Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПО СОСТОЯНИЮ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С УПРАВЛЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Научный руководитель – Кушнер Алексей Гурьевич

Гасанов Шамхал Шамилевич

Студент (бакалавр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Физический факультет, Кафедра физико-математических методов управления, Москва, Россия

E-mail: shamkhal-edu@yandex.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПО СОСТОЯНИЮ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С УПРАВЛЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Гасанов Шамхал

В докладе представлены дифференциальные инварианты скалярного уравнения первого порядка вида $\dot{x} = f(t,x)u$ (1) относительно допустимых преобразований, где $u = u(t)$ - управляющий параметр.

Отметим, что дифференциальные инварианты гамильтоновых систем с управляющим параметром были найдены в работах [1,2], а дифференциальные инварианты уравнений второго порядка вида $\ddot{x} = f(x,u)$- в работе [3].

Нами найдены так называемые допустимые преобразования, т.е. преобразования переменных t, x, u, сохраняющие класс уравнений (1). Заметим, что нами найдены как общие, так и инфинитезимальные преобразования, т.е. преобразования, полученные в результате сдвига вдоль некоторых векторных полей.

Вводится векторное расслоение $\pi : R^3 \to R^2$, позволяющие классифицировать уравнения (1) относительно инфинитезимальных допустимых преобразований. Сечение этого расслоения - это функции f в уравнении (1).

Теорема 1. *Преобразования вида*

$$\phi : (t, x_0, u_0) \to (T(t), B(x), U(t, u_0))$$

сохраняют класс уравнений (1) *и, следовательно, являются допустимыми.*

Функция $\tilde{f}(t,x)$ в результате преобразований принимает вид

$$\tilde{f}(t,x) = \frac{f(T(t), B(x_0))\ T'(t)}{B'(x_0)}$$

Введем пространства R^2 с координатами t, x и R^3 с координатами $t, x, f_0, 0$.В пространстве R^3 построим векторные поля

$$Z_A = A(t)\frac{\partial}{\partial t} + f_{0,0}A'(t)\frac{\partial}{\partial f}$$

$$Z_B = B(x)\frac{\partial}{\partial x} - f_{0,0}B'(x)\frac{\partial}{\partial f}$$

Функция на пространстве k-джетов сечений расслоения $\pi : R^3 \to R^2$ называется инвариантом порядка k, если для любых функций A и B выполняются соотношения:

$$Z_A^{(k)}(J) = 0$$

$$Z_B^{(k)}(J) = 0$$

Легко видеть, что инвариантов 1 и 2 порядка не существует.

Теорема 2. *Функции*

$$J = \frac{\left(-f_{0,0}f_{0,1}f_{2,0} + f_{2,1}f_{0,0}^2 + f_{0,1}f_{1,0}^2 - f_{0,0}f_{1,0}f_{1,1}\right)\sqrt{f_{0,0}}}{\left(-f_{0,1}f_{1,0} + f_{0,0}f_{1,1}\right)^{3/2}}$$

$$J = \frac{-f_{0,0}f_{1,0}f_{0,2} + f_{0,0}^2 f_{1,2} + 3f_{1,0}f_{0,1}^2 - 3f_{0,0}f_{1,1}f_{0,1}}{\left(-f_{0,1}f_{1,0} + f_{0,0}f_{1,1}\right)^{3/2}\sqrt{f_{0,0}}}$$

являются дифференциальными инвариантами 3-го порядка.

Проверим, все ли дифференциальные инварианты 3-го порядка нами найдены. В пространстве 3-джетов функция $f(t,x)$ имеет 10 независимых компонент. Количество независимых векторов, образованных полями Z_A и Z_B в пространстве 3-джетов равно 8, что совпадает с предполагаемым количеством орбит данного уравнения. Следовательно, нами найдены все возможные дифференциальные инварианты 3-го порядка. Построенные дифференциальные инварианты могут быть использованы для классификации уравнений.

Список литературы

[1] Kushner A. G., Lychagin V. V. Petrov invariants for 1-d control hamiltonian systems // Global and Stochastic Analysis. — 2012. — Vol. 2, no. 1. — P. 241–264.

[2] Кушнер А. Г., Лычагин В. В. Инварианты Петрова гамильтоновых систем с управляющим параметром // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 3. — С. 83–102.

[3] D. S. Gritsenko, O. M. Kiriukhin. Differential invariants of feedback transformations for quasi-harmonic oscillation equations // Journal of Geometry and Physics. Volume 113,2017, P. 65–72.