Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

3-хорошие формальные матрицы над кольцом целых чисел

Цырендоржи Норбосамбуев Дашацыренович

Аспирант

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

В теории колец важную роль играют различные кольца матриц. Среди них выделяются кольца обобщенных матриц. Их называют также формальными матрицами. Элементы этих матриц могут принимать значение в нескольких кольцах и бимодулях. Обобщенные матрицы складываются по стандартным правилам матричного сложения. Умножение формальных матриц осуществляется с помощью бимодульных гомоморфизмов. В результате получается кольцо - кольцо обобщенных (или формальных) матриц. Это кольцо представляет собой важный алгебраический объект. Например, кольцо эндоморфизмов разложимого в прямую группу модуля и любое кольцо с нетривиальным идемпотентом являются кольцами обобщенных матриц [1]. Кольца обобщенных матриц играют важную роль в изучении ряда классов артиновых колец и алгебр. Исследование колец обобщенных матриц - это актуальное направление в современной теории колец и модулей. Оно имеет большое научное значение.

Среди колец формальных матриц можно выделить один интересный вид колец - кольца формальных матриц со значениями в данном кольце (также говорят "над данным кольцом").

Элемент кольца называется k-хорошим, если он может быть записан в виде суммы k обратимых элементов этого кольца. Кольцо называется k-хорошим, если все его элементы k-хорошие [3].

Были получены следующие факты:

Теорема 1. Любая формальная матрица может быть записана как сумма обобщенной диагональной и обобщенной обратимой матриц.

Известно, что в обычном кольце матриц над данным кольцом всякая диагональная матрица может быть записана в виде суммы двух обратимых. То есть такое кольцо всегда будет 3-хорошим [2].

Теорема 2. Пусть K=M(n,Z,s) кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел, причем множитель s отличен от 0, 1 и -1. Диагональная матрица A=diag(a,b) из K будет 2-хорошей тогда и только тогда когда a и b таковы, что найдутся такие целые числа x1, x2, y1, y2, что a=x1+x2 и b=y1+y2, причем (x1x2-1) и (y1y2-1) делятся на s, либо (x1x2+1) и (y1y2+1) делятся на s, либо (x1x2-1) и (y1y2+1) делятся на s, либо (x1x2+1) и (y1y2-1) делятся на s.

Источники и литература

1) Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их орпеделители // Фундаментальная математика. 2014. No. 1. C. 65-119.
2) Melvin Henriksen Two classes of Rings generated by their units // J. Algebra 1974. No. 1. C. 182–193.
3) Peter Vamos 2–good rings // Quart. J. Math. 2005. No. 3. C. 417–430.