Яблоко брошено из точки  $A$  под углом  $\alpha = 54^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $V_0 = 10$  м/с. Из точки  $B$ , расположенной на расстоянии  $L = 20$  м от точки  $A$  (см. рисунок), в тот же момент времени под углом  $\beta = 36^\circ$  к горизонту производится выстрел из арбалета так, что стрела попадает в яблоко. Через сколько секунд после выстрела это произойдет? Ответ при необходимости округлите до сотых. (Сопротивление воздуха не учитывать.)



Ответ: 1,18.

Решение. Перейдем в систему отсчета, падающую с ускорением  $g$  с нулевой начальной скоростью. Отсчет времени начинается в момент бросания яблока. В указанной системе отсчета и яблоко, и стрела движутся равномерно прямолинейно в силу закона сложения ускорений. Поэтому точка, в которой стрела попадет в яблоко, – это третья вершина  $C$  треугольника с основанием  $AB$  и углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Так как  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , то треугольник  $ABC$  прямоугольный, и  $AC = L \cdot \sin \beta = 20 \cdot \sin 36^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = 5\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ . Значит,  $T = \frac{AC}{V_0} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \approx 1,18$  с.

**Задача 5.** Вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением  $S = 20$  см<sup>2</sup> содержит 1 моль одноатомного идеального газа. За 1 секунду в сосуд

поступает количество тепла  $Q = 600$  Дж. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса  $P = 200$  Н. Атмосферное давление  $P_0 = 10^5$  Па. Найдите скорость, с какой поднимается вверх этот поршень. Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлите его до сотых.

Ответ: 0,6.

Решение. В соответствии с первым началом термодинамики можно записать

$$Q\Delta t = \Delta A + \Delta U. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta t$  – промежуток времени,  $\Delta A$  – совершенная газом работа,  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии.

Так как процесс изобарный, то для работы и внутренней энергии можно записать следующие соотношения:

$$\Delta A = \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) \Delta V, \quad \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) \Delta V, \quad (2)$$

где  $\nu$  – количество вещества.

Подставив (2) в (1), получим  $Q\Delta t = \frac{5}{2} \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) S \Delta h$ . Откуда для скорости движения поршня получим

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{Q}{2,5(p_0 S + P)}.$$

При данных числовых данных получаем скорость 0,6 м/с.

**Задача 6.** Тяжелый шкаф массой  $M = 90$  кг, каркас которого выполнен из однородного дерева, имеет форму куба с ребром  $a = 1$  м. Для его передвижения по горизонтальному полу к двум передним ножкам привязали веревку длиной 2,5 м. При этом на привязывание расходуется 1,5 м, так что та часть веревки, за которую тянут шкаф, равна 1 м. На сколько сантиметров над поверхностью пола нужно поднять натянутый свободный конец веревки, чтобы усилие, необходимое для перемещения шкафа, было наименьшим? Коэффициент трения равен  $\mu = 0,3$ , ножки маленькие и расположены по краям. При необходимости округлите ответ до целого числа сантиметров.

Ответ: 29.

Решение. При движении шкафа на него действуют силы: тяжести  $m\vec{g}$  (известны и величина, и направление), натяжения нити  $\vec{T}$  (ее хотим минимизировать), нормальной реакции  $\vec{N}$  (знаем направление), трения скольжения  $\vec{F}$  (знаем направление и отношение к силе нормальной реакции). Последние две силы можем просуммировать и получим, что полная сила реакции  $\vec{R}$  (суммарная для всех ножек) направлена назад-вверх под углом  $\beta$  к вертикали,  $\operatorname{tg} \beta = \mu$ . Имеем три силы  $m\vec{g}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{T}$ , сумма которых равна нулю.

Поэтому, если последовательно приставить начало второго вектора  $\vec{R}$  к концу вектора  $m\vec{g}$ , затем начало вектора  $\vec{T}$  к концу вектора  $\vec{R}$ , то конец вектора  $\vec{T}$  совпадет с началом  $m\vec{g}$ . В этом треугольнике задана одна сторона, угол между ней и второй стороной. Минимальное значение модуля  $\vec{T}$  будет достигнуто, если  $\vec{T} \perp \vec{R}$ , тогда  $\vec{T}$  направлена под углом  $90^\circ - \beta$  к вертикали, то есть под углом  $\beta$  к горизонту. Поэтому  $\beta = \operatorname{arctg} \mu = \operatorname{arctg} 0,3$ , и тангенс угла равен 0,3. Значит, искомая высота подъема веревки в сантиметрах равна  $h = 100 \cdot \sin \beta$ .

$$\text{Из тригонометрии } \cos^2 \beta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1}{1+0,3^2} = \frac{1}{1,09}, \sin^2 \beta = \frac{0,09}{1,09} = \frac{9}{109}.$$

$$\text{Поэтому } h = \frac{100 \cdot 3}{\sqrt{109}} \approx 28,73 \dots \text{ см. Округляем: } 29 \text{ см.}$$