Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Об аналитичности операторной полугруппы, возникающей в теории вязкоупругости.

Научный руководитель – Власов Виктор Валентинович

Тихонов Юрий Андреевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия
E-mail: mihelson1994@yandex.ru

Малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины в безразмерных переменных без учёта внешнего трения можно описать интегро-дифференциальным уравнением, абстрактная форма которого имеет следующий вид [3]:

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \alpha A\frac{du}{dt}(t) + (A+B)u(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}K(t-s)Au(s)ds = 0,\ t > 0$$

$$u(0+) = \varphi_0,\ \frac{du}{dt}(0+) = \varphi_1.$$

В указанном уравнении $u(t)$ – вектор-функция, принимающая значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Скалярный параметр α положителен, пропорционален внутреннему трению Кельвина-Фойгта (см. монографию [1], глава 5).

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t},$$

где $c_j > 0,\ 0 < \gamma_j < \gamma_{j+1} \to +\infty$, причём

$$K(0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1.$$

A – самосопряжённый, положительно определённый оператор в H, имеющий компактный обратный. Оператор B – симметричный, A-компактный в смысле Като [2], причём для любого $h \in H$ справедливо неравенство

$$\|Bh\| < (1 - K(0))\|Ah\|.$$

Введя переменные $\rho(t)$ и $v_j(t),\ j = 1, 2, \ldots$ и соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{\rho}(t) = ((1 - K(0)A + B)^{1/2}u(t),$$

$$\dot{v}_j(t) = A^{1/2}\sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}}u(t) - \gamma_j v_j(t)$$

с начальными условиями

$$\rho(0+) = \rho_0,$$

$$v_j(0+) = 0,$$

исходную систему можно записать в виде уравнения:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathcal{A}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{u}(0+) = u_0,$$

где $\mathbf{u}(t) = (u(t), \rho(t), v_1(t), v_2(t)\dots)^T$, $\mathbf{u}_0 = (\varphi_0, \rho_0, 0, 0, \dots)^T$, $\mathcal{A}$ – матрица с операторными элементами, равная:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\alpha A & -\left((1-K(0))A+B\right)^{1/2} & -A^{1/2}S^* \\ \left((1-K(0))A+B\right)^{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ SA^{1/2} & \mathbf{0} & -\Gamma \end{pmatrix},$$

где $Sv = (\sqrt{\frac{c_1}{\gamma_1}}v, \sqrt{\frac{c_2}{\gamma_2}}v, \dots)^T$, $v \in H$; $S^*(v_1, v_2, \dots)^T = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} v_j$, $v_j \in H$, $j = 1, 2, \dots$; $\Gamma(v_1, v_2, \dots)^T = (\gamma_1 v_1, \gamma_2 v_2, \dots)^T$.

Главным результатом работы является доказательство того факта, что оператор, заданный матрицей $\mathcal{A}$, является генератором сильно непрерывной и, более того, аналитической полугруппы операторов [4].

Источники и литература

1) Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости, М., 1970
2) Като Т., Теория возмущений линенйных операторов, М., 1972
3) Пивоварчик В.Н., Краевая задача, связанная с колебаниями стержня с внутренним и внешним трением // Вест. МГУ Сер. 1. матем., мех. 1987. No 3. С. 68-71.
4) Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations, Springer, 1999.