Секция «Геометрия и топология»

Интегральные инварианты трехмерных несжимаемых течений

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Ивашковский Максим Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: frank1581@yandex.ru

Доклад посвящен изучению топологических инвариантов бездивергентных векторных полей (т.е. несжимаемых течений) на компактном 3-мерном многообразии. Разбиение многообразия на интегральные траектории такого векторного поля можно рассматривать как "распределенное зацепление", т.е. зацепление (или узел) распределено по всему многообразию. Грубо говоря, инварианты несжимаемых течений — это распространение инвариантов обычных зацеплений на случай распределенных зацеплений. Наш основной результат аналогичен [1, 2]. Перейдем к точным формулировкам.

Фиксируем компактное ориентируемое 3-мерное многообразие $Q = Q^3$. Несжимаемым течением (или распределенным зацеплением) на Q назовем пару (X, μ), где μ — гладкая 3-форма объема на Q, X — гладкое векторное поле без нулей на Q такие, что 2-форма $\beta := i_X\mu$ замкнута. Если 2-форма β точна, то течение (X, μ) назовем точным. Отметим, что поток векторного поля X сохраняет форму объема μ, так как производная Ли $L_X\mu = (i_Xd + di_X)\mu = di_X\mu = d\beta = 0$, т.е. векторное поле X действительно является несжимаемым, или бездивергентным.

Топологическим инвариантом точных несжимаемых течений на Q назовем вещественнозначный функционал $I = I(X, \mu)$ на множестве точных несжимаемых течений на Q, удовлетворяющий соотношению $I(X, \mu) = I(h_*X, (h^{-1})^*\mu)$ для любого сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $h : Q \to Q$. Известными примерами инвариантов являются энергия $\mathcal{E}(X, \mu) := \int_Q \mu$ и спиральность $\mathcal{H}(X, \mu) := \int_Q \alpha \wedge \beta$, где α — 1-форма на Q такая, что $d\alpha = \beta$.

Топологический инвариант $I = I(X, \mu)$ назовем интегральным, если он допускает интегральное представление $I(X, \mu) = \int_Q F(i_X\alpha)\mu$ для некоторой непрерывной функции $F(t)$ одной переменной, где α — 1-форма на Q как выше.

Основной результат: Если $I = I(X, \mu)$ — интегральный топологический инвариант точных несжимаемых течений на Q, то он является линейной комбинацией инвариантов энергии и спиральности, т.е. $I(X, \mu) = c_1\mathcal{E}(X, \mu) + c_2\mathcal{H}(X, \mu)$, где c_1, c_2 — вещественные константы.

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-6399.2018.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00378-а).

Источники и литература

1) D. Serre, Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension trois, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 289:4 (1979), 267–270; Phys. D, 13:1-2 (1984), 105–136.
2) Е. А. Кудрявцева, Спиральность - единственный инвариант несжимаемых течений с непрерывной в C^1 топологии производной, Математические заметки, 99:4, 2016, 626–630.