Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Аксиоматизация доказуемой 1-доказуемости

Научный руководитель – Беклемишев Лев Дмитриевич

Колмаков Евгений Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: kolmakov-ea@yandex.ru

Понятие 1-доказуемости является естественным обобщением стандартного понятия доказуемости в перечислимой арифметической теории. Формула φ называется *1-доказуемой* в теории S, если φ доказуема в теории S, расширенной множеством всех истинных арифметических Π_1-предложений в качестве новых аксиом. Обозначим через $[1]_S\varphi$ арифметическую формулу, выражающую отношение "φ 1-доказуема в S".

В данной работе изучается понятие *доказуемой 1-доказуемости*. Более точно, для произвольных арифметических теорий T и S рассматривается множество

$$C_S(T) = \{\varphi \mid T \vdash [1]_S\varphi\},$$

состоящее из арифметических предложений, 1-доказуемость которых в S доказуема в T. Данное множество предложений является перечислимой теорией, расширяющей S. Мы исследуем вопрос о построении явной аксиоматизации теорий вида $C_S(T)$.

Нетрудно показать, что $C_S(T)$ содержит *локальную схему рефлексии* над S

$$\mathsf{Rfn}(S):\quad \Box_S\varphi \to \varphi,\ \varphi \text{ — предложение},$$

и для теорий T, содержащих схему индукции, также α-кратную итерацию локальной схемы рефлексии. При этом ординал α определяется так называемым Σ^0_2-ординалом теории T (см. [1]).

В работе установлено, что теории $C_S(T)$ могут быть аксиоматизированы с помощью итерированных локальных схем рефлексии такого вида. В частности, доказано, что для любого натурального n имеет место дедуктивная эквивалентность теорий

$$C_S(\mathsf{I}\Sigma_n) \equiv \mathsf{Rfn}(S)_{\omega_n},$$

где $\mathsf{I}\Sigma_n$ — фрагмент арифметики Пеано, для которого схема индукции ограничена Σ_n-формулами.

Источники и литература

1) Lev D. Beklemishev, Albert Visser. On the limit existence principles in elementary arithmetic and Σ^0_n-consequences of theories // Annals of Pure and Applied Logic. 2005. Vol. 136. No. 1-2. P. 56–74.