Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Собственные функции оператора Лапласа в двумерной области, локализованные вблизи ее границы.

Научный руководитель – Сергеев Сергей Андреевич

Золотухина Анастасия Антоновна
Студент (бакалавр)
Московский физико-технический институт, Москва, Россия
E-mail: zolotukhina.aa@phystech.edu

Рассматривается задача о поиске высокочастотных собственных функций и значений оператора Лапласа, локализованных вблизи гладкой границы области

$$-\Delta u(x,\, y) = \lambda^2 u(x,\, y),\; (x,\, y) \in \Omega.$$

Здесь $(x,\, y)$ — декартовы координаты, Ω — область, а $\Gamma = \partial\Omega$ — ее гладкая граница. Считаем, что $\lambda^2 \gg 1$, и нас интересует поведение собственных функций именно при больших значениях λ. Мы строим собственные функции внутри указанной области, ставя на границе нулевые условия Дирихле: $u|_\Gamma = 0$. Такая постановка задачи представляет интерес с точки зрения изучения шепчущих галерей, возникающих в окрестности границы области (см., например, [1]).

Следуя [1] мы вводим локальные координаты вблизи границы $(s,\, n)$, где s — длина дуги границы, отсчитанная от некоторой фиксированной точки, а n — координата вдоль нормали к границе в точке s, равная нулю на самой границе s, и отрицательная внутри области. В таких координатах оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{1}{A(s,\, n)}\frac{\partial A}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{A^2(s,\, n)}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{A^3(s,\, n)}\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial s},$$

где $A(s,\, n) = 1 + n/\rho(s)$. Здесь $\rho(s)$ — радиус кривизны границы в точке s. Мы считаем, что функция $\rho(s)$ является периодической с периодом L, где L — длина границы Γ.

В силу условия локализованности собственных функций в окрестности границы области в задаче возникает разделение переменных на быстрые (переменная n) и медленные (переменная s). В этом случае мы можем воспользоваться адиабатическим разделением перменных (см., например, [2]). Подобная процедура разделения переменных приводит представлению собственных функций в виде произведения функции Эйри и ряда из осциллирующих экспонент.

Отметим, что в частном случае, когда область Ω является кругом, подобные локализованные собственные функции хорошо известны и представляют собой произведение осциллирующей экспоненты и функции Бесселя.

Также отметим, что в [1] было построено локализованное в окрестности окружности приближенное решение уравнения Гельмгольца при высоких частотах в виде произведения осциллирующей экспоненты и функции Эйри. На основании такого представления там же было построено приближеное решение уравнения Гельмгольца для произвольной гладкой границы в виде произведения осциллирующей экспоненты и функции Эйри, но в качестве аргументов этих функций уже вытупали ряды по отрицательным степеням частоты с коэффциентами в виде полиномов по переменной n, для определения которых возникает рекуррентная система дифференциальных уравнений.

Работа поддержана грантом РФФИ 18-05-00057 А.

Источники и литература

1) Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. // Москва, Наука, 1972, 456 стр.
2) Брюнинг Й., Грушин В. В., Доброхотов С. Ю. Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы // Математические заметки, 2012, т. 92, вып. 2, 163-179