

## Лиувиллева классификация движений материальной точки по параболоиду в однородном силовом поле

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

*Кобцев Иван Федорович*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия  
E-mail: *int396.kobtsev@mail.ru*

Рассматривается движение тяжелой материальной точки массы  $m$  в однородном силовом поле по поверхности параболоида  $\frac{y^2}{a+b} + \frac{z^2}{b} = 2x + b$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Полная энергия точки имеет вид  $H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgx$ ; здесь  $g$  — ускорение свободного падения.

Классификация движений этой задачи и их количественное описание были сделаны С.А. Чаплыгиным [1]. Им также были получены свойства особых траекторий и исследована их устойчивость.

Интересным объектом изучения является топологическая структура системы. Одним из инструментов качественного анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы является инвариант лиувиллевой эквивалентности — молекула Фоменко-Цишанга. Соответствующая теоретическая классификация построена в [2].

Рассматриваемая система имеет две степени свободы и является интегрируемой по Лиувиллю. Для задачи вычислены инварианты Фоменко-Цишанга и с их помощью обнаружены лиувиллевы эквивалентности некоторым задачам механики.

После перехода к лагранжевым координатам  $(v, w)$  на параболоиде уравнения движения приводятся к виду

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{1}{w-v} \sqrt{P(v)}, \\ \dot{w} &= \frac{1}{w-v} \sqrt{P(w)},\end{aligned}$$

где  $P(\lambda)$  — многочлен с коэффициентами, зависящими от значений интегралов.

Системы с таким разделением переменных допускают исследование алгебраическим методом, предложенным М.П. Харламовым в [3]. Этот способ значительно упрощает топологический анализ и позволяет установить тип бифуркаций в системе. В процессе исследования получены новые перестройки интегральных поверхностей и установлены новые свойства движений. В частности, установлено, что поведение траекторий задачи при разных направлениях силы качественно отличается. Так, если  $g > 0$  (притяжение), то поверхности уровня интегралов компактны и гомеоморфны объединению двумерных торов  $T^2$ .

При отрицательном  $g$  (отталкивание) траектории лежат в неограниченных областях на параболоиде, а интегральная поверхность гомеоморфна объединению цилиндров  $S^1 \times \mathbb{R}^1$ . В этом случае исследуется грубый инвариант Фоменко (молекула без меток); установлено, что при  $g < 0$  возникают некомпактные бифуркации.

### Источники и литература

- 1) Чаплыгин С. А. О параболоидном маятнике. Полн. собр. соч. Т. 1.Л., 1933, 194-200.

- 2) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. 1,2. Ижевск:РХД, 1999.
- 3) Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010, Т.6, №4, с.769–805.