Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

**Поля Якоби на многообразии со случайной кривизной**

***Телешева Ольга Дмитриевна***

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия

*E-mail: olgatelesheva93@gmail.com*

В современной геометрии известно много результатов, посвященных изучению двумерных многообразий и поверхностей положительной кривизны (см. напр. А.Д.Александрова и А.В.Погорелова) и отрицательной кривизны (см. напр. Бакельмана, Вернера, Кантора). В то же время остается не вполне ясным, как можно подойти к исследованию многообразий и поверхностей знакопеременной кривизны. Конструктивная идея подобного подхода была высказана в специальной работе по космологии в 1964 г. Я.Б.Зельдовичем и перенесена в геометрический контекст в работе Ламбурта, Розендорна, Соколова и Тутубалина. В этих работах рассматривается поведение полей Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной. Я.Б.Зельдович обратил внимание, что даже если эта случайная кривизна в среднем равна нулю, то поле Якоби экспоненциально растет, а в работе доказана соответствующая теорема и исследован ряд смежных вопросов.

Ограниченность описанного подхода состоит в том, что приходится постулировать поведение кривизны вдоль геодезической, однако при этом остается неясным, как устроено многообразие вне этой геодезической. Э.Р.Розендорн и Д.Д.Соколов исследовали, насколько по кривизне, заданному на геодезической, можно восстановить метрику вне этой геодезической, и убедились, что существование метрики можно гарантировать лишь в очень малой области, поперечник которой быстро падает при движении точки вдоль геодезической.

Поясним, откуда появляются сложности. Представим себе, что мы, следуя А.Д.Александрову склеиваем наше многообразие со случайной кривизной из плоских треугольников, так что (интегральная) кривизна сосредоточена в вершинах — местах склейки нескольких треугольников. Пусть мы хотим получить таким образом метрику со случайной, скажем, положительной кривизной. Для этого нужно, чтобы сумма углов треугольников, прилежащих к вершине, оказалась меньше $2\pi$. Для того, чтобы считать кривизну случайной, мы должны считать сумму углов случайной величиной. Пусть мы уже склеили часть многообразия, содержащую $N$ вершин, и на данном этапе продолжили ее до бесконечности плоской метрикой. В силу формулы Гаусса–Бонне полный угол конической поверхности, образуемой этой частью плоскости, меньше $2\pi$ и выражается через интеграл от случайной кривизны. С другой стороны, в силу центральной предельной теоремы, этот интеграл представляет собой приближенно гауссовскую случайную величину, дисперсия которой неограниченно растет с ростом $N$, так что интегральная кривизна может быть сколь угодно велика. Возникающее противоречие в построении интересующего нас полного многообразия связано с тем, что в процессе построения мы не контролировали интегральную кривизну получающегося объекта.

В данной работе предлагается иной способ построения многообразия со случайной кривизной, при котором интегральная кривизна не слишком малого куска многообразия контролируется и оказывается равной нулю. Мы покажем, что поля Якоби на таком многообразии ведут себя так, как и предсказывал Я.Б.Зельдович.

Рассмотрим двумерные римановы многообразия, которые можно разбить на части так, что одни из них изометричны плоскости, а другие изометричны кругам плоскости Лобачевского (рассеиватели). Мы предполагаем, что рассеиватели занимают небольшую площадь многообразия, то есть их можно окружить замкнутыми кривыми, целиком проходящими по плоской части нашего многообразия. Тогда интегральная кривизна частей многообразия по А.Д.Александрову, ограниченного такими замкнутыми кривыми, равна нулю. Отрицательная гауссова кривизна, естественно, относится к внутренним частям рассеивателей. Положительная интегральная кривизна, компенсирующая отрицательный вклад в интегральную кривизну находится на границе между рассеивателем и плоской частью многообразия. Для того, чтобы убедиться в равенстве нулю интегральной кривизны, вычислим ее из теоремы Гаусса–Бонне. Очевидно, что вклад, который дает интеграл по границе, обращается в ноль (граница находится в плоской части многообразия), так что обращается в ноль и интегральная кривизна. Построенное таким образом многообразие, очевидно, является полным.

Мы рассматриваем семейство многообразий с рассеивателями, на которых заданы размер рассеивателей и их гауссова кривизна. Получаемые результаты мы будем представлять с помощью асимптотических выражений по стремящемуся к нулю размеру рассеивателей. Подобное представление результатов обычно в теории вероятностей, но непривычно для римановой геометрии. Мы пользуемся им для того, чтобы придать обозримый вид получаемым результатам.