

**К задаче о брахистохроне при наличии сухого и линейного вязкого трения**

**Зароднюк Алёна Владимировна**

*Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра прикладной механики и управления,  
Москва, Россия

*E-mail: alenaz\_90@inbox.ru*

Рассматривается задача быстрогодействия и связанная с ней задача максимизации горизонтальной дальности движения точки за фиксированное время. Материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием сил сухого и вязкого трения, пропорционального первой степени скорости, в однородном поле сил тяжести. Целью предлагаемой работы является качественный анализ этих задач, являющихся обобщением задачи о брахистохроне, позволяющий установить характерные свойства оптимальных траекторий без численного моделирования. Подобные задачи исследовались в работе [1].

Для решения задачи используется принцип максимума Понтрягина. Показано, что экстремальными траекториями являются траектории движения с особым управлением. В результате задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. Проводится анализ фазовых траекторий этой системы, и выясняются их характерные свойства, а также свойства траекторий движения в вертикальной плоскости, проиллюстрированные численным интегрированием.

Для случая сухого трения с помощью необходимых условий оптимальности особого управления удаётся однозначно раскрыть модуль управления для всех возможных значений коэффициента сухого трения. Устанавливаются качественный вид фазового портрета системы и свойства траекторий движения рассматриваемой точки.

Для случая сухого и вязкого сопротивления находится множество начальных скоростей, при которых модуль управления раскрывается однозначно. Выясняется качественный вид фазового портрета при таких начальных условиях и качественный вид траекторий движения в вертикальной плоскости. Анализ показывает, что включение в систему вязкого трения приводит к радикальной перестройке фазового портрета исследуемой системы. В отличие от задачи с одним только сухим трением, система которой не имеет стационарных решений, при включении вязкого трения появляются два стационарных решения - устойчивый дикритический узел и седло. Первая точка отвечает движению вертикально вниз, вторая - наклонному движению с постоянной скоростью. При больших значениях времени окончания процесса траектория на фазовой плоскости складывается из трёх участков - быстрого выхода в окрестность седла, медленный дрейф в его окрестности и быстрый выход для выполнения конечного условия. Обсуждаются направления дальнейших исследований.

**Источники и литература**

- 1) Голубев Ю.Ф. Брахиохрона с трением // Известия РАН. Теория и системы управления, 2010, No 5, 41-52.