Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Бифуркация Андронова-Хопфа в логистическом уравнении с непостоянным запаздыванием

Голубенец Вячеслав Олегович

Студент (бакалавр)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: golubenets2010@yandex.ru

Логистическое уравнение с запаздывающим аргументом может быть записано следующим образом

$$\dot{N} = \lambda N \left(1 - N(t-1)\right). \tag{1}$$

Здесь $\lambda > 0$ – параметр. Уравнение (1) имеет положение равновесия $N = 1$, устойчивость которого определяется расположением относительно мнимой оси корней характеристического уравнения $\mu = -\lambda e^{-\mu}$. Известно, что при $\lambda < \frac{\pi}{2}$ все корни этого уравнения лежат слева от мнимой оси, при $\lambda > \frac{\pi}{2}$ существует корень с положительной вещественной частью, а при $\lambda = \frac{\pi}{2}$ характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. Это означает, что при $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$ решение $N = 1$ асимптотически устойчиво, при $\lambda > \frac{\pi}{2}$ оно неустойчиво, а при $\lambda = \frac{\pi}{2}$ реализуется критический случай. Также известно [1], что это стационарное решение теряет устойчивость в результате суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа.

В настоящей работе изучим логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от исходной функции

$$\dot{N} = \lambda N \left(1 - N\left(t - T(N)\right)\right). \tag{2}$$

Здесь $T(N)$ – известная всегда положительная функция. Не ограничивая общности предположим, что $T(1) = 1$, иначе выполним соответствующую нормировку времени. Априори предполагаем, что для решения уравнения (2) выполняется $|N(t)| \leq M \quad \forall t \in R$ для некоторого положительного M. Тогда для непрерывной функции $T(N)$ можно гарантировать ее ограниченность: $T(N) \leq T_1, \quad T_1 > 0$. Дополним (2) начальным условием:

$$N = \psi(t) \in C([-T_1, 0]), \quad |\psi| \leq M.$$

Таким образом фазовым пространством уравнения (2) будет пространство $C_M([-T_1, 0])$ функций, непрерывных на $[-T_1, 0]$, абсолютная величина которых ограничена константой M.

Поставим задачу исследовать поведение решений (2) в малой окрестности положения равновесия $N = 1$ при значениях λ близких к критическому. Делая в (2) замену $N(t) = 1 + u(t)$ с $u(t)$ близкой к нулю и раскладывая $T(1+u)$ в ряд Маклорена

$$T(1+u) = 1 - \alpha u - \beta u^2 + o(u^2),$$

получим

$$\dot{u} = -\lambda(1+u)u\left(t - 1 + \alpha u + \beta u^2 + \ldots\right). \tag{3}$$

Положим $\lambda = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Используя метод нормальных форм, в уравнении (3) сделаем замену

$$u(t) = \sqrt{\varepsilon}\left(z(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}\right) + \varepsilon u_2(t,\tau) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,\tau) + o\left(\varepsilon^{3/2}\right), \tag{4}$$

где $\tau = \varepsilon t$. Теперь подставляем это в (3) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$.

При $\varepsilon^{3/2}$ из условия выбора функции $u_3(t,\tau)$ ограниченной получаем нормальную форму уравнения (2)

$$z' = \mu z + dz|z|^2, \tag{5}$$

где $\mu = \dfrac{i}{1+i\frac{\pi}{2}}$ откуда видно, что $Re(\mu) = \dfrac{2\pi}{4+\pi^2} > 0$. Знак первой ляпуновской величины $Re(d)$ равен

$$signRe(d) = sign\left(9\pi^2(4-\pi)\alpha^2 - 32\pi(1+\pi)\alpha - 120\beta\pi - 24\pi + 16\right).$$

В (4) сделаем замену $z(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$ и получим

$$\begin{cases} \rho' = Re(\mu)\rho + Re(d)\rho^3 \\ \varphi' = Im(\mu) + Im(d)\rho^2. \end{cases} \tag{6}$$

Легко видеть, что в случае $Re(\mu) > 0, Re(d) < 0$ у первого уравнения все решения $\rho(\tau)$ стремятся к состоянию равновесия $\rho_0 = \sqrt{-\frac{Re(\mu)}{Re(d)}}$, т.е. все решения $z(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$ наматываются на цикл радиуса ρ_0.

Таким образом если $Re(d) < 0$, то в уравнении (2) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа.

Оказывается, что это выполнено при значениях параметров $\beta > \beta_0$ и $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$, где

$$\alpha_\pm = \frac{16(1+\pi) \pm 2\sqrt{2}\sqrt{32(1+\pi)^2 + 135\beta\pi(4-\pi) + 9(4-\pi)(3\pi-2)}}{9\pi(4-\pi)}, \tag{7}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{135\pi(4-\pi)}\left[9(\pi-4)(3\pi-2) - 32(1+\pi)^2\right]. \tag{8}$$

Приближенные значения для $\beta_0, \alpha_\pm$ таковы:

$$\beta_0 \approx -1.66523347744027\ldots,$$
$$\alpha_\pm \approx 2.7 \pm 0.1\sqrt{364\beta + 606}.$$

Источники и литература

1) Кащенко С.А. Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем, Т. 19. №. 3. 2012. С. 32-62.