Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Корреляционные свойства выходящего потока однолинейной системы с возобновлением блокированных вызовов

Денис Корженков Михайлович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: dkorzhenkov@gmail.com

В статье [2] исследовано поведение системы, в которой на одно обслуживающее устройство поступали требования двух разных типов. Был введен дискретный случайный процесс, отвечающий типу вызова, завершившего обслуживание, а затем подсчитана корреляция типов двух подряд покинувших систему требований в стационарном режиме. Цель данной работы - применить аналогичный подход к базовой модели, изученной в [1] и описанной в заголовке, в которой выделяются следующие типы вызовов: первичный и пришедший с орбиты.

Обозначения параметров модели, типов вызовов и распределений совпадают с введенными в [1].

Теорема *Коэффициент корреляции γ равен*

$$\gamma = 1 - \frac{1}{(1-\rho)\,\beta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\pi_m\frac{\mu_m}{\lambda+\mu_m}f(m), \tag{1}$$

где

$$f(m) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{k_i}{\lambda+\mu_{i+m-1}},\ m\geq 1. \tag{2}$$

Доказательство Значение величины N_{i+1} - количества требований на орбите на момент окончания обслуживания $i+1$-го вызова - зависит от того, сколько требований находилось там на окончание обслуживания n-го (N_i), типа $i+1$-го вызова (T_{i+1}) и количества первичных требований, поступивших за время обслуживания $i+1$-го вызова (ν_{i+1}), и выражается соотношением

$$N_{i+1} = N_i - T_{i+1} + \nu_{i+1}. \tag{3}$$

Отсюда (учитывая, что из-за стационарности $\mathbb{E}N_{i+1} = \mathbb{E}N_i$, а по определению $T_i \equiv T_i^2$)

$$\mathbb{E}T_{i+1}^2 = \mathbb{E}T_{i+1} = \mathbb{E}\nu_{i+1} = \lambda\beta_1 = \rho.$$

Формально расписав, чему равно $\mathbb{E}T_{i+1}$, и воспользовавшись предыдущим, приходим к следующему

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\frac{\mu_n}{\lambda+\mu_n} = \rho. \tag{4}$$

В то же время ковариация

$$\mathbb{E}T_iT_{i+1} = P\left\{T_i = T_{i+1} = 1\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}P\left\{T_i = 1, T_{i+1} = 1, N_i = n\right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n}{\lambda+\mu_n}\sum_{m=0}^{\infty}P\left\{T_i = 1, N_i = n|N_{i-1} = m\right\}P\left\{N_{i-1} = m\right\} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\pi_m\frac{\mu_m}{\lambda+\mu_m}\sum_{n=m-1}^{\infty}k_{n-m+1}\frac{\mu_n}{\lambda+\mu_n} = \sum_{m=0}^{\infty}\pi_m\frac{\mu_m}{\lambda+\mu_m}\left(1-\lambda f(m)\right). \tag{5}$$

Воспользуемся (4):

$$\mathbb{E}T_iT_{i+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \frac{\mu_m}{\lambda + \mu_m} [1 - \lambda f(m)] = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \frac{\mu_m}{\lambda + \mu_m} - \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \frac{\mu_m}{\lambda + \mu_m} f(m) =$$

$$\rho - \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \frac{\mu_m}{\lambda + \mu_m} f(m). \tag{6}$$

Тогда для ковариации имеем следующее соотношение с учетом стационарности

$$\mathbf{Cov}\,(T_i, T_{i+1}) = \mathbb{E}\,(T_iT_{i+1}) - (\mathbb{E}T_i)^2 = \rho(1-\rho) - \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \pi_m \frac{\mu_m}{\lambda + \mu_m} f(m), \tag{7}$$

что и влечет утверждение Теоремы.

Следствие 1 При $\mu_n = \mu n$ (linear retrial policy) в марковском случае вычислена ковариация

$$\mathbf{Cov}\,(T_i, T_{i+1}) = \rho(1-\rho) - \frac{\lambda}{\mu} \rho^{1-\frac{\lambda}{\mu}} (1-\rho)^{1+\frac{\lambda}{\mu}} \int_0^{\rho} t^{\frac{\lambda}{\mu}-1} \frac{1}{1+\rho-t} \frac{1}{(1-t)^{1+\frac{\lambda}{\mu}}} dt \tag{8}$$

и получена оценка коэффициента корреляции $0 < \gamma < \dfrac{\rho}{1+\rho}$.

Следствие 2 При $\mu_n = \mu I(n > 0)$ (constant retrial policy) в марковском случае

$$\gamma = 1 - \frac{1}{1-\rho^2} \left[1 - \frac{\mu\rho}{\lambda + \mu} \right]. \tag{9}$$

Получена асимптотическая оценка для точки максимума корреляции как функции ρ:

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\rho + O\left(\frac{1}{g}\right), \tag{10}$$

где $g = \frac{\mu}{\nu} \longrightarrow \infty$.

Источники и литература

1) G.I. Falin, J.G.C. Templeton. Retrial queues. London: Chapman and Hall. 1997
2) T. Phung-Duc, W. Rogiest, H. Bruneel, Y. Takahashi. Retrial queues with balanced call blending: analysis of single-server and multiserver model // Annals of Operations Research. 2014, DOI: 10.1007/s10479-014-1598-2