Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Функциональная предельная теорема для системы M/G/∞.

Чернавская Екатерина Александровна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: Chernavskayaak@mail.ru

Рассматривается система массового обслуживания с бесконечным числом приборов. Поступающие требования образуют пуассоновский процесс интенсивности λ.

Времена обслуживания требований образуют последовательность $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $B(x)$. Обозначаем $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$.

Условие. Пусть

$$\overline{B}(t) \sim \frac{L(t)}{t^{\beta}} \text{ при } t \to \infty, \tag{1}$$

где $0 < \beta < 1$ и $L(t)$ – медленно меняющаяся функция.

Обозначим через $q(t)$ число требований в системе в момент времени t. Наша цель состоит в изучении асимптотического поведения процесса $q(tT)$ при $T \to \infty$, где $t \in (0, h)$ для некоторого фиксированного $h > 0$. Мы доказали, что конечномерные распределения нормализованного процесса $q(tT)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям гауссовского процесса.Для этого фиксируем некоторые моменты времени $t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$. Число требований поступивших в систему на интервале $[Tt_{i-1}; Tt_i]$ и обслуженных на интервале $[Tt_j; Tt_{j+1}]$ обозначаем через ξ_{ij}^T, где $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq n$. Заметим, что эти случайные величины независимы и ξ_{ij}^T имеют пуассоновское распределение с параметром α_{ij}^T, где $\alpha_{ij}^T = \lambda \int_{Tt_{i-1}}^{Tt_i} \left(\overline{B}(Tt_j - y) - \overline{B}(Tt_{j+1} - y)\right) dy$, $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq n$. Здесь мы предполагаем, что $t_0 = 0$ и $t_{n+1} = \infty$.

Можно показать, что для некоторых постоянных $d_{ij} > 0$ $\frac{\alpha_{ij}^T}{T^{1-\beta}L(T)} \sim d_{ij}$, при $T \to \infty$.

Итак, для случайного вектора $\widehat{\vec{\xi}}^T = \frac{\vec{\xi}^T - \vec{d}T^{1-\beta}L(T)}{\sqrt{T^{1-\beta}L(T)}}$, имеет место сходимость $\widehat{\vec{\xi}}^T \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D)$ при $T \to \infty$, где $\vec{\xi}^T = \left(\xi_{11}^T, \xi_{12}^T \ldots \xi_{1n}^T, \xi_{22}^T, \xi_{23}^T \ldots \xi_{2n}^T, \ldots, \xi_{nn}^T\right)$. Здесь D – диагональная матрица со значениями $\{d_{11}, d_{12} \ldots d_{1n}, d_{22}, d_{23} \ldots d_{2n}, \ldots, d_{nn}\}$ на главной диагонали.

Мы заметили, что $q(Tt_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k}^{n+1} \xi_{ij}^T$. Поэтому существует матрица C с постоянными коэффициентами такая, что $\vec{q}^T = C\vec{\xi}^T$, где $\vec{q}^T = (q(Tt_1), q(Tt_2), \cdots, q(Tt_n))$. Итак, имеет место следующий результат.

Теорема Пусть условие (1) выполнено, тогда

$$\frac{\vec{q}^T - \lambda\vec{\rho}T^{1-\beta}L(T)}{\sqrt{T^{1-\beta}L(T)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, R) \, \text{при} \, T \to \infty.$$

Здесь $\vec{\rho} = (t_1^{1-\beta}, t_2^{1-\beta}, \ldots, t_n^{1-\beta})$. Матрица $R = (r_{ij})$ – положительно определена и $r_{ij} = (\max(t_i, t_j))^{1-\beta} - (\max(t_i, t_j) - \min(t_i, t_j))^{1-\beta}$.

Источники и литература

1) Kaplan N. "Limit theorems for a GI/G/∞ queue". The Annals of Probability 1975, Vol.3,No.5, pp. 780-789.
2) L.G. Afanasyeva, E.E. Bashtova, E.A. Chernavskaya, “ Limit theorems for queuing system with an infinite number of servers,” in: XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models[in Russian](2014),pp.,9–11.

Слова благодарности

Автор выражает глубокую благодарность профессору Л.Г. Афанасьевой и к.ф.-м.н.Баштовой Е.Е. за постоянное внимание к работе, ценные замечания и указания, существенным образом способствовавшие написанию работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00653 А.