Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Некоторые количественные результаты, связанные с максимальными независимыми множествами в графах-решетках

Талецкий Дмитрий Сергеевич
Студент (магистр)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
E-mail: dmitalmail@gmail.com

Независимым множеством в графе называется произвольное подмножество попарно несмежных его вершин. Независимое множество графа называется *максимальным*, если оно максимально по включению. Количество независимых множеств (соответственно, максимальных независимых множеств) графа G принято обозначать через $i(G)$ (соответственно, через $mi(G)$).

Декартовым произведением $G \times H$ двух графов G и H называется граф с множеством вершин $V(G) \times V(H)$, при этом вершины (u_1, v_1) и (u_2, v_2) соединены ребром тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2$ и $(v_1, v_2) \in E(H)$, либо $v_1 = v_2$ и $(u_1, u_2) \in E(G)$. *Прямоугольной* (соответственно, *цилиндрической* и *тороидальной*) $m \times n$*-решеткой* называется декартово произведение $P_m \times P_n$ (соответственно, $C_m \times P_n$ и $C_m \times C_n$), где P_k и C_k — простой k-путь и простой k-цикл, соответственно. Прямоугольную (соответственно, цилиндрическую и тороидальную) $m \times n$-решетку будем обозначать через $Gr_{m,n}$ (соответственно, через $Cyl_{m,n}$ и $Tor_{m,n}$).

Н. Калкин и Г. Вилф в работе [1] доказали, что существует предел $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, равный $1.50403\ldots$. Кроме того, ими были получены производящие функции количества н.м. в прямоугольных решетках ширины $3, 4, 5$. Позднее С. Ох и С. Ли в работе [2] предложили более простое доказательство существования двойного предела $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$.

Автору известны только две работы ([3] и [4]), в которых рассматриваются количественные аспекты м.н.м. в графах-решетках, причем в данных работах рассматриваются только прямоугольные решетки. Р. Эйлер в работе [3] получил производящие функции количества м.н.м. в прямоугольных решетках ширины $3, 4, 5$. В работе [4] были получены производящие функции количества м.н.м. в прямоугольных решетках-параллелепипедах с основаниями 2×2, 2×3 и 3×3.

В настоящей работе рассматриваются количественные характеристики максимальных независимых множеств в графах-решетках. Была предложена модификация метода трансфер-матрицы, позволяющая вычислять производящие функции для числа максимальных независимых множеств в цилиндрических и тороидальных решетках любой заданной ширины. С ее помощью был получен явный вид производящих функций количества максимальных независимых множеств в цилиндрических и тороидальных решетках размера $4, 5, 6$.

В работе [3] ставится вопрос о существовании двойного предела $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, ответ на который дает следующая теорема.

Теорема 1. *Существует двойной предел*

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \kappa,$$

причем

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \kappa.$$

Источники и литература

1) Kalkin N. J., Wilf H. S. The number of independent sets in a grid graph // SIAM Journal of Discrite Mathematics. 2005. Vol. 11, № 1. P. 54–60.
2) Oh. S., Lee. S. Enumerating independent vertex sets in grid graphs // Linear Algebra and its Applications. 2016. Vol. 510. P. 192–204.
3) Euler R. The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences // Journal of Integer Sequences. 2005. Vol. 8, № 07.2.6. P. 1–12.
4) Euler R., Oleksik P., Skupien Z. Counting maximal distance-independent sets in grid graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. 2013. Vol. 33, № 3. P. 531–557.