Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Многомерные всплески Хаара с носителем-многогранником и не только

Научный руководитель – Протасов Владимир Юрьевич

Зайцева Татьяна Ивановна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: zaitsevatanja@gmail.com

Системой всплесков называется ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, состоящий из сжатий и сдвигов на всевозможные целые векторы одной и той же функции, причем сжатия пространства $\mathbb{R}^n$ осуществляются с помощью определенной целочисленной *матрицы сжатия* M. Эта матрица выбирается из конкретной задачи.

Системы всплесков широко применяются для приближения гладких функций, хранения, сжатия и передачи информации, численного решения дифференциальных уравнений и т.д. Наиболее простыми всплесками с компактным носителем являются системы Хаара. Они состоят из кусочно-постоянных функций, принимающих значений 0 и 1. Классическая система Хаара на прямой порождена *масштабирующей функцией Хаара* – индикаторной функцией отрезка $[0,1]$ и её двоичными сжатиями. Известно, что это – единственная двоичная система Хаара на прямой. Оказывается, что в пространстве систем Хаара бесконечно много (см., например, [1, 2]). Они порождены индикаторными функциями специальных компактов, называемых тайлами (tiles). Тайлы характеризуются двумя свойствами: 1) (самоподобие) $G = \bigcup\limits_{d \in D} M^{-1}(G+d)$, где D – конечное множество целочисленных векторов ("цифр"); 2) (разбиение единицы) все целочисленные сдвиги множества G составляют покрытие $\mathbb{R}^n$ без пересечений (точнее, мера попарных пересечений равна нулю).

Для двоичных систем Хаара на прямой в качестве тайла выступает отрезок $[0,1]$. Большинство тайлов в пространстве $\mathbb{R}^n$, имеют более сложную, часто фрактальную структуру, это обстоятельство усложняет построение и использование многомерных всплесков Хаара. Конечно, можно получать многомерные функции Хаара в качестве прямых произведений одномерных. Однако, с точки зрения теории всплесков, такие системы имеют плохую локализацию и потому неэффективны в задачах обработки сигналов. Наиболее интересные системы всплесков не являются прямыми произведениями одномерных. Возникает естественная задача, классифицировать, по возможности, простые всплески Хаара. В представленной работе мы получаем полную классификацию тайлов, являющихся выпуклыми многогранниками в $\mathbb{R}^n$ (в частности, мы определяем, для каких матриц сжатия M тайл является параллелепипедом). В случае $n=2$ удаётся решить более общую задачу. Мы доказываем, что любой тайл, являющийся многоугольником на плоскости (в том числе невыпуклым), аффинно подобен прямоугольнику.

В некоторых случаях, тайл является несвязным множеством. Тогда задача классификации "хороших" тайлов наиболее сложна. Мы рассматриваем только случай одномерных тайлов. Оказывается, что система соответствующих отрезков образует семейство "вложенных" арифметических прогрессий. Данная задача имеет довольно неожиданную интерпретацию на языке циклотомических полиномов.

Источники и литература

1) K. Gröchenig, W.R. Madych, *Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings of* $\mathbb{R}^n$, IEEE Trans. Inform. Theory, 38 (1992), 556 – 568.

2) J. Lagarias and Y. Wang, *Integral self-affine tiles in* $\mathbb{R}^n$. *II. Lattice tilings*, J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), 83 – 102.