

Об изоморфизмах алгебр доказуемости формальных теорий

Научный руководитель – Беклемишев Лев Дмитриевич

*Колмаков Евгений Александрович**Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
 Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории
 алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: kolmakov-ea@yandex.ru

С каждой формальной теорией T естественным образом связывается так называемая алгебра Линденбаума-Тарского \mathcal{L}_T , которая получается из алгебры всех замкнутых формул языка теории T факторизацией по отношению T -доказуемой эквивалентности. Как известно, булева алгебра \mathcal{L}_T не отражает теоретико-доказательственную силу теории T . Действительно, для любых двух достаточно сильных перечислимых непротиворечивых теорий соответствующие им алгебры Линденбаума-Тарского являются счётными безатомными булевыми алгебрами и поэтому изоморфны. Обогащение алгебры Линденбаума \mathcal{L}_T унарным оператором доказуемости \square_T в данной формальной теории T приводит к понятию алгебры доказуемости \mathcal{M}_T теории T . Такие структуры позволяют выразить многие факты о доказуемости и отличить разные по силе теории.

Ряд наиболее известных результатов об алгебрах доказуемости формальных теорий был получен В. Ю. Шавруковым. В частности, он предложил необходимые и достаточные условия изоморфизма алгебр доказуемости \mathcal{M}_T и \mathcal{M}_S для пары формальных теорий T и S (см. [1, 2]). Впоследствии Г. Адамссон [3] усилил теорему Шаврукова о необходимых условиях изоморфизма и установил, что алгебра доказуемости \mathcal{M}_T зависит не только от самой теории, но и от её конкретной аксиоматизации и формализации понятия доказуемости \square_T . А именно, он показал, что алгебры доказуемости теории T с операторами \square_T и $\square_T^{(6)}$ (6 раз итерированный оператор доказуемости \square_T) неизоморфны.

В данной работе получены дальнейшие усиления результата Шаврукова-Адамссона о необходимых условиях изоморфизма алгебр доказуемости и построены новые связанные с этим примеры. В частности, построены примеры пар теорий с одинаковыми (различными) классами доказуемо тотальных вычислимых функций, но неизоморфными (изоморфными) алгебрами доказуемости, а также примеры Π_1 -эквивалентных теорий с неизоморфными алгебрами.

Полученные усиления также позволили снизить 6-кратную итерацию в результате Адамссона до более естественной 2-кратной и получить более общий результат.

Теорема 1. *Для любых натуральных чисел $0 < p < q$*

$$(\mathcal{L}_T, \square_T^{(p)}) \not\cong (\mathcal{L}_T, \square_T^{(q)}).$$

В частности, $(\mathcal{L}_T, \square_T) \not\cong (\mathcal{L}_T, \square_T \square_T)$.

Помимо этого, построена серия примеров пар теорий, имеющих изоморфные одно-модальные, но неизоморфные бимодальные алгебры доказуемости (с парой операторов обычной \square_T и 1-доказуемости $[1]_T$).

Источники и литература

- 1) Shavrukov V. Yu. A Note on the Diagonalizable Algebras of PA and ZF // *Annals of Pure and Applied Logic*, 1993, Vol. 61, No. 1–2, P. 161–173.
- 2) Shavrukov V. Yu. Isomorphisms of Diagonalizable Algebras // *Theoria*, 1997, Vol. 63, No. 3, P. 210–221.
- 3) Adamsson G. Diagonalizable algebras and the length of proofs // Göteborgs universitet, Institutionen för filosofi, lingvistik och vetenskapsteori, student essay, 2011.