Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об одном методе решения начально-краевой задачи о движении транспортного потока на прямолинейном участке

Сенкебаева Акбота Айдосовна

Аспирант

Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломоносова, Астана, Казахстан

E-mail: akbota.senkebayeva@gmail.com

lomonosov

Об одном методе решения начально-краевой задачи о движении транспортного потока на прямолинейном участкеСенкебаева А. А.

Сенкебаева Акбота АйдосовнаДокторант PhDКазахстанско-Британский технический университетАлматыКазахстанakbota.senkebayeva@gmail.com

В работе предлагается один метод решения начально–краевой задачи, описывающей движение транспортного потока на интервале времени $(0,\ t_0-\tau_0)$ от начала движения до момента торможения при мигающем зеленом сигнале светофора чуть раньше установленного времени $t=t_0$ остановки движения. Движение описывается уравнениями газовой динамики с одной пространственной переменной:

$$\rho\,\Big(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\,F \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0,\quad p=P(\rho). \tag{2}$$

Здесь $\rho(x,t)$ — плотность, $v(x,t)$ — скорость, $p(x,t)$ — давление в заданной точке x сплошной среды в момент $t>0$. Плотность внешних массовых сил $F(v)$ и функция $P(s)$ считаются заданными, причем

$$F(v)=F_0=const>0 \text{ при } vv_*, \tag{3}$$

где v_* —максимальная допустимая скорость. Для (1) и (2) рассматривается начально–краевая задача

$$v(x,0)=v_0(x),\quad \rho(x,0)=\rho_0(x),\ x>0 \tag{4}$$

$$v(0,t)=v^0(t),\quad \rho(0,t)=\rho^0(t),\ t>0 \tag{5}$$

при условии $v_0(x)\geqslant 0$ и $v^0(t)\geqslant 0$.

По сравнению с газом или жидкостью транспортный поток имеет свои особенности. Если жидкость или газ находятся в начальный момент времени $t=0$ в состоянии покоя ($v(x,0)=0$), но начальная плотность распределена неравномерно ($\rho(x,0)\neq const$), то даже при отсутствии внешних массовых сил ($F=0$) при $t>0$ жидкость или газ начнут растекаться. Автомобили же без внешней силы F останутся неподвижными. Фактором, заставляющим жидкость или газ растекаться, является градиент давления в (1). Способом избежать такого поведения сплошной среды является постулат

$$P(s)\equiv const. \tag{6}$$

В настоящей работе предлагается одно решение начально–краевой задачи (1)– (6). Будем считать, что

$$\rho(x,0)=\rho_0(x)\geq 0,\ v(x,0)=v_0(x)\geq 0\ (x>0) \tag{7}$$

$$\rho(0,t)=\rho^0(t)\geq 0,\ v(0,t)=v^0(t)\geq 0\ (t>0). \tag{8}$$

Рассмотрим новые независимые переменные $(\xi,\,t)$, вводимые по формуле

$$\xi = \int\limits_0^x \rho(s,t)ds,\ t = t. \tag{9}$$

Пусть новые искомые функции $\hat{\rho}(\xi,t) = \rho(x,t),\ \hat{v}(\xi,t) = v(x,t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + a(t)\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} = F \tag{10}$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + a(t)\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \hat{\rho}^2\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} = 0, \tag{11}$$

где $a(t) = \rho^0(t) \cdot v^0(t)$. Будем искать решения, в которых $\rho(x,t) \geq 0$. Поэтому преобразование (9) переводит полуось $\{x > 0\}$ в полуось $\{\xi > 0\}$. На границе $\{\xi = 0\}$ выполняются краевые условия $\hat{\rho}(0,t) = \rho^0(t), \hat{v}(0,t) = v^0(t)$, которые следуют из условий (8). Поскольку $\hat{\rho}(\xi,0) = \hat{\rho}_0(\xi) = \rho(x,0) = \rho_0(x),\ \hat{v}(\xi,0) = \hat{v}_0(\xi) = v(x,0) = v_0(x)$, то для определения начальных значений $\hat{\rho}_0(\xi)$ и $\hat{v}_0(\xi)$ мы должны найти преобразование (9) при $t = 0$ ($\xi = \int\limits_0^x \rho_0(s)ds$) и вычислить обратное ему преобразование $x = \gamma_0(\xi)$. Условием существования обратного преобразования является условие $\rho_0(x) > 0$ $(x > 0)$.

Таким образом, можно определить $\hat{\rho}_0(\xi) = \rho_0(\gamma_0(\xi))$ и $\hat{v}_0(\xi) = v_0(\gamma_0(\xi))$ и задать начальные условия $\hat{\rho}(\xi,0) = \hat{\rho}_0(\xi), \hat{v}(\xi,0) = \hat{v}_0(\xi)$ с известными функциями $\hat{\rho}_0$ и $\hat{v}_0$.

Слова благодарности

Выражаю благодарность моему научному руководителю Мейрманову Анварбеку Мукатовичу